数理解析研究所講究録
第25巻 1967年 130-145

Association scheme の composition

和歌山県立医科大学　楠本熊一

1 序　1957年に A. T. James [5] が実験計画法の処理とブロックとの関係を relationship algebra として最初に取り扱って以来. 1959年に R. C. Bose と D. M. Mesner が association algebra を処理間の relationship algebra として, そして同じ時 J. Ogawa [1] が処理についての association とブロックとの relationship algebra の解析を PBIB design についても行った。1964年に S. Yamamoto [3] は処理間に定義されている association algebra を, 実験単位間に定義されている relationship algebra の中へ写像することが, 実験計画法であるとみなし、その写像の特性を定義した。そこではまた, 二つの algebra (処理についての association algebra とブロックについての relationship algebra) の composition を導入している。orthogonal composition でないものの取扱いについては一方を nuisance parameter algebra としている。私は, 両方の algebra を nuisance parameter algebra と考えないで, しかも orthogonal composition でない composition を本論文で詳述しようと試みた。この composition を再びブロックの relationship algebra との composition へもって行こう。

2. 2つの association algebra の composition　　処理数 v, v_1, v_2 なるものを考えよう。処理数 v_1 をとる処理間に定義されている association を示す association matrices によって生成される association algebra を $\mathfrak{A}$ とし，$\mathfrak{A}$ の互いに直交する idempotents を $A_1^\#, \cdots, A_m^\#$ とし $\mathfrak{A}$ の principal idempotent を $A_1^\# + \cdots + A_m^\#$ とする。処理数 v_2 をとる処理間に定義されている association を示す association matrices によって生成される association algebra を $\mathfrak{B}$ とする。$\mathfrak{B}$ の直交する idempotents を $B_1^\#, \cdots, B_n^\#$ とし，$\mathfrak{B}$ の principal idempotent を $B_1^\# + \cdots + B_n^\#$ とする。Φ_1 を $v_1 \times v$ 行列とし，Φ_2 を $v_2 \times v$ 行列としよう。

行列 Φ_1, Φ_2 がつぎの条件 (i), (ii), (iii) を満足するとする。

(i) $\Phi_1' \Phi_1 = c_1 A_1^\# + c_2 A_2^\# + \cdots + c_m A_m^\#$　　$c_i > 0$　$(i = 1, \cdots, m)$

(ii) $\Phi_2' \Phi_2 = d_1 B_1^\# + d_2 B_2^\# + \cdots + d_n B_n^\#$　　$d_j > 0$　$(j = 1, \cdots, n)$

(iii) $\Phi_1' \Phi_2 B_j^\# \Phi_2' \Phi_1 = d_j (\rho_{j1} A_1^\# + \rho_{j2} A_2^\# + \cdots + \rho_{jm} A_m^\#)$

ここでつぎの記号をつけよう

$$\overline{A}_i^\# = \frac{1}{c_i} \Phi_1 A_i^\# \Phi_1' \qquad \overline{B}_j^\# = \frac{1}{d_j} \Phi_2 B_j^\# \Phi_2'$$

$$\overline{B}_0^\# = I_v - \sum_{j=1}^{n} \overline{B}_j^\# \qquad I_v : v \text{ 次の単位行列}$$

$$i = 1, \cdots, m \qquad j = 1, \cdots, n$$

するとつぎの一連の定理が得られる。

定理 1　　$\overline{A}_i^\# \overline{B}_k^\# \overline{A}_j^\# = \dfrac{\rho_{ki}}{c_i} \delta_{ij} \overline{A}_i^\#$　　$i, j = 1, \cdots, m$
$k = 0, 1, \cdots, n$

ところで　$\rho_{oi} = c_i - \sum_{j=1}^{n} \rho_{ji}$

定理 2　$\rho_{ki} = 0$　ならば，そのときにのみ　$\overline{B}_k^{\#}\overline{A}_i^{\#} = 0$

$\rho_{ki} = c_i$　ならば，そのときにのみ　$\overline{B}_k^{\#}\overline{A}_i^{\#} = \overline{A}_i^{\#}$

定理 3　$\rho_{ki} \geqq 0$　$c_i \geqq \sum_{k=1}^{n} \rho_{ki} \geqq 0$

定理 4　$\rho_{ki} > 0$; $k = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$　$\sum_{x=1}^{s} \rho_{\alpha_x i} = c_i$

ならば，そのときにのみ　$\overline{B}_j^{\#}\overline{A}_i^{\#}\overline{B}_k^{\#}$; $j, k = \alpha_1, \cdots, \alpha_s$　は一次独立であって $\sum_{x=1}^{s} \overline{B}_{\alpha_x}^{\#}\overline{A}_i^{\#} = \overline{A}_i^{\#}$　である.

証明 $\overline{A}_i^{\#}(I - \sum_{x=1}^{s} \overline{B}_{\alpha_x}^{\#})\overline{A}_i^{\#} = \overline{A}_i^{\#}(1 - \sum_{x=1}^{s} \rho_{\alpha_x i}\frac{1}{c_i}) = 0$　であるから

$(I - \sum_{x=1}^{s} \overline{B}_{\alpha_x}^{\#})\overline{A}_i^{\#}(I - \sum_{x=1}^{s} \overline{B}_{\alpha_x}^{\#}) = 0$　となり　$\sum_{x=1}^{s} \overline{B}_{\alpha_x}^{\#}\overline{A}_i^{\#} = \overline{A}_i^{\#}$　である.

また　$\sum_{j,k} b_{jk}\overline{B}_j^{\#}\overline{A}_i^{\#}\overline{B}_k^{\#} = 0$　とおくと　$b_{jk}\overline{B}_j^{\#}\overline{A}_i^{\#}\overline{B}_k^{\#} = 0$

ここでもし $\overline{B}_j^{\#}\overline{A}_i^{\#}\overline{B}_k^{\#} = 0$　ならば　$\rho_{ji}\rho_{ki}\overline{A}_i^{\#} = 0$　となり

$\rho_{ki} > 0$; $k = \alpha_1, \cdots, \alpha_s$　という仮定に反する.　よって　$b_{jk} = 0$

逆に $\sum_{x=1}^{s} \overline{B}_{\alpha_x}^{\#}\overline{A}_i^{\#} = \overline{A}_i^{\#}$　ならば　$\frac{1}{c_i}\sum_{x=1}^{s} \rho_{\alpha_x i}\overline{A}_i^{\#} = \overline{A}_i^{\#}$　(定理1より)

つぎに $\rho_{ki} = 0$　ならば　$\overline{B}_k^{\#}\overline{A}_i^{\#} = 0$　となり　$\overline{B}_k^{\#}\overline{A}_i^{\#}\overline{B}_j^{\#}$; $j, k = \alpha_1, \cdots, \alpha_s$

は一次独立であるという仮定に反する。故に　$\rho_{ki} > 0$; $k = \alpha_1, \cdots, \alpha_s$

定理5　$\rho_{ki} > 0$　; $k = \alpha_1, \cdots, \alpha_s$　. $\sum_{x=1}^{s} \rho_{\alpha_x i} < c_i$

$\rho_{ji} = 0$　; $j \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_s$

ならば，そのときにのみ　$\overline{A}_i^{\#}$, $\overline{A}_i^{\#}\overline{B}_{\alpha_x}^{\#}$, $\overline{B}_{\alpha_y}^{\#}\overline{A}_i^{\#}$, $\overline{B}_{\alpha_y}^{\#}\overline{A}_i^{\#}\overline{B}_{\alpha_x}^{\#}$

$;x, y=1, \cdots, s$　は一次独立である。

証明　$a\bar{A}_i^{\#}+\sum_{y=1}^{s} b_y \bar{A}_i^{\#}\bar{B}_{\alpha_y}^{\#}+\sum_{x=1}^{s} g_x \bar{B}_{\alpha_x}^{\#}\bar{A}_i^{\#}+\sum_{x,y=1}^{s} h_{xy}\bar{B}_{\alpha_x}^{\#}\bar{A}_i^{\#}\bar{B}_{\alpha_y}^{\#}=0$　とおく

$\bar{B}_{\alpha_x}^{\#}$, $\bar{B}_{\alpha_y}^{\#}$ を前からと後からとそれぞれかけると　$a+b_y+g_x+h_{xy}=0$

右から $\bar{B}_{\alpha_y}^{\#}\Phi_1\Phi_1'$, 左から $\Phi_1\Phi_1'$ をかけると　$\rho_{\alpha_y i}(c_i a+c_i b_y+\sum_{x=1}^{s} g_x \rho_{\alpha_x i}+\sum_{x=1}^{s} h_{xy}$

$\cdot\rho_{\alpha_x i})=0$　よって　$(a+b_y)(c_i-\sum\rho_{\alpha_x i})=0$　故に　$a+b_y=0$

同様に $a+g_x=0$　故に $-a=g_x=b_y=-h_{xy}$; $x, y=1, \cdots, s$　$\Phi_1\Phi_1'$ を

左右からかけると　$a(c_i-\sum_{x=1}^{s}\rho_{\alpha_x i})\bar{A}_i^{\#}=0$　故に $a=0$

逆に，もしそうだとすれば 定理4. 定理1より　$\rho_{ki}>0$, $\sum_{x=1}^{s}\rho_{\alpha_x i}<c_i$

$(k=\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ である.

. algebra $\mathfrak{A}$ と algebra $\mathfrak{B}$ とで構成された relationship algebra R において，仮定(i),(ii) は $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ から R への partially similar mapping であることを意味し，仮定(iii) は image matrix algebra が orthogonal ではないということを意味する。

(iii)のかわりに条件

(iii)*
$$\Phi_2\Phi_1' A_i^{\#}\Phi_1\Phi_2' = c_i(\rho_{i1}^{*}B_1^{\#}+\cdots+\rho_{in}^{*}B_n^{\#})\qquad i=1, \cdots, m$$

を置くこともできる. そしてその両方の条件(iii)と(iii)*との成立を仮定することもできる。　このとき

$$\bar{A}_0^{\#}=I_v-\sum_{i=1}^{m}\bar{A}_i^{\#}$$

と記号をつけると

(1)
$$\bar{B}_j^{\#}\bar{A}_i^{\#}\bar{B}_k^{\#}=\frac{\rho_{ij}^{*}}{d}\delta_{jk}\bar{B}_j^{\#}\qquad j, k=1, \cdots, n \quad i=0, 1, \cdots, m$$

定理2より　$\rho_{ki}=0$　ならば，そのときにのみ　$\rho^*_{ik}=0$

(2)　$\rho_{ki}=c_i$，$\rho^*_{ik}=d_i$　ならば，そのときにのみ $\bar{A}_i^{\#}=\bar{B}_k^{\#}$

定理4より　$\sum_{x=1}^{s}\rho_{\alpha_x i}=c_i$　$\rho_{ki}>0$; $k=\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ ならば

(3)　$\bar{A}_i^{\#}=\sum_{x=1}^{s}\bar{B}_{\alpha_x}^{\#}$　であって　$\rho^*_{i\alpha_x}=d_{\alpha_x}$　である.

さて (III)* なる条件を仮定せずに，　定理1から定理5までによって algebra R は ρ_{ki} ; $k=1,\cdots,n$, $i=1,\cdots,m$ の値によって，つぎの4つの場合にわけられることがわかり，各々の場合について，その R の ideal と，その ideal の principal idempotent を計算する。

Case 1.　$\rho_{ki}=0$; $k=1,2,\cdots,n$　なるとき $[\bar{A}_i^{\#}]$ は one-dimensional two-sided ideal である。その ideal の principal idempotent は $\bar{A}_i^{\#}$ である。

Case 2.　$\rho_{ki}=c_i$　なるとき $[\bar{A}_i^{\#}]$ は R の one-dimensional two-sided ideal である。その ideal の principal idempotent は $\bar{A}_i^{\#}$ である。

Case 3.　$\rho_{\alpha_1 i},\rho_{\alpha_2 i},\cdots,\rho_{\alpha_s i}>0$, $\sum_{x=1}^{s}\rho_{\alpha_x i}=c_i$　なるとき

$$\left[\bar{B}_{\alpha_x}^{\#}\bar{A}_i^{\#}\bar{B}_{\alpha_y}^{\#}\ ;\ x,y=1,2,\cdots,s\right]$$

は R の s^2 dimensional two-sided ideal である。その ideal の principal idempotent は

$$(4)\qquad \sum_{x=1}^{s} \frac{c_i}{\rho_{\alpha_x i}} \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_x}$$

である。

なぜなら

$$(5)\qquad \sum_{x=1}^{s} \sum_{y=1}^{s} \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_y} = \sum_{y=1}^{s} \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_y} = \overline{A}^{\#}_i = \sum_{x=1}^{s} \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i$$

であるから定理4より $[\overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_y} ; x, y = 1, 2, \cdots, s]$ は R の s^2-dimensional two-sided ideal である。 この ideal の既約表現は

$$(6)\qquad \overline{A}^{\#}_j \to \delta_{ij} \begin{Vmatrix} \frac{\rho_{\alpha_1 i}}{c_i} & \frac{\rho_{\alpha_2 i}}{c_i} & \cdots & \frac{\rho_{\alpha_s i}}{c_i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\rho_{\alpha_1 i}}{c_i} & \frac{\rho_{\alpha_2 i}}{c_i} & \cdots & \frac{\rho_{\alpha_s i}}{c_i} \end{Vmatrix} \qquad \overline{B}^{\#}_k \to \delta_{\alpha_x k} \begin{array}{r} \\ \\ x\text{番目の行} \\ \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}}_{s\text{個}}$$

$$j = 1, \cdots, m \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

であるから この ideal の principal idempotent は (4) であることがわかる。

Case 4. $\rho_{\alpha_x i} > 0 \quad x = 1, 2, \cdots, s \qquad \sum_{x=1}^{s} \rho_{\alpha_x i} < c_i$ なるとき

$\rho_{j i} = 0 \qquad j \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$

$$[\overline{A}^{\#}_i,\ \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_y}\ \ \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i,\ \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_y} \ ;\ x, y = 1, 2, \cdots, s]$$

は R の $(s+1)^2$-dimensional two-sided ideal である。その ideal の principal idempotent は

$$(7)\qquad \frac{c_i}{c_i - \sum_{x=1}^{s} \rho_{\alpha_x i}} \overline{B}^{\#}_0 \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_0 + \sum_{x=1}^{s} \frac{c_i}{\rho_{\alpha_x i}} \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} = \frac{c_i}{\rho_{0 i}} \overline{B}^{\#}_0 \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_0 + \sum_{x=1}^{s} \frac{c_i}{\rho_{\alpha_x i}} \overline{B}^{\#}_{\alpha_x} \overline{A}^{\#}_i \overline{B}^{\#}_{\alpha_x}$$

である。

定理5より、この場合の前半は明らかである。そしてこの ideal の既約表現は

$$(8)\qquad \overline{A}_j^{\#} \to \delta_{ij}\left\|\begin{matrix} 1 & \frac{\rho_{\alpha_1 i}}{c_i} & \cdots & \frac{\rho_{\alpha_s i}}{c_i} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{matrix}\right\| \qquad \overline{B}_k^{\#} \to \delta_{k\alpha_x} \begin{array}{r} \\ \\ (x+1)\text{番目の行} \\ \\ \end{array}\left\|\begin{matrix} 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 1 & 0\cdots & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{matrix}\right\|$$

であるから、この ideal の principal idempotent は (7) である。

さて

$$(9)\qquad E_e = \overline{B}_0^{\#} - \sum_i \overline{A}_i^{\#} - \sum_i \frac{c_i}{\rho_{0i}} \overline{B}_0^{\#} \overline{A}_i^{\#} \overline{B}_0^{\#}$$

$$(10)\qquad E_{Bj} = \overline{B}_j^{\#} - \sum_i \overline{B}_j^{\#} \overline{A}_i^{\#} \overline{B}_j^{\#} \frac{c_i}{\rho_{ji}} - \sum_i \overline{A}_i^{\#} - \sum_i \overline{B}_j^{\#} \overline{A}_i^{\#} \overline{B}_j^{\#} \frac{c_i}{\rho_{ji}}$$

とおく。(9) の第2項の和は $\rho_{ji} = 0$; $j=1,2,\cdots,n$ なる i についての和であり第3項の和は $0 < \sum_{j=1}^{n} \rho_{ji} < c_i$ なる i についての和である。

(10) の第2項は $0 < \sum_{j=1}^{n} \rho_{ji} < c_i$ なる i についての和であり第3項は $\rho_{ji} = c_i$ なる i についての和であり第4項は $\sum_{x=1}^{s} \rho_{\alpha_x i} = c_i$, $j = \alpha_x$ なる i についての和である。

E_{Bj} は B factor に関する j番目の関係式の A factor の効果を除去した効果に対応する。

E_e は A factor の効果にも B factor の効果にも無関係な結合そのものの効果に対応する。

この結合を実験計画と考えれば E_e は実験誤差に対応する。そして単位要素の互いに直交する idempotents への分解はつぎの通りである。

$$(11)\quad I=\sum_i \bar{A}_i^{\#}+\sum_i \frac{c_i}{\rho_{0i}}\bar{B}_0^{\#}\bar{A}_i^{\#}\bar{B}_0^{\#}+E_e+\sum_{i,j}\bar{B}_j^{\#}\bar{A}_i^{\#}\bar{B}_j^{\#}\frac{c_i}{\rho_{ji}}$$
$$+\sum_{i,j}\bar{B}_j^{\#}\bar{A}_i^{\#}\bar{B}_j^{\#}\frac{c_i}{\rho_{ji}}+\sum_i \bar{A}_i^{\#}+\sum_{j=1}^{n}E_{Bj}$$

第1項の i は $\rho_{ji}\ (j=1,\cdots,n)=0$ なる i についての和

第2項の i は $c_i>\rho_{0i}>0$ なる i についての和

第4項の i は $c_i>\rho_{0i}>0$ なる i についての和で j は $c_i>\rho_{ji}>0$ なる j についての和.

第5項の i は $c_i=\sum_{x=1}^{s}\rho_{\alpha_x i}$ なる i についての和で j は $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ についての和

第6項の i は或る j について $\rho_{ji}=c_i$ なる i についての和

第7項の j はすべての j についての和である。

3. 実験計画法PBIBDの relationship algebra

$n^*\times v$ 行列 Φ^* と $n^*\times b$ 行列 Ψ とがつぎの条件を満足するとしよう。

(iv) $\Phi^{*\prime}\Phi^*=r\cdot I_v$

(v) $\Psi'\Psi=D=diag(k_1,k_2,\cdots,k_b)=\begin{Vmatrix}k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & \ddots \\ & & & k_b\end{Vmatrix}$

(vi) $\Phi^{*\prime}\Psi D^{-1}\Psi'\Phi^*=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\bar{B}_j^{\#}$

ここでつぎの記号を附加しよう

$$U=\Psi D^{-1}\Psi' \qquad S_j^{\#}=\frac{1}{r}\Phi^*\bar{B}_j^{\#}\Phi^{*\prime} \qquad j=0,1,\cdots,n$$

$$T_i^{\#}=\frac{1}{r}\Phi^*\bar{A}_i^{\#}\Phi^{*\prime} \qquad i=1,2,\cdots,m$$

すると，つぎの等式が成立する

(11) $T_i^{\#} S_j^{\#} T_k^{\#} = \delta_{ik} \frac{\rho_{ji}}{c_i} T_i^{\#}$ $\quad i, k = 1, \cdots, m \quad j = 0, 1, \cdots, n$

(12) $S_j^{\#} U S_k^{\#} = \delta_{jk} \frac{\sigma_j}{r} S_j^{\#}$ $\quad j, k = 0, 1, \cdots, n$ 但し $\sigma_0 = 0$ と考える

(13) $T_i^{\#} U = \sum_{j=1}^{n} T_i^{\#} S_j^{\#} U$ $\quad i = 1, \cdots, m$

(14) $S_0^{\#} U = U S_0^{\#} = 0$

(15) $T_i^{\#} U S_j^{\#} = \frac{\sigma_j}{r} T_i^{\#} S_j^{\#}$ $\quad i = 1, \cdots, m \quad j = 0, 1, \cdots, n$

定理 6　$\rho_{ki} = 0$ ならば，そのときにのみ $T_i^{\#} S_k^{\#} = S_k^{\#} T_i^{\#} = 0$

$\rho_{ki} = c_i$ ならば，そのときにのみ $T_i^{\#} S_k^{\#} = S_k^{\#} T_i^{\#} = T_i^{\#}$

$i = 1, 2, \cdots, m \quad k = 1, \cdots, n$

定理 7　$\sigma_j = 0$ ならば，そのときにのみ $S_j^{\#} U = U S_j^{\#} = 0$

$\sigma_j = r$ ならば，そのときにのみ $S_j^{\#} U = U S_j^{\#} = S_j^{\#}$

$j = 1, 2, \cdots, n$

定理 8　$0 \leqq \sigma_j \leqq r$ $\quad j = 1, 2, \cdots, n$

定理 9　$\sum_{x=1}^{s} \rho_{j_x i} = 0$，$0 < \rho_{j_y i} \leqq c_i$，$\sum_{y=s+1}^{n} \rho_{j_y i} = c_i$，$\sigma_{j_y} = 0$

$y = s+1, \cdots, n$

なるとき，そのときにのみ $S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$ $\quad y, z = s+1, \cdots, n$ なる行列は一次独立であって $\sum_{y=s+1}^{n} S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} = \sum_{y=s+1}^{n} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#} = T_i^{\#}$ $T_i^{\#} U = U T_i^{\#} = 0$ である．

証明　$\sum_{x=1}^{s} \rho_{j_x i} = 0$　故に $T_i^{\#} S_{j_x} = S_{j_x}^{\#} T_i^{\#} = 0$　$(x=1,\cdots,s)$　（定理6より）

定理7より　$S_{j_y}^{\#} U = U S_{j_y}^{\#} = 0$　$(y=s+1,\cdots,n)$　故に $T_i^{\#} U = \sum_{x=1}^{s} (T_i^{\#} S_{j_x}^{\#}) U$
$+ \sum_{y=s+1}^{n} T_i^{\#} (S_{j_y}^{\#} U) = 0$　定理4より　$S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$　$(y, z = s+1,\cdots,n)$　なる行列は一次独立であって　$\sum_{y=s+1}^{n} S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} = \sum_{y=s+1}^{n} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#} = T_i^{\#}$　である。

逆に　$S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$　$(y, z = s+1,\cdots,n)$　が一次独立で　$\sum_{y=s+1}^{n} S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} = T_i^{\#}$　であることより　$\sum_{y=s+1}^{n} \rho_{j_y i} = c_i$，　$\rho_{j_x i} = 0$　$(x=1,\cdots,s)$　$c_i > \rho_{j_y i} > 0$　$(y=s+1,\cdots,n)$　であることは明らかである。すなわち　$T_i^{\#} S_{j_x}^{\#} = 0$　$(x=1,\cdots,s)$ でもある。よって　$T_i^{\#} U = 0$　から　$\sum_{y=s+1}^{n} T_i^{\#} (S_{j_y}^{\#} U) = 0$　が導かれ
$\rho_{j_y i} \sigma_{j_y} / r c_i \cdot T_i^{\#} = 0$　$(y=s+1,\cdots,n)$　故に　$\sigma_{j_y} = 0$　$(y=s+1,\cdots,n)$

$\sigma_{j_{x'}} = 0$ or r　$(x'=u+1,\cdots,n)$

定理 10　$\sum_{x=1}^{s} \rho_{j_x i} = 0$，$0 < \rho_{j_y i} < c_i$　$(y=s+1,\cdots,n)$　$\sum \rho_{j_y i} = c_i$，
$0 < \sigma_{j_{y'}} < r$　$(y'=s+1,\cdots,u)$　なるとき，そのときにのみ $S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$
$(y, z = s+1,\cdots,n)$　$S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_{z'}} U$，$U S_{j_{y'}}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$，$U S_{j_{y'}}^{\#} T_i^{\#} S_{j_{z'}}^{\#} U$　$(y, z = s+1,\cdots,n,\ y', z' = s+1,\cdots,u)$；なる行列は一次独立であって　$\sum_{y=s+1}^{n} S_{j_y}^{\#} T_i^{\#}$
$= \sum_{y=s+1}^{n} T_i^{\#} S_{j_y} = T_i^{\#}$　である。但し　$u \leq n$

証明　$\sum_{x=1}^{s} \rho_{j_x i} = 0$　より　$T_i^{\#} S_{j_x}^{\#} = S_{j_x}^{\#} T_i^{\#} = 0$　$(x=1,\cdots,s)$
$\sum_{y=s+1}^{n} \rho_{j_y i} = c_i$，$0 < \rho_{j_y i} < c_i$　$(y=s+1,\cdots,n)$　より　$\sum_{y=s+1}^{n} S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} = \sum_{y=s+1}^{n} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#} = T_i^{\#}$
$S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$　$(y, z = s+1,\cdots,n)$　は一次独立である（定理4より）
また $0 < \sigma_{j_{y'}} < r$　$(y'=s+1,\cdots,u)$ ででもあるから　$U S_{j_{y'}}^{\#} T_i^{\#} S_{j_{z'}}^{\#} U$　$(y', z' = s+1,\cdots,u)$ は一次独立である。同様に　$U S_{j_{y'}}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#}$　$(y'=s+1,\cdots,u,\ z=s+1,\cdots,n)$
は一次独立であり　$S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_{z'}}^{\#} U$　$(y=s+1,\cdots,n,\ z'=s+1,\cdots,u)$　は一次独立である。　$0 < \rho_{j_{y'} i} < c_i$，$0 < \sigma_{j_{y'}} < r$　$(y'=s+1,\cdots,u)$　であるから $S_{j_{y'}}^{\#} T_i^{\#} S_{j_{z'}} \neq 0$

よって $S_{j_{y'}}^{\#}T_i^{\#}S_{j_{z'}}^{\#}$，$US_{j_{y'}}^{\#}T_i^{\#}S_{j_{z'}}^{\#}$，$S_{j_{y'}}^{\#}T_i^{\#}S_{j_{z'}}^{\#}U$，$US_{j_{y'}}^{\#}T_i^{\#}S_{j_{z'}}U$ は一次独立である。よって十分条件であることは容易に示される。逆に必要であることの証明も容易である。

定理 11. $\sum_{x=1}^{s}\rho_{j_x i}=0$，$0<\rho_{j_y i}<c_i$ $\sum_{y=s+1}^{n}\rho_{j_y i}=c_i$ $\sigma_{j_y}=r$ $(y=s+1,\cdots,n)$ なるとき，そのときにのみ $S_{j_y}^{\#}T_i^{\#}S_{j_z}^{\#}$ $(y,z=s+1,\cdots,n)$ なる行列は一次独立であって $\sum_{y=s+1}^{n}S_{j_y}^{\#}T_i^{\#}=\sum_{y=s+1}^{n}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}=T_i^{\#}$，$T_i^{\#}U=UT_i^{\#}=T_i^{\#}$ である。

証明は定理 9 と同じである。

定理 12 $\sum_{x=1}^{s}\rho_{j_x i}=0$，$0<\rho_{j_y i}<c_i$，$\sum_{y=s+1}^{n}\rho_{j_y i}<c_i$，$0<\sigma_{j_y}<r$ $(y=t+1,\cdots u)$，$\sigma_{j_y}=0$ $(y=s+1,\cdots,t)$，$\sigma_{j_y}=r$ $(y=u+1,\cdots,n)$

ならば，そのときにのみ

$$T_i^{\#},\ T_i^{\#}S_{j_y}^{\#},\ S_{j_z}^{\#}T_i^{\#},\ S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}\quad (y,z=s+1,\cdots,n)$$

$$T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U,\ US_{j_z}^{\#}T_i^{\#},\ US_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U,\ S_{j_{z'}}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U,\ US_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_{y'}}^{\#}$$

$$(y,z=t+1,\cdots,u\ ;\ y',z'=s+1,\cdots,n)$$

は一次独立である。但し $s\leqq t\leqq u\leqq n$ である

証明 $\sum_{x=1}^{s}\rho_{j_x i}=0$ 故に $T_i^{\#}S_{j_x}^{\#}=S_{j_x}^{\#}T_i^{\#}=0$ $(x=1,\cdots,s)$

$0<\rho_{j_y i}<c_i$，$\sum_{y=s+1}^{n}\rho_{j_y}<c_i$ より $T_i^{\#}$，$T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}$，$S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}$；$S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}$ $(y,z=s+1,\cdots,n)$ は一次独立（定理 5 より）　また $\sum_{y=s+1}\rho_{j_y i}\sigma_{j_y}<c_i r$ であるから $UT_i^{\#}\neq 0$, $T_i^{\#}$ そして $UT_i^{\#}$, $UT_i^{\#}S_{j_y}^{\#}$ $(y=s+1,\cdots,n)$ は一次独立である。$0<\sigma_{j_y}<r$ $(y=t+1,\cdots,u)$ であるから $UT_i^{\#}$, $UT_i^{\#}S_{j_y}^{\#}$，$UT_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U$

$(y=t+1,\cdots,u)$ は一次独立であり，$T_i^{\#}$, $T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}$, $T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U$ $(y=t+1,\cdots,u)$ も一次独立である．なお $S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}$, $S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}$, $S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U$ $(y=t+1,\cdots,u;\ z=s+1,\cdots,n)$ も一次独立であることを示すのは容易である． これらの事実を利用して定理の十分条件を証明することができる．必要条件の方は容易に証明することができる．

上述の定理により $T_i^{\#}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ と $S_j^{\#}$ $(j=0,1,\cdots,n)$ および U とで生成される algebra R^* を ρ_{ki} $(k=0,1,\cdots,n,\ i=1,\cdots,m)$ と σ_j $(j=0,1,\cdots,n)$ との値によってつぎの 3つの場合に分けることができる。

Case (1) $\sum_{j=1}^{n}\rho_{ji}=0$ すなわち $\rho_{0i}=c_i$ なるとき $[T_i^{\#}]$ は one-dimensional two-sided ideal である．その ideal の principal idempotent は $T_i^{\#}$ である．

Case (2) $\sum_{x=1}^{s}\rho_{j_xi}=0$, $\sum_{y=s+1}^{n}\rho_{j_yi}=c_i$, $\overbrace{0<\rho_{j_yi}<c_i\ \ (y=s+1,\cdots,n)}$, $\sigma_{j_x}=0$ $(x=s+1,\cdots,t)$

$0<\sigma_{j_y}<r$ $\sigma_{j_z}=r$ $(y=t+1,\cdots,u;\ z=u+1,\cdots,n)$ 但 $s\leqq t\leqq u\leqq n$

ならば

$$(16)\qquad \left[S_{j_x}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}\ (x,y=s+1,\cdots,n),\ S_{j_x}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U,\ US_{j_y}^{\#}T_i^{\#}S_{j_x}^{\#},\ US_{j_y}^{\#}T_i^{\#}S_{j_z}^{\#}U\right]$$
$$(y,z=t+1,\cdots,u;\ x=s+1,\cdots,n)$$

は $(\overline{n-s}+\overline{u-t})^2$-dimensional two-sided ideal である．その ideal の principal idempotent は

$$(17)\qquad \sum_{x=s+1}^{t}\frac{c_i}{\rho_{j_xi}}S_{j_x}^{\#}T_i^{\#}S_{j_x}^{\#}+\sum_{y=t+1}^{u}\frac{c_i r}{\rho_{j_yi}(r-\sigma_{j_y})}(I-U)S_{j_y}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}(I-U)$$

$$+\sum_{y=t+1}^{u}\frac{rc_i}{\rho_{j_y i}\,\sigma_{j_y}}US_{j_y}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U+\sum_{z=u+1}^{n}\frac{c_i}{\rho_{j_z}}S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_z}^{\#}$$

である.

勿論 $t=n$ の場合もあり, $t=s$, $u=n$ の場合もあり, $u=s$ の場合も, $u=n$ の場合も, $u=t$ の場合も $t=s$ の場合もある.

Case (3) $\sum_{x=1}^{s}\rho_{j_x i}=0$, $0<\rho_{j_y i}<c_i$, $\sum\rho_{j_y i}<c_i$ $(y=s+1,\cdots,n)$, $\sigma_{j_x}=0$ $(x=s+1,\cdots t)$, $0<\sigma_{j_y}<r$ $(y=t+1,\cdots,u)$ $\sigma_{j_z}=r$ $(z=u+1,\cdots,n)$

なるとき

(18) $[T_i^{\#},\ T_i^{\#}S_{j_y}^{\#},\ T_i^{\#}S_{j_{y'}}U,\ S_{j_x}^{\#}T_i^{\#},\ S_{j_x}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#},\ S_{j_x}^{\#}T_i^{\#}S_{j_{y'}}^{\#}U,\ US_{j_z}^{\#}T_i^{\#},$
$US_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#},\ US_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y},\ US_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_{y'}}U\ ;\ x,y=s+1,\cdots,n,$
$y',z=t+1,\cdots,u\ ]$

は $(1+\overline{n-s}+\overline{u-t})^2$-*dimensional two-sided ideal* である. その *ideal* の *principal idempotent* は

(19) $$\frac{c_i}{c_i-\sum_{y=s+1}^{n}\rho_{j_y i}}\left(I-\sum_{y=s+1}^{n}S_{j_y}^{\#}\right)T_i^{\#}\left(I-\sum_{y=s+1}^{n}S_{j_y}^{\#}\right)+\sum_{x=s+1}^{t}\frac{c_i}{\rho_{j_x i}}S_{j_x}^{\#}T_i^{\#}S_{j_x}^{\#}$$

$$+\sum_{y=t+1}^{u}\frac{c_i r}{\rho_{j_y i}\,(r-\sigma_{j_y})}(I-U)S_{j_y}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}(I-U)$$

$$+\sum_{y=t+1}^{u}\frac{c_i r}{\rho_{j_y i}\,\sigma_{j_y}}US_{j_y}^{\#}T_i^{\#}S_{j_y}^{\#}U+\sum_{z=u+1}^{n}\frac{c_i}{\rho_{j_z i}}S_{j_z}^{\#}T_i^{\#}S_{j_z}^{\#}$$

である。

勿論 Case (2) と同じように $t=n$ の場合も $t=s$, $u=n$ の場合も, $u=s$ の場合も, $u=n$ の場合も, $u=t$ の場合も $t=s$ の場合もありうる.

Case (1) の $T_i^{\#}$ と (19) の第1項に対応する処理の平方和の成分は block 空間と B-factor 空間に直交している. (17) の第1項 第2項と (19) の第2項, 第3項に対応する処理の平方和の成分は block 空間に直交していて B-factor 空間に交絡している. (17) の第3項 第4項と (19) の第4項, 第5項とに対応するものは block 空間にも B-factor 空間にも交絡している.

4. 分散分析

この実験計画法の分散分析において

$A_i^{\#}$ に対応する平方和は Case (1) のとき $\underline{\xi}' T_i^{\#} \underline{\xi}$ である. 自由度は $\alpha_i = \mathrm{tr}(A_i^{\#})$ である. Case (3) のとき

(20) $$F_i = \frac{c_i}{c_i - \sum_{y=s+1}^{n} \rho_{1_y i}} \underline{\xi}' (I - \sum_{y=s+1}^{n} S_{1_y}^{\#}) T_i^{\#} (I - \sum_{y=s+1}^{n} S_{1_y}^{\#}) \underline{\xi}$$

である. 自由度は $\alpha_i = \mathrm{tr}(A_i^{\#})$ である.

$B_j^{\#}$ に対応する平方和は $\sigma_j = 0$ の場合

(21) $$\underline{\xi}' S_j^{\#} \underline{\xi} - \sum_i \frac{c_i}{\rho_{ji}} \underline{\xi}' S_j^{\#} T_i^{\#} S_j^{\#} \underline{\xi}$$

第2項の i についての和は $\rho_{ji} \neq 0$ なる i についての和である

$0 < \sigma_j < r$ の場合

$$(22)\quad \underline{\xi}'(I-U)S_j^{\#}(I-U)\underline{\xi} - \sum_i \frac{c_i r}{\rho_{ji}(r-\rho_j)} \underline{\xi}'(I-U)S_j^{\#}T_i^{\#}S_j^{\#}(I-U)\underline{\xi}$$

第2項の i についての和は $\rho_{ji} \neq 0, c_i$ なる i についての和である。
(21) に対する自由度は $\mathrm{rk}(B_j^{\#}) - \sum_i \alpha_i$ (22) に対する自由度は $\mathrm{rk}(B_j^{\#}) - \sum_i \alpha_i$ である。各々の i についての和は，それぞれ (21), (22) の中の項の i と同じである。明らかにつぎの定理が導かれる。

定理 13. $\mathrm{rk}(B_j^{\#}) \geqq \sum_i \mathrm{rk}(A_i^{\#}) \quad \rho_j \neq r,$

i についての和は $0<\rho_{ji} \leqq c_i$ なるすべての i についての和である。

block に対する平方和 すなわち U に対する平方和は

$$(23)\quad \underline{\xi}'\left(U - \frac{1}{n^*}G\right)\underline{\xi} - \sum_i \sum_{y=t+1}^{u} \frac{c_i}{\rho_{j_y i}} \underline{\xi}' U S_{j_y}^{\#} T_i^{\#} S_{j_y}^{\#} U \underline{\xi}$$
$$- \sum_i \sum_{z=u+1}^{n} \frac{c_i}{\rho_{j_z i}} \underline{\xi}' S_{j_z}^{\#} T_i^{\#} S_{j_z}^{\#} \underline{\xi}$$

これに対応する自由度は $b-1-\sum_i (n-t)\alpha_i$ である

誤差項に対する平方和は

$$(24)\quad \underline{\xi}'(I_{n^*}-U)\underline{\xi} - \underline{\xi}'(I-U)(\Phi^*\Phi^{*\prime})(I-U)\underline{\xi} - \sum_i \underline{\xi}' T_i^{\#} \underline{\xi} - \sum_i F_i$$

である。これに対する自由度は $n^* - b - v + \sum_j \mathrm{rk}(B_j^{\#}) - \sum_{i_x} \alpha_{i_x} - \sum_{i_y} \alpha_{i_y}$ である。j についての和は $\rho_j = r$ の場合についてであり，i_x は $\rho_{j i_x} = 0 \quad (j=1,\cdots,n)$ なる i_x についてであり i_y は $0<\sum_j \rho_{j i_y} < c_{i_y}$ なる i_y についての和である。

参考文献

[1] Ogawa, J. (1959) " The theory of the association algebra and the relationship algebra of a partielly balanced incomplete block design" Inst. Statist. Mimeo Series 224 Chapel Hill, N.C.

[2] Yamamoto, S. & Fujii, Y. (1963) " Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Design" J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 27 119–135

[3] Yamamoto, S. (1964) "Some Aspects for the Composition of Relationship Algebras of Experimental Designs" J. Sci Hiroshima Univ Ser A-I 28 167–197

[4] Yamamoto, S. Fujii, Y. and Hamada, N. (1965) " Composition of some Series of Association Algebras" J. Sci Hiroshima Univ. Ser A-I 29 181–215

[5] James, A. T. (1957) The relationship algebra of an experimental design" Ann. Math. Stat. 28 993–1002

[6] Kusumoto, K. (1964) " On a Design for Two-way Elimination of Heterogeneity and its Analysis" J. Sci Hiroshima Univ Ser A-I 28 237–258

[7] Kusumoto, K. (1967) "Association scheme of new types and necessary conditions for existence of regular and symmetrical PBIB designs with those association schemes" Ann. Inst. Statist. Math. vol 19.