数理解析研究所講究録
第25巻 1967年 80-92

アソシエィション代数の系統的構成方法とその応用

広島大理　山本純恭
金沢大理　藤井淑夫
広島大理　浜田昇

1. 序　著者の一人山本は，従来の実験計画を構成の立場から考え，処理の間に定義されるアソシエィション代数（リレィションシップ代数）やデザインのリレィションシップ代数は，根源的なリレィションシップ代数とみなされる一つまたは若干個の代数 $[I_S, G_S]$ から，実験計画の目的に応じて適当に写像し，適当に組合せることによって目的に応じたデザインを組むことが，可能になるであろうと考えた。この構成方法の一つは，与えられたリレィションシップ代数の partially similar mapping と orthogonal composition の概念である[4]。この論説の目的の一つは，この概念を用いて，T_m タイプ，N_m タイプ，F_p タイプ，C_p タイプ，OL_r タイプ等のアソシエィション・スキームに応ずるアソシエィション代数を系統的に構成する方法，および，これらのアソシエィション代数の構造とそれに対応するパラメーター・モデルとの関係を明らかにすることである。今一つの目的は，partially similar mapping や orthogonal composition によって構成されるアソシエィション・スキームをもつ regular symmetrical PBIBDの存在する必要条件とし

て，Hasse-Minkowski の P invariant を求めるために必要なグラミアンを系統的に得る方法を述べることにある。

以下，主要結果を述べる。 詳細については〔5〕を参照されたい。

2。アソシエィション代数の系統的構成方法

T_m タイプ，N_m タイプ，F_p タイプ，C_p タイプ，OL_r タイプ等のアソシエィション・スキームに応ずるアソシエィション代数を，根源的なリレィションシップ代数とみなされる一つまたは若干個の代数〔I_S，G_S〕から，partially similar mapping や orthogonal composition を用いて逐次構成する方法について述べる。 紙面の関係上，ここでは，T_m タイプのアソシエィション代数の系統的構成方法，および，T_m タイプのアソシエィション代数の構造とそれに対応するパラメーター・モデルとの関係についてのみ記述する。 その他のアソシエィション代数の構成方法等については，論文〔5〕を参照されたい。

S 個の整数からなる集合，例えば，$\{1, 2, \cdots, S\}$ から，$m\ (\leq S/2)$ 個の整数：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ を取り出して出来る部分集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ の全体を考える。 これら $v_m = \binom{S}{m}$ 個の部分集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ の一つ一つに処理を対応させ，その対応する処理を $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ で表わす。 これら v_m 個の処理の間に次のようなアソシエィションの関係を導入する。

定義　2つの部分集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ と $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ とに対応する2つの処理 $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ と $\phi(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ を考える。$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ と $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ との共通元の個数が，$m-i$ 個であるとき，2つの処理 $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ と $\phi(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ とは，*i-th* アソシエイトにあるといい，このことを

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \overset{i\text{-}th}{\longleftrightarrow} \phi(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$$

で表わす。

v_m 個の処理の間に定義されたアソシエイションの関係は，アソシエイション・スキームのみたすべき3つの条件〔1〕を満たす。このアソシエイション・スキームは，2アソシエイト・クラスの triangular タイプのアソシエイション・スキームを一般化したもので，mアソシエイト・クラスの triangular タイプのアソシエイション・スキーム，略して，T_mタイプのアソシエイション・スキームとよばれている[3]，[5]。

これら v_m 個の処理に適当な番号をつけ，上のアソシエイション・スキームの表現行列を次のように定義する。

$$\overset{(m)}{A_i} = \left\| a\binom{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}_i \right\| \quad (i=0,1,\ldots,m)$$

$$ここに，\ a\binom{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}_i = \begin{cases} 1 : & \phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \overset{i\text{-}th}{\longleftrightarrow} \phi(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \\ 0 : & そうでないとき， \end{cases}$$

アソシエイション・スキームの定義より，これら $m+1$ 個の表現行列の間には，次のような関係式がある。

$$\overset{(m)}{A_0} = I_{v_m} \quad (\ v_m \times v_m \ 単位行列) \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \overset{(m)}{A_i} = G_{v_m} \quad (\text{すべての元が1である } v_m \times v_m \text{ 行列}) \tag{2.2}$$

$$\overset{(m)}{A_i}\overset{(m)}{A_j} = \overset{(m)}{A_j}\overset{(m)}{A_i} = \sum_{k=0}^{m} \overset{(m)}{p}{}^{k}_{ij} \overset{(m)}{A_k} \quad (i,j=0,1,\dots,m) \tag{2.3}$$

ここに，
$$\overset{(m)}{p}{}^{k}_{ij} = \sum_{n=0}^{m-i} \binom{m-i}{n}\binom{i}{m-j-n}\binom{i}{m-k-n}\binom{s-m-i}{j+k+n-m} \tag{2.4}$$

これら $m+1$ 個の（対称な）表現行列 $\overset{(m)}{A_0}, \overset{(m)}{A_1}, \cdots, \overset{(m)}{A_m}$ の実数体上での linear closure は，semi-simple commutative な行列代数を作る．この代数を T_m タイプのアソシエイション代数と呼び，$\mathfrak{A}(T_m)$ や $[\overset{(m)}{A_i} : i=0,1,\cdots,m]$ 等で表わす．

特に，$m=1$ の場合には，$\overset{(1)}{A_0} = I_s$，$\overset{(1)}{A_1} = G_s - I_s$，

$$\mathfrak{A}(T_1) = [\overset{(1)}{A_0}, \overset{(1)}{A_1}] = [I_s, G_s]$$

である．

以下，これらのアソシエイション代数の系列 $\{\mathfrak{A}(T_m)\}_{m=2,3,\cdots}$ を $\mathfrak{A}(T_1) = [I_s, G_s]$ から partially similar mapping の系列 $\{\sigma_{m-1}\}_{m=2,3,\cdots}$ を用いて逐次次のように構成する方法を述べる．

$$\mathfrak{A}(T_1) = [I_s, G_s] \xrightarrow{\sigma_1} \mathfrak{A}(T_2) \xrightarrow{\sigma_2} \cdots \xrightarrow{\sigma_{m-2}} \mathfrak{A}(T_{m-1}) \xrightarrow{\sigma_{m-1}} \mathfrak{A}(T_m) \xrightarrow{\sigma_m} \cdots$$

T_m タイプのアソシエイション・スキームの幾何学的構造を考えて，$v_{m-1} = \binom{s}{m-1}$ 次元ベクトル空間から，$v_m = \binom{s}{m}$ 次元ベクトル空間への線型写像を与える $v_m \times v_{m-1}$ 行列 F_{m-1} を次のように定義する．

$$F_{m-1} = \frac{1}{m}\left\| f^{(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{m-1})}_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)} \right\| \quad (m=2,3,\dots,\left[\frac{s}{2}\right])$$

ここに，$f\binom{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m-1}}{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m} = \begin{cases} 1 : & \{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m-1}\} \subset \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\} \\ 0 : & \text{そうでないとき} \end{cases}$

F_{m-1}を用いて $\mathfrak{A}(T_{m-1})$ の線型写像 σ_{m-1} を

$$\sigma_{m-1} : \quad \mathfrak{A}(T_{m-1}) \ni A \longrightarrow \tilde{A} = F_{m-1} \cdot A \cdot F'_{m-1} \qquad (2.5)$$

と定義すると，$\mathfrak{A}(T_{m-1})$ から，$\mathfrak{A}(T_m)$ を構成する次の定理を得る．

定理 1　　行列 F_{m-1} によって定義される線型写像 σ_{m-1}は，$2 \leq m \leq s/2$ をみたす任意の正の整数m に対して，*partially similar mapping* であり，$\mathfrak{A}(T_m)$は線型写像 σ_{m-1} を用いて，$\mathfrak{A}(T_{m-1})$ から次のように構成される．

$$\mathfrak{A}(T_m) = \sigma_{m-1}(\mathfrak{A}(T_{m-1})) \cup [I_{v_m}] \qquad (2.6).$$

この構造定理を用いて，代数 $\mathfrak{A}(T_m)$ の両側イデアルの *principal idempotent matrices* $\overset{(m)}{A}{}_i^{\#}$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ を $\overset{(1)}{A}{}_j^{\#}$ $(j = 0, 1)$ から帰納的に求めると $\overset{(m)}{A}{}_i^{\#}$ は，表現行列を用いて次のように書き表わされる．

$$\overset{(m)}{A}{}_i^{\#} = \sum_{j=0}^{m} \frac{\alpha_i \cdot \overset{(m)}{z}_{ij}}{v_m \cdot \overset{(m)}{n}_j} \cdot \overset{(m)}{A}_j \quad (i = 0, 1, \ldots, m) \qquad (2.7)$$

ここに，$\alpha_i = \operatorname{rank}(\overset{(m)}{A}{}_i^{\#}) = \binom{s}{i} - \binom{s}{i-1} \qquad (2.8)$

$$\overset{(m)}{n}_j = \binom{m}{j}\binom{s-m}{j} \qquad (2.9)$$

$$\overset{(m)}{z}_{ij} = \frac{\binom{s-m}{j}}{\binom{s-m}{i}} \sum_{a=0}^{i} (-1)^{i-a} \cdot \binom{m-a}{j}\binom{m-a}{m-i}\binom{s-i+1}{a} \qquad (2.10)$$

$$= \sum_{a=0}^{j} (-1)^{j-a} \binom{m-i}{a}\binom{m-a}{m-j}\binom{s-m-i+a}{a} \tag{2.11}$$

(2.11)は，小笠原[3]の求めたものと一致する。

3. Tm タイプのアソシエィション代数の構造とそれに対応するパラメーター・モデルとの関係

Tm タイプのアソシエィション代数の構造とそれに対応するパラメーター・モデルとの関係を略記する。詳細については，論文[5]を参照されたい。

最初に，S個の sub-factors または，levels が与えられているものとし，これらS個の元の間に根源的なリレィションシップ代数 $\mathfrak{A}(T_1)=[I_s, G_s]$ が，定義されているものとする。これらS個の sub-factors または，levels の効果を表わすS次元ベクトルを $\underline{\tau}_1$ とすると，これに対応するパラメーターの平方和の分解は，

$$\underline{\tau}_1' \cdot \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_1' \overset{(1)}{A_0^{\#}} \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_1' \overset{(1)}{A_1^{\#}} \underline{\tau}_1 = s\,\bar{\tau}_1^2 + \sum_{j=1}^{s} (\tau_{1j} - \bar{\tau}_1)^2 \tag{3.1}$$

ここに，$\underline{\tau}_1' = (\tau_{11}, \tau_{12}, \cdots, \tau_{1s})$，$\bar{\tau}_1 = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} \tau_{1j}$ (3.2)

$$\overset{(1)}{A_0^{\#}} = \frac{1}{s} G_s \ , \quad \overset{(1)}{A_1^{\#}} = I_s - \frac{1}{s} G_s \tag{3.3}$$

と一意的に定まる。(3.1)の第一項は，総平均の平方和，第二項は主効果の平方和に相等する。

根源的なリレィションシップ代数 $\mathfrak{A}(T_1) = [I_s, G_s]$ から partially similar mapping σ_1を用いて T_2 タイプのアソシエィション代数 $\mathfrak{A}(T_2)$を作るならば，その構造からみて，対応するパラメーター・ベクトルを，次のように定義するのが，自然であろう。

$$\xi_2 = F_1 \zeta_1 + \zeta_2 \tag{3.4}$$

ここに，$F_1 \zeta_1$ は，レベル効果を表わすパラメーター・ベクトル ζ_1 の partially similar image で，いわゆる主効果を表わすパラメーター・ベクトルであり，ζ_2は，ζ_1 の partially similar image $F\zeta_1$では表わせない residual parameter で，いわゆる交互作用を表わすパラメーター・ベクトルと解釈される。 従って，パラメーター・ベクトル ζ_2に次のような条件をおいても自然であろう。

$$F_1' \zeta_2 = 0 \tag{3.5}$$

T_2 タイプのアソシエィション代数に対応するパラメーターの平方和の分解は，

$$\xi_2' \cdot \xi_2 = \sum_{i=0}^{2} \xi_2' \overset{(2)}{A}{}_i^{\#} \xi_2 \tag{3.6}$$

$$= \frac{s(s-1)}{2} \bar{\zeta}_1^2 + \frac{s-2}{4} \sum_{i=1}^{s} (\zeta_{1i} - \bar{\zeta}_1)^2 + \zeta_2' \cdot \zeta_2 \tag{3.7}$$

ここに，(3.7)は，それぞれ，総平均，主効果，交互作用に対応する平方和を表わしている。

一般に，T_m タイプのアソシエィション代数 $\mathfrak{A}(T_m)$に対応するパラメーター・ベクトルは，その作り方から次のように表わされる。

$$\xi_m = F_{m-1}F_{m-2}\cdots F_1\zeta_1 + F_{m-1}F_{m-2}\cdots F_2\zeta_2 + \cdots + F_{m-1}\zeta_{m-1} + \zeta_m \tag{3.8}$$

ここに，ζ_1 は，s 個の主効果を，$\zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_m$は，それぞれ，一

次，二次，…，$(m-1)$ 次の交互作用を表わすパラメーター・ベクトルで，次の条件をみたすものとする。

$$F'_{j-1}\,\underline{z}_j = 0 \quad (j=2,3,\ldots,m) \tag{3.9}$$

T_m タイプのアソシエイション代数 $\mathfrak{A}(T_m)$ に対応するパラメーターの平方和の分解は，その代数の構造によって，次のように一意的に定まる。

$$\underline{\xi}'_m\cdot\underline{\xi}_m = \sum_{i=0}^{m} \underline{\xi}'_m \overset{(m)}{A}{}^{\#}_i \underline{\xi}_m$$

$$= \binom{s}{m}\bar{z}_1^2 + \frac{\binom{s-2}{m-1}}{m^2}\sum_{i=1}^{s}(z_{1i}-\bar{z}_1)^2 + \sum_{j=2}^{m}\frac{\binom{s-2j}{m-j}}{\binom{m}{j}^2}\,\underline{z}'_j\cdot\underline{z}_j \tag{3.10}$$

ここに，(3.10) は，それぞれ，総平均，主効果，一次の交互作用，…，$(m-1)$次の交互作用に対応するパラメーターの平方和の分解を表わし，その自由度は，次式で与えられる。

$$\text{d.f.}(\underline{\xi}'_m \overset{(m)}{A}{}^{\#}_i \underline{\xi}_m) = \text{rank}(\overset{(m)}{A}{}^{\#}_i) = \binom{s}{i} - \binom{s}{i-1} \tag{3.11}$$

なお，詳細については，論文〔5〕を参照されたい。

4. *regular symmetrical* PBIBDが存在するための必要条件とアソシエイション代数のグラミアンの計算

N をある m アソシエイト・クラスのアソシエイション・スキームにもとずくPBIBDの表現行列とし，A_i $(i=0,1,\cdots,m)$ をそのアソシエイション・スキームの表現行列とすると，次の関係が成り立つことが知られている。

$$N\cdot N' = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\cdot A_i = \sum_{j=0}^{m}\rho_j\cdot A_j^{\#} \tag{4.1}$$

ここに，$A_j^{\#}$ ($j=0,1,\cdots,m$) は，表現行列 A_i ($i=0,1,\cdots,m$) の実数体上での *linear closure* によって作られるアソシエイション代数の両側イデアルの *principal idempotent matrices* である。これらの行列の間には，次の関係があることが，知られている。

$$A_i = \sum_{j=0}^{m} z_{ji} A_j^{\#} \qquad (j=0,1,\ldots,m) \tag{4.2}$$

$$A_j^{\#} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_j z_{ji}}{v n_i} A_i \qquad (j=0,1,\ldots,m) \tag{4.3}$$

ここに，$\alpha_j = \mathrm{rank}(A_j^{\#})$，$n_i$ は一つの処理と i-th アソシエイトである処理の個数，v は行列 A_i ($i=0,1,\cdots,m$) の次数である。従って，ρ_j は会合数 λ_i と z_{ji} を用いて，次のように表わせる。

$$\rho_j = \sum_{i=0}^{m} z_{ji} \cdot \lambda_i \qquad (j=0,1,\ldots,m) \tag{4.4}$$

以下，特に，*idempotent matrices* $A_j^{\#}$ ($j=0,1,\cdots,m$) が，すべて有理行列である場合を考える。

特に，N が *regular symmetrical* PBIBD の表現行列である場合には，(4.1) に Hasse の定理を適用することにより，次の必要条件をうる。

$$(1) \quad \prod_{i=0}^{m} \rho_i^{\alpha_i} \sim 1$$

$$(2) \quad \prod_{i=1}^{m} (-1,\rho_i)_p^{\alpha_i(\alpha_i+1)/2} \cdot (\rho_i, g(A_i^{\#}))_p \cdot \prod_{1\leq i\leq j\leq m} (\rho_i,\rho_j)_p^{\alpha_i\alpha_j} = 1 \tag{4.6}$$

ここに，$\alpha_i = \mathrm{rank}(A_i^{\#})$，$g(A_i^{\#})$ は，行列 $A_i^{\#}$ のグラミアンを表わす。$a \sim b$：a/b がある有理数の平方数であることを意味する。

従って，必要条件を求めるためには，z_{ji} ($i,j=0,1,\cdots,m$) と $g(A_i^{\#})$

$(i=0,1,\cdots,m)$ を計算する必要がある。

以下，*partially similar mapping* や *orthogonal composition* によって構成されるアソシエイション代数の両側イデアルの *principal idempotent matrices* $A_i^{\#}$ のグラミアンを系統的に求めるために用いられる補題および，定理をあげる。

補題　行列 A，B を同じ次元をもつ有理対称行列とし，C をある有理対称行列とする。

(i)　$AB=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0$ ならば

$$g(A+B)\sim g(A)\cdot g(B)$$

ここに，$a\sim b$ は a/b が，ある有理数の平方数であることを意味する。

(ii)　$g(A\otimes C)\sim [g(A)]^q\cdot[g(C)]^p$

ここに，$p=\mathrm{rank}(A)$，$q=\mathrm{rank}(C)$，$\otimes$ は，クロネッカー積をあらわす。

(iii)　$g(kA)\sim g(A)$

ここに，k は，任意の有理数である。

$\mathfrak{A}$ を有理数体上で定義された *semi-simple algebra* とし，その *minimum two-sided ideals* の互に直交する *principal idempotent* を $E_1, E_2, \cdots, E_m$ とする。ここに，これらの *idempotents* は次元 u の有理対称行列であるものと仮定する。

行列 F を $\mathfrak{A}$ の線型写像 σ を定義する $v \times u$ 有理行列とする。

i.e. $\quad \sigma : \mathfrak{A} \ni A \longrightarrow \widetilde{A} = F A F'$ (4.7)

ここに、F は σ が *partially similar mapping* であるための十分条件：

$$F' \cdot F = \sum_{i=1}^{m} c_i E_i \qquad (c_i \geqq 0) \tag{4.8}$$

を満しているものとする。

一般性を失なうことなく、c_i $(i=1,2,\cdots,m)$ を、

$$c_i > 0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \quad ; \quad c_j = 0 \quad (j=n+1,\ldots,m) \tag{4.9}$$

とすることが出来る。

partially similar mapping σ を用いて $\mathfrak{A}$ から構成される $\widetilde{\mathfrak{A}} = \sigma(\mathfrak{A}) \cup [I_v]$ の *minimum two-sided ideals* の互に直交する *principal idempotents* $\widetilde{E}_i$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$ は、

$$\widetilde{E}_i = \frac{1}{c_i} F E_i F' \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.10}$$

$$\widetilde{E}_{n+1} = I_v - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{E}_i \tag{4.11}$$

で与えられる [4]。

定理 2. (i) $\quad g(\widetilde{E}_i) \sim c_i^{\alpha_i} \cdot g(E_i)$ (4.12)

ここに、$\alpha_i = \mathrm{rank}(E_i)$

(ii) $\quad g(\widetilde{E}_{n+1}) \sim \prod_{i=1}^{n} g(\widetilde{E}_i) \sim \prod_{i=1}^{n} c_i^{\alpha_i} \cdot g(E_i)$ (4.13)

(系) $\quad g(\frac{1}{v} G_v) \sim v, \quad g(I_v - \frac{1}{v} G_v) \sim v$

この定理を，T_m タイプ，N_m タイプ，F_p タイプ，C_p タイプ，OL_r タイプ等のアソシエイション代数の両側イデアルの *principal idempotent matrices* のグラミアンの計算に応用することが出来るが，ここでは，紙面の関係上一つだけ例をあげる。その他のアソシエイション代数のグラミアンの計算方法および結果については，論文[5]を参照されたい。

例1. T_m タイプのアソシエイション代数の場合

$$F'_{m-1} \cdot F_{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} c_j^{(m-1)} \overset{(m-1)}{A}{}_j^{\#} \tag{4.14}$$

ここに，
$$c_j^{(m-1)} = \frac{(m-j)(s-m-j+1)}{m^2} \sim (m-j)(s-m-j+1) \tag{4.15}$$

であるから，定理2を用いて，

(i) $i=0,1,\ldots,m-1$ のとき，
$$g(\overset{(m)}{A}{}_i^{\#}) \sim (c_i^{(m-1)})^{\alpha_i}\, g(\overset{(m-1)}{A}{}_i^{\#}) \tag{4.16}$$

(ii) $i=m$ のとき，
$$g(\overset{(m)}{A}{}_m^{\#}) \sim \prod_{a=0}^{m-1} g(\overset{(m)}{A}{}_a^{\#}) \tag{4.17}$$

従って，(4.16)と(4.17)をくりかえし用いて，

$$g(\overset{(m)}{A}{}_i^{\#}) \sim \left\{\prod_{k=1}^{m-i} c_i^{(m-k)}\right\}^{\alpha_i} \cdot \prod_{a=0}^{i-1} \left\{c_a^{(i-1)}\right\}^{\alpha_a} \tag{4.18}$$

$$\sim \binom{s-2i}{m-i}^{\alpha_i} \prod_{a=0}^{i-1} \left\{(i-a)(s-i-a+1)\right\}^{\alpha_a} \tag{4.19}$$

(4.19)は，小笠原[3]の求めたものと一致する。

参考文献

[1] Bose, R. C. and Shimamoto, T. (1952). Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. J. Amer. Statist. Assoc. 47, 151-184.

[2] Jones, B. W. (1950). The arithmetic theory of quadratic forms. Wiley, New York.

[3] Ogasawara, M. (1965). A necessary condition for the existence of regular and symmetrical PBIB designs of T_m type. Inst. Statist. mimeo. series. 418, Chapel Hill, N.C.

[4] Yamamoto, S. (1964). Some aspects for the composition of relationship algebras of experimental designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. 28 167-197.

[5] Yamamoto, S., Fujii, Y. and Hamada, N. (1965). Composition of some series of association algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. 29 181-215.