数理解析研究所講究録
第 25 巻 1967 年 161-164

或種のブロック計画の不存在について

日大 生産工　　小川潤次郎

本稿の詳細については下記の論文を参照されたい。

小川潤次郎：ある種のブロックデザインの不存在について。（数学 第17巻，第2号，1965，10，pp. 65-72）

J. Ogawa: "On the Non-Existence of Certain Block Designs", to be presented at the U.S.-JAPAN cooperative seminar on "Combinatorial Mathematics and its Applications" being scheduled to be held at the University of North Carolina at Chapel Hill, N. C. from April 10 through 14 of 1967.

サイズ（ブロック内の実験単位の個数）が一様に k である b 個のブロックがあって，これに v 個の処理が次の三条件を満たすような場合に割りはけられたとき、これを釣合型不完全ブロック計画（Balanced Incomplete Block Design --- 略して BIBD）という。

(1) 各ブロックは k 個の相異なる処理を含む。

(2) 各処理は r 個のブロックに現われる。

(3) 任意の二つの処理は丁度 λ 個のブロックに対として現われる。

この BIBD を規定する五つの係数 v, b, r, k, λ は全部が独立ではない。次の二つの代数的な関係は見易い。

$$vr = bk, \qquad \lambda(v-1) = r(k-1)$$

更に又いわゆる Fisher の不等式

$$v \leqq b \qquad r \geqq k$$

が成り立つ。特に $v=b$ 従って $r=k$ のとき BIBD は対称であるといい、然らざるときは非対称という。

一般には $v>k$ であって、特に $v=k$ のときは完全ブロック計画といわれ、すべての処理が各ブロック内に現われる場合である。ブロックサイズ k が v より小なる場合には、各ブロック内ですべての処理を実験できない。従って'不完全'であるが、上記のような計画を用いれば、すべての処理比較が同一分散で線型推定できるのである。

1930 年代に R. A. Fisher と F. Yates は繰り返し数 r が10以内の範囲の全部の BIBD をリストしようとしたが、そのうちにどうしても作れないものがあった。それは

(α) $v=15$, $b=21$, $r=7$, $k=5$, $\lambda=2$　(γ) $v=36$, $b=45$, $r=10$, $k=8$, $\lambda=2$

(α*) $v=22$, $b=22$, $r=7$, $k=7$, $\lambda=2$　(γ*) $v=46$, $b=46$, $r=10$, $k=10$, $\lambda=2$

(β) $v=21$, $b=28$, $r=8$, $k=6$, $\lambda=2$　(δ) $v=46$, $b=69$, $r=9$, $k=6$, $\lambda=1$

(β*) $v=29$, $b=29$, $r=8$, $k=8$, $\lambda=2$　(ε) $v=51$, $b=85$, $r=10$, $k=6$, $\lambda=1$

であった。色々な人が試みたがどうしても作れないのでこれらの不存在証明ということが問題になってきた訳である。更に BIBD を一般化した部分釣合型不完全ブロック計画 (Partialy Balanced Incomplete Block Design — 略して PBIBD) というのがある。それは次のようなものである。

(1) 任意の二つの処理は、互に第1種のアッシエートであるか、第2種

のアソシエートであるか，----，又は第m種のアソシエートであるかのいずれかである。

(2) 各処理はそれぞれn_i個の第i種のアソシエートをもつ。

(3) 今二つのαとβとが互いに第i種のアソシエートであれば，αとは第j種アソシエートであり，同時にβとは第k種アソシエートであるような処理γの個数はp^i_{jk}であって，これはすべての第i種アソシエートの対に対して共通である。

各処理はそれ自身とは第0種アソシエートということにすれば

$$n_o = 1, \qquad p^k_{oi} = \delta_{ik}, \qquad p^o_{ij} = n_i\delta_{ij}.$$

但し，ここでδ_{ij}は Kronecker のデルタである。

アソシエーションの係数の間には次の関係がある。

$$\sum_{i=o}^{m} n_i = v, \quad p^k_{ij} = p^k_{ji}, \quad \sum_{i=o}^{m} p^i_{jk} = n_k, \quad n_i p^i_{jk} = n_j p^j_{ik} = n_k p^k_{ij}$$

さて，mアソシエート・クラスのアソシエーションの定義されたv個の処理が，そのサイズkなるb個のブロックに次の三条件を満たすように割りはけられたとき，これを部分釣合型不完全ブロック計画という。

(1) 各ブロックはk個の相異なる処理を含む。

(2) 各処理はr個のブロックに現われる。

(3) 第i種アソシエートであるような処理対は丁度λ_i個のブロックに現われる。

もちろん この場合も $vr = bk$ で又 $r = \lambda_o$ とおくと

$$\sum_{i=o}^{m} n_i\lambda_i = rk$$

が成り立つ。

$\lambda = 1$ であるような BIBD の双対計画は2アソシエート・クラスの PBIBD になることが判る。

PBIBD の場合にも BIBD の場合と同様な不存在証明の問題が起る。

本稿はこれらの問題に対して現在までの成果の総合的な報告である。