数理解析研究所講究録
第25巻 1967年 165-191

幾何学的Association schemeとその部分要因配置計画への応用について

金沢大 理　藤井 淑夫

§1. 序論および記号

要因配置計画における一部実施法（部分要因配置計画）における分散分析等については多くの研究がある（例えば Box and Hunter 参照[1]）．しかし現在まで association scheme および association algebra 等の代数的な観点からはほとんど考察されていない．ここではその手はじめとして，新しい型の Association schemes 等を定義し，この立場から系統的に部分要因配置計画をみようと考えた．これらの association schemes および対応する association algebras の構造を明らかにし，部分要因配置計画における別名（aliases）関係，block 擬要因，および block 配置計画における部分混同（partial confounding）等について述べる．

この小論を通じて必要な記号を述べる．

I_s：$s\times s$ の単位行列．

G_s：すべての要素が1である $s\times s$ 行列．

$A\otimes B$：行列 $A=\|a_{ij}\|$ と B の Kronecker 積，すなわち $A\otimes B=\|a_{ij}B\|$．

$[A_i\,;\ i=1,\cdots,m]$：行列 $A_i\,;\ i=1,\cdots,m$ の linear closure によって生成される実数体上のベクトル空間．

$\{A_i\,;\ i=1,\cdots,m\}$：行列 $A_i\,;\ i=1,\cdots,m$ を生成元とする実数体上の多

元環（algebra）．

$\{A_i\}\ i=1,\cdots,m\}$ ： A_i ; $i=1,\cdots,m$ を要素とする集合．

$GF(s)$ ： $s=g^u$ 個の元からなる有限体．g は素数，u は正整数とする．

また $GF(s)$ の元は座標表現（多項式表現）として，$a=\langle a^{(1)},\cdots,a^{(u)}\rangle$

，$a^{(i)}\in GF(g)$，$i=1,\cdots,u$ で表わすことにする．

$EG(k,s)$ ： $GF(s)$ 上の k 次元 Euclid 空間．

$PG(k,s)$ ： $GF(s)$ 上の k 次元射影空間．

$\mathcal{P}(A)$ ： $GF(s)$ 上の行列 $A\ (k\times p)\ (\neq 0)$ の p 個の列ベクトルの生成する

$PG(k-1,s)$ の部分空間．

$\overline{PG}(k,s)$ ： $PG(k,s)$ に零ベクトル $\underline{0}\ (\in EG(k+1,s))$ を添加して生ずる

空間．すなわち，$\overline{PG}(k,s)=PG(k,s)\cup\{\underline{0}\}$．

$\overline{\mathcal{P}}(A)$ ： $\overline{\mathcal{P}}(A)=\mathcal{P}(A)\cup\{\underline{0}\}$．

$\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ ： $PG(k,s)$ の部分空間 $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ を同時に含む最小の部分空間．

$\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}$ ： $PG(k,s)$ の部分空間 $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ に同時に含まれる最大の部分空間．

$\underline{a}=(a_1,\cdots,a_k)'$ ： $EG(k,s)$ 上の点．座標成分はラテン文字で表わす．

$\underline{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)'$ ： $PG(k-1,s)$ 上の点．座標成分はギリシャ文字で表わし，代表のものを固定する．また $GF(s)$ の座標表現を用いて，例えば $EG(k,s)$ 上の点 $\underline{a}$ は $\underline{a}=(a_1,\cdots,a_k)$，$a_i=\langle a_i^{(1)},\cdots,a_i^{(u)}\rangle$，$a_i^{(l)}\in GF(g)$，$i=1,\cdots,k$，$l=1,\cdots,u$ で表わされる．

§2. PG(k−1, s) − association scheme

点 $\underline{a}\ (=EG(k,s))$ を標識とする $v_k=s^k$ 個の treatments $\phi(\underline{a})=\phi(a_1,\cdots,a_k)$

を考え，これらの v_k 個の treatments の間に次の関係を導入する．

EG(k, s) 上の任意の2点 $\underline{a}$，$\underline{b}$ に対して

(2.1) $\quad \underline{a} - \underline{b} = \rho \underline{\alpha} \quad ; \quad \rho \in GF(s), \ \rho \neq 0, \quad \underline{\alpha} \in PG(k-1, s)$

のとき，treatments $\phi(\underline{a})$ と $\phi(\underline{b})$ は $\underline{\alpha}$-th associate の関係にあるといい

$$\phi(\underline{a}) \xrightarrow{\underline{\alpha}-th} \phi(\underline{b})$$

で表わす．便宜上，任意の treatment はそれ自身の $\underline{0}$-th associate ($\underline{0}'=(0,\cdots,0)$) であるとする．

v_k 個の元の間に導入された treatments の間のこの関係は association scheme (例えば[2]参照) のみたすべき条件 (a), (b), (c) を同時に満足することが示される．すなわち

(a) 任意の相異なる2つの treatments は，いずれかの $\underline{\alpha}$ ($\in PG(k-1, s)$)-th associate であって，それに限る．且つ association の関係は対称的である．またすべての treatment はそれ自身の $\underline{0}$-th associate である．

このことは定義より明らかである．

(b) 任意に固定した treatment $\phi(\underline{a})$ と $\underline{\alpha}$-th associates である treatments $\phi(\underline{b})$ の個数 $n_{\underline{\alpha}}$ は始めに固定した treatment $\phi(\underline{a})$ の選び方に無関係な一定値である．

このことは $\phi(\underline{a})$ を固定したとき，(2.1) 式をみたす解 $\underline{b}$ の個数は，$GF(s) \ni \rho (\neq 0)$ のとり方が $s-1$ 通りであるから

(2.2) $\quad n_{\underline{\alpha}} = s - 1 \ ; \ \underline{\alpha} \in PG(k-1, s)$

である．特に $n_{\underline{0}} = 1$ である．すなわち (b) が成立する．

(C) 任意に固定した2つの treatments $\phi(\underline{a})$ と $\phi(\underline{b})$ とが $\underline{\alpha}$-th associate であるとする．このとき $\phi(\underline{a})$ と $\underline{\beta}$-th associates であり，同時に $\phi(\underline{b})$ と $\underline{\gamma}$-th associates である treatments $\phi(\underline{c})$ の個数 $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ は最初に固定した treatments pair に無関係である．

このことは $\phi(\underline{a})$, $\phi(\underline{b})$ を固定したとき

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \underline{a} - \underline{b} = \rho\,\underline{\alpha} \\ \underline{c} - \underline{a} = \rho_1\,\underline{\beta} \\ \underline{c} - \underline{b} = \rho_2\,\underline{\gamma} \end{cases}$$

を同時に満足する解 $\underline{c}$ の個数が $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ であるが，容易に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \in PG(k-1, s)$ のとき

$$(2.4)\qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} = \begin{cases} 1 & ;\ \underline{\beta} \neq \underline{\gamma} \text{ で } \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \text{ が共線，且つ } \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}, \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ s-2 & ;\ \underline{\alpha} = \underline{\beta} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \textit{otherwise} \end{cases}$$

であることが示される．また特に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ のうちいずれかが $\underline{0}$ である場合は

$$(2.5)\qquad p^{\underline{0}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} = \begin{cases} s-1 & ;\ \underline{\beta} = \underline{\gamma} \neq \underline{0} \text{ のとき} \\ 1 & ;\ \underline{\beta} = \underline{\gamma} = \underline{0} \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$(2.6)\qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{0}\underline{\gamma}} = \begin{cases} 1 & ;\ \underline{\alpha} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \textit{otherwise} \end{cases}$$

である．したがって $\underline{\alpha}$-th associate である treatments $\phi(\underline{a})$, $\phi(\underline{b})$ のとり方

に無関係に $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ は一定であるから，(c) が成立することがわかる．

以上のことより v_k 個の treatments $\phi(\underline{a})$，$\underline{a}\in EG(k,s)$ の間に $m=\frac{s^k-1}{s-1}$ (PG(k-1, s)上の点の総数) associate classes の association scheme が導入されたが，これを我々は PG(k-1, s) - association scheme ということにする．特に $k=2$ の場合は，大きさ s の互に直交する適当な $s-1$ 個のラテン方格によつて構成される $r=s+1$ の場合の OL_r - association scheme ($m=s+1$ associate classes) [6] になる．

このように定義された association scheme の行列表現とみなされる association matrices は treatments $\phi(\underline{a})$ に適当に番号をつけて，次の様に定義する．すなわち

$$A_{\underline{\alpha}}=\| a^{\underline{b}}_{\underline{a}\,\underline{\alpha}}\| \tag{2.7}$$

ここに

$$a^{\underline{b}}_{\underline{a}\,\underline{\alpha}}=\begin{cases}1 & ;\quad \phi(\underline{a}) \ \overline{\ \underline{\alpha}\text{-th}\ }\ \phi(\underline{b}) \text{ のとき}\\ 0 & ;\quad \text{otherwise}\end{cases}$$

とする．特に $A_{\underline{0}}=I_{v_k}$ である．

また treatments $\phi(\underline{a})$ に辞引的に番号をつけることにより，$s\times s$ の permutation matrix

$$P=\begin{Vmatrix}0 & & & & 1\\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

を用いて，$A_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha}\in PG(k-1, s)$ は次の様に表わすことが出来る．

$$A_{\underline{\alpha}}=\sum_{\rho\in GF(s),\rho\neq 0} P^{\rho\underline{\alpha}} \tag{2.9}$$

ここに

$$P^{\rho\underline{\alpha}} = \prod_{i=1}^{k} \otimes P^{\rho\alpha_i}, \quad P^{\rho\alpha_i} = \prod_{\ell=1}^{u} \otimes P^{\gamma_i^{(\ell)}}, \quad \rho\alpha_i = \langle \gamma_i^{(1)}, \cdots, \gamma_i^{(u)} \rangle$$

$$\gamma_i^{(\ell)} \in GF(\mathfrak{g}), \quad i = 1, \cdots, k, \quad \ell = 1, \cdots, u.$$

である．

定義から $A_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s)$ はすべて対称行列であって

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1,s)} A_{\underline{\alpha}} = G_{v_k} \\ \displaystyle A_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\beta}} = A_{\underline{\beta}} A_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\gamma} \in \overline{PG}(k-1,s)} p_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}^{\underline{\gamma}} A_{\underline{\gamma}} \end{cases}$$

が成立する．特に (2.4)，(2.5)，(2.6) 式から (2.10) 式は

$$(2.11) \qquad \begin{cases} A_{\underline{0}} A_{\underline{\alpha}} = A_{\underline{\alpha}} A_{\underline{0}} = A_{\underline{\alpha}} & ; \ \underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s) \text{ のとき} \\ A_{\underline{\alpha}}^{\,2} = (s-1) A_{\underline{0}} + (s-2) A_{\underline{\alpha}} & ; \ \underline{\alpha} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \\ \displaystyle A_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\beta}} = A_{\underline{\beta}} A_{\underline{\alpha}} = \sum_{\substack{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha},\underline{\beta}} \\ \underline{\gamma} \neq \underline{\alpha},\underline{\beta}}} A_{\underline{\gamma}} & ; \ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}, \text{ 且つ } \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \end{cases}$$

である．ここに $\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ は $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ が $PG(k-1, s)$ 上で共線であることを意味する．また (2.11) 式から

$$(2.11') \qquad \begin{cases} (A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}})^2 = s(A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}}) & ; \ \underline{\alpha} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \\ \displaystyle (A_{\underline{0}} + A_{\underline{\alpha}})(A_{\underline{0}} + A_{\underline{\beta}}) = A_{\underline{0}} + \sum_{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha},\underline{\beta}}} A_{\underline{\gamma}} & ; \ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}, \text{ 且つ } \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in PG(k-1, s) \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する．

$A_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1, s)$ を生成元とする実数体上のベクトル空間

$[A_{\underline{\alpha}}\,;\,\underline{\alpha}\in\overline{PG}(k-1,s)]$ は (2.11) 式によって実数体上の可換な (*linear associative*) *algebra* をつくる．これを

$$\mathfrak{A}(PG(k-1,s)) = [A_{\underline{\alpha}}\,;\,\underline{\alpha}\in\overline{PG}(k-1,s)]$$

と書くことにする．この *algebra* $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ を <u>$PG(k-1,s)$ - *association algebra*</u> とよぶことにする．対称行列から生成される *algebra* は *completely reducible* であり，代数的閉体上の可換な *algebra* の既約表現は 1 次であるから，$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ は順序を度外視して $\frac{s^k-1}{s-1}+1$ 個の既約な両側 *ideals* の直和として一意的に書き表わされる [2]．これらの *ideals* の *principal idempotents* を $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$ ($\underline{\alpha}\in\overline{PG}(k-1,s)$，特に $A_{\underline{0}}^{\#}=\frac{1}{s^k}G_{s^k}$ とすることができる) とすると，$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ はこれらの *principal idempotents* $A_{\underline{\alpha}}^{\#}\,;\,\underline{\alpha}\in\overline{PG}(k-1,s)$ の *linear closure* として

$$\mathfrak{A}(PG(k-1,s)) = [A_{\underline{\alpha}}^{\#}\,;\,\underline{\alpha}\in\overline{PG}(k-1,s)] = \sum_{\underline{\alpha}\in\overline{PG}(k-1,s)}\oplus\,[A_{\underline{\alpha}}^{\#}]$$

で表わされることが知られている（例えば [5] 参照）．これらの *principal idempotents* $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$ を具体的に求める方法については §4. で述べる．

特に $k=1$ のときは

$$(2.12)\qquad \begin{cases} A_0 = I_s\,, \quad A_1 = G_s - I_s \\ A_0^{\#} = \frac{1}{s}G_s\,, \quad A_1^{\#} = I_s - \frac{1}{s}G_s \\ \mathfrak{A}(PG(0,s)) = [A_0, A_1] = [A_0^{\#}, A_1^{\#}] = [A_0^{\#}]\oplus[A_1^{\#}] \end{cases}$$

が成立する．

<u>§3. s^{k-p} - *fractional factorial association scheme*</u>

$v_k = s^k$個の treatments $\phi(\underline{a})$, $\underline{a} \in EG(k,s)$ において，いま

(3.1) $$F = \| f_{ij} \| \ (p \times k) \quad p < k$$

を rank が p の $GF(s)$ 上の行列とするとき，関係式

(3.2) $$F\underline{x} = \underline{f}\ ,\quad \underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)' \in EG(k,s)\ ,\ \underline{f} = (f_1, \cdots, f_p)' \in EG(p,s)$$

をみたす s^{k-p}個の解 $\underline{x} \in EG(k,s)$ の張る $k-p$ 次元の超平面：

(3.3) $$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} = \{ \underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f}\ ,\ \underline{x} \in EG(k,s) \}$$

を考える．

$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}$ に対応する treatments $\phi(\underline{x})$ のみを実施するものとする．実施した treatments $\phi(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}$ の間の関係を $PG(k-1,s)$ − association scheme によって induce される関係によって定義する．すなわち $\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}, \underline{y}$ に対応する 2つの treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ が $EG(k,s)$ 上で $\underline{x} - \underline{y} = \rho\underline{\alpha}$, $\rho \neq 0$ のとき，$\underline{\alpha}$-th associate であるといい，$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}$ に対応する treatment $\phi(\underline{x})$ はそれ自身の $\underline{0}$-th associate であると定義する．この関係が association scheme の公理をみたすことが次の様にしてわかる．

$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p} \ni \underline{x}, \underline{y}$ に対応する treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ が $EG(k,s)$ 上で

$$\phi(\underline{x}) \ \xrightarrow{\ \underline{\alpha}\text{-th}\ } \ \phi(\underline{y})$$

であるとき，勿論 $F\underline{x} = \underline{f}$，$F\underline{y} = \underline{f}$ であるから，したがって $F(\underline{x} - \underline{y}) = \underline{0}$ である．故に association の関係を標示する $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)'$ は $F\underline{\alpha} = \underline{0}$ をみたすもの全体である．すなわち，この $\underline{\alpha}\ (\neq \underline{0})$ の全体は $PG(k-1,s)$ における $k-1-p$ 次元超平面を形成する．この超平面を

$$\mathcal{P}^{k-1-p} = \{ \underline{\alpha} \mid F\underline{\alpha} = \underline{0}\ ,\ \underline{\alpha} \in PG(k-1,s) \}$$

で表わす．また $\overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} = \mathcal{P}^{k-1-p} \cup \{\underline{0}\}$ とする．

これらの treatments $\phi(\underline{x})$ $(\in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p})$ の間の関係は

(a) 任意の相異なる2つの treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ はいずれかの $\underline{\alpha}$-th ($\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$) associate であって，それに限る．また association の関係は対称的である．特に $\phi(\underline{x})$ はそれ自身の $\underline{0}$-th associate である．

(b) 任意の treatment $\phi(\underline{x})$ $(\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p})$ の $\underline{\alpha}$-th associates であるものの個数 $n_{\underline{\alpha}}$ は

$$
n_{\underline{\alpha}} = \begin{cases} s-1 & ; \ \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 1 & ; \ \underline{\alpha} = \underline{0} \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.4}
$$

である．

(c) 任意の2つの treatments $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ が $\underline{\alpha}$-th associate であるとする．そのとき，$\phi(\underline{x})$ と $\underline{\beta}$-th associates であり，同時に $\phi(\underline{y})$ と $\underline{\gamma}$-th associates ($\underline{\beta}, \underline{\gamma} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$) である treatments $\phi(\underline{z})$ (このとき自動的に $\underline{z} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}$ である) の個数 $p_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}}$ は PG$(k-1, s)$-association scheme の場合と同様に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$ のとき

$$
p_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}} = \begin{cases} 1 & ; \ \underline{\beta} \neq \underline{\gamma}, \ \underline{\alpha} \in \overline{\underline{\beta}, \underline{\gamma}} \text{ 且つ } \underline{\alpha} \neq \underline{\beta}, \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ s-2 & ; \ \underline{\alpha} = \underline{\beta} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.5}
$$

が成立する．特に $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ のうち $\underline{0}$ のものがあるとき

$$
p_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}^{\underline{0}} = \begin{cases} s-1 & ; \ \underline{\beta} = \underline{\gamma} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 1 & ; \ \underline{\beta} = \underline{\gamma} = \underline{0} \text{ のとき} \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.6}
$$

$$(3.7) \qquad p^{\underline{\alpha}}_{\underline{0}\,\underline{\gamma}} = \begin{cases} 1 \ ; & \underline{\alpha} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 \ ; & otherwise \end{cases}$$

が成立する．以上のことから $p^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}$ は最初に選んだ treatments pair $\phi(\underline{x}), \phi(\underline{y})$ の選び方に無関係である．

故にこの treatments $\phi(\underline{x})$ $(\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p})$ の間の association の関係は $\frac{s^{k-p}-1}{s-1}$ associate classes ($\mathcal{P}^{k-1-p}$ の点の総数) の association scheme であることがわかる．この association scheme を PG$(k-1, s)$ − association scheme によって induce された s^{k-p} − fractional factorial association scheme ということにする．以上のことから次の定理を得る．

定理 I. EG(k, s) のある超平面$\mathcal{F} = \{\underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f},\ \underline{x} \in \text{EG}(k, s)\}$ の元に対応する treatments $\phi(\underline{x})$ の間に PG$(k-1, s)$ − association scheme によって induce される関係は association scheme の公理を満足する．

$\mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}$ の点に適当に番号をつけて，s^{k-p} − fractional factorial association scheme の行列表現である association matrices を定義する．すなわち

$$(3.8) \qquad B_{\underline{\alpha}} = \| a^{\underline{y}}_{\underline{x}\,\underline{\alpha}} \| \ ; \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{F}_{\underline{f}}^{k-p}, \quad \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$$

である．定義から $B_{\underline{\alpha}}$ は $v_{k-p} \times v_{k-p}$ の対称行列で，特に $B_{\underline{0}} = I_{v_{k-p}}$ である．また明らかに次の関係式が成立する．

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}} B_{\underline{\alpha}} = G_{v_{k-p}} \\ \displaystyle B_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\beta}} = B_{\underline{\beta}} B_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\gamma} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}} p^{\underline{\gamma}}_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} B_{\underline{\gamma}} \end{cases}$$

また，特に

$$
(3.10)\quad
\begin{cases}
B_{\underline{0}} B_{\underline{\alpha}} = B_{\underline{\alpha}} B_{\underline{0}} = B_{\underline{\alpha}} \ ; \ \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\
B_{\underline{\alpha}}^{2} = (s-1) B_{\underline{0}} + (s-2) B_{\underline{\alpha}} \ ; \ \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\
B_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\beta}} = B_{\underline{\beta}} B_{\underline{\alpha}} = \sum\limits_{\substack{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} \\ \underline{\gamma} \neq \underline{\alpha}, \underline{\beta}}} B_{\underline{\gamma}} \ ; \ \underline{\alpha} \neq \underline{\beta},\ \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき}
\end{cases}
$$

である．また(3.10)式から

$$
(3.10')\quad
\begin{cases}
(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\alpha}})^2 = s(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\alpha}}) \ ; \ \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\
(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\alpha}})(B_{\underline{0}} + B_{\underline{\beta}}) = B_{\underline{0}} + \sum\limits_{\underline{\gamma} \in \overline{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}} B_{\underline{\gamma}} \ ; \ \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p}, \underline{\alpha} \neq \underline{\beta} \text{ のとき}
\end{cases}
$$

が成立する．$B_{\underline{\alpha}}\ ;\ \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$ を生成元とする実数体上のベクトル空間は(3.10)式によって実数体上の可換な *Algebra* をつくる．これを

$$\mathfrak{A}(s^{k-p} - F_r) = [\, B_{\underline{\alpha}}\ ;\ \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \,]$$

で表わし，*s^{k-p} - fractional factorial association algebra* ということにする．$\mathfrak{A}(s^{k-p} - F_r)$ の $\dfrac{s^{k-p}-1}{s-1} + 1$ 個の既約な両側 *ideals* の *principal idempotents* を $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$（特に $B_{\underline{0}}^{\#} = \dfrac{1}{v_{k-p}} G_{v_{k-p}}$ とすることができる）で表わす．これらの *principal idempotents* $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$ を具体的に求める方法については§4.で述べる．

§4. $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の互に直交する *idempotents*

§3.で定義した $p \times k$ 行列 F の p 個の行ベクトルに一次独立な $k-p$ 個の一次独立な行ベクトルからなる行列を $\tilde{F}$ とする．すなわち，$r(F' ; \tilde{F}') = k$ とする．そのとき $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{k-p} - F_r)$ の互に直交する *principal idempotents* $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$ ($\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1,s)$)，および $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$ ($\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$) を求

めるために次の *Lemmas* を述べる．

Lemma 1. $\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})$; $\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)$ は *idempotent* であって $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ を $PG(k-1,s)$ の部分空間とするとき次の関係式が成立する．

$$\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)=\frac{1}{s^{l+1}}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}A_{\underline{\alpha}}\right) \tag{4.1}$$

$$\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)\cdot\prod_{\underline{\beta}\in\mathscr{Q}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\beta}})\right)=\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right) \tag{4.2}$$

ここに，l は部分空間 $\mathscr{P}$ の次元数とする．特に $\mathscr{P}=PG(k-1,s)$ のときは

$$\prod_{\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)=\frac{1}{s^k}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)}A_{\underline{\alpha}}\right)=\frac{1}{s^k}G_{s^k} \tag{4.3}$$

が成立する．

証明 $\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})$; $\underline{\alpha}\in PG(k-1,s)$ が *idempotents* であること，および (4.2) が成立することは (2.11′) 式および可換性から明らかである．したがって (4.1) 式を証明する．部分空間 $\mathscr{P}$ の次元数についての帰納法で証明する．$l=0$ のときは明らかに成立する．$\mathscr{P}$ の次元数が $l-1$ ($l<k$) のとき (4.1) 式が成立したと仮定する．$\mathscr{P}$ に1次独立な点 $\underline{\gamma}\in PG(k-1,s)$ を考えれば (4.2) 式から

$$\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}\cup\{\underline{\gamma}\}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)=\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)\cdot\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\gamma}})$$

が成立する．帰納法の仮定から右辺の式は (2.11) 式を使うことにより

$$\frac{1}{s^l}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}A_{\underline{\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\gamma}})=\frac{1}{s^{l+1}}\left(A_{\underline{0}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}\cup\{\underline{\gamma}\}}A_{\underline{\alpha}}\right)$$

が成立する．故に$\mathscr{P}$の次元数がlのときに(4.1)が成立する．

Lemma 2. PG(k-1, s)の部分空間$\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$について次のことがらが成立する．

(i) $\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$ は idempotent である

(ii) $\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$ と $\prod_{\underline{\beta}\in\mathscr{Q}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\beta}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$ とが互に直交するための必要十分条件は $\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}=PG(k-1, s)$ であることである．

証明 Lemma 1. から明らかである．

次の Lemma も，Lemma 1. を用いて証明できる．

Lemma 3. PG(k-1, s) の k−2次元の部分空間$\mathscr{P}$に対して

$$A_{\mathscr{P}}^{\#}=\prod_{\underline{\alpha}\in\mathscr{P}}\left(\frac{1}{s}(A_{\underline{0}}+A_{\underline{\alpha}})\right)-\frac{1}{s^k}G_{s^k}$$

とするとき$[A_{\mathscr{P}}^{\#}]$ は $\mathfrak{A}(PG(k-1, s))$ の既約な両側 ideal であり，その principal idempotent は $A_{\mathscr{P}}^{\#}$ である．また

$$I_{s^k}=A_{\underline{0}}^{\#}+\sum_{(\mathscr{P})}A_{\mathscr{P}}^{\#}\quad;\quad A_{\underline{0}}^{\#}=\frac{1}{s^k}G_{s^k}$$

は $\mathfrak{A}(PG(k-1, s))$に応ずる単位元I_{s^k}の互に直交する idempotents の分解を与える．ここに和$\sum_{(\mathscr{P})}$ は PG(k-1, s) のすべての k−2 次元部分空間$\mathscr{P}$についての総和を意味する．

PG(k-1, s) の k−2 次元部分空間$\mathscr{P}$は，適当な点$\underline{\alpha}\in PG(k-1, s)$ をとって

$$\mathscr{P}=\{\underline{\xi}\mid\underline{\xi}'\underline{\alpha}=0\ ,\ \underline{\xi}\in PG(k-1, s)\}\equiv(\underline{\alpha})$$

で表わすことができるから，Lemma1, 3. を用いて $\mathfrak{A}(PG(k-1, s))$ の互に直交する principal idempotents は

$$
(4.4)\quad
\begin{cases}
A^{\#}_{\underline{\alpha}} \ (\equiv A^{\#}_{(\underline{\alpha})}) = \dfrac{1}{s^{k-1}} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\rho}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\rho}\in\overline{PG}(k-1,s)}} A_{\underline{\rho}} - \dfrac{1}{s^k} G_{s^k} \ ; \ \underline{\alpha}\in PG(k-1,s) \text{ のとき} \\[2ex]
\qquad = \dfrac{1}{s^k}\Big\{ (s-1) \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\rho}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\rho}\in\overline{PG}(k-1,s)}} A_{\underline{\rho}} - \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\rho}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{\rho}\in PG(k-1,s)}} A_{\underline{\rho}} \Big\} \\[2ex]
A^{\#}_{\underline{0}} = \dfrac{1}{s^k} G_{s^k}
\end{cases}
$$

で与えられる．また $\mathfrak{O}(s^{k-p}-F_r)$ の場合についても Lemmas 1, 2, 3 と同様な Lemmas が成立するから，$\mathfrak{O}(s^{k-p}-F_r)$ の互に直交する *principal idempotents* は

$$
(4.5)\quad
\begin{cases}
B^{\#}_{\underline{\alpha}} = \dfrac{1}{s^{k-1-p}} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\rho}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\rho}\in\overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}}} B_{\underline{\rho}} - \dfrac{1}{s^{k-p}} G_{s^{k-p}} \ ; \ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\[2ex]
\qquad = \dfrac{1}{s^{k-p}}\Big\{ (s-1) \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\rho}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\rho}\in\overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}}} B_{\underline{\rho}} - \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\rho}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{\rho}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} B_{\underline{\rho}} \Big\} \\[2ex]
B^{\#}_{\underline{0}} = \dfrac{1}{s^{k-p}} G_{s^{k-p}}
\end{cases}
$$

で与えられることがわかる． *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$, $B^{\#}_{\underline{\alpha}}$ の *rank* はそれぞれ

$$
(4.6)\quad r(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} s-1 \ ; & \underline{\alpha}\in PG(k-1,s) \text{ のとき} \\ 1 \ ; & \underline{\alpha}=\underline{0} \text{ のとき} \end{cases}
$$

$$
(4.7)\quad r(B^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} s-1 \ ; & \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\ 1 \ ; & \underline{\alpha}=\underline{0} \text{ のとき} \end{cases}
$$

である．また $A_{\underline{\alpha}} = \displaystyle\sum_{\underline{\beta}\in\overline{PG}(k-1,s)} z_{\underline{\beta}\underline{\alpha}} A^{\#}_{\underline{\beta}}$ ， $A^{\#}_{\underline{\alpha}} = \displaystyle\sum_{\underline{\beta}\in\overline{PG}(k-1,s)} z^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} A_{\underline{\beta}}$ とすれば

$$
z^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = r_{\underline{\alpha}}\, z_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} / (v_k\, n_{\underline{\beta}}) \quad ; \quad r_{\underline{\alpha}} = r(A^{\#}_{\underline{\alpha}})
$$

であるから，(4.4)式を $A_{\underline{\alpha}}$ について解けば

(4.8)
$$\begin{cases} A_{\underline{\alpha}} = (s-1)\displaystyle\sum_{\substack{f'\alpha=0 \\ f\in\overline{PG}(k-1,s)}} A_f^{\#} - \sum_{\substack{f'\alpha\neq 0 \\ f\in PG(k-1,s)}} A_f^{\#} \quad ; \ \underline{\alpha}\in PG(k-1,s) \text{ のとき} \\ A_{\underline{0}} = \displaystyle\sum_{f\in\overline{PG}(k-1,s)} A_f^{\#} \end{cases}$$

が得られる．同様に(4.5)式を $B_{\underline{\alpha}}$ について解けば

(4.9)
$$\begin{cases} B_{\underline{\alpha}} = (s-1)\displaystyle\sum_{\substack{f'\alpha=0 \\ f\in\overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')}} B_f^{\#} - \sum_{\substack{f'\alpha\neq 0 \\ f\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} B_f^{\#} \ ; \ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ B_{\underline{0}} = \displaystyle\sum_{f\in\overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')} B_f^{\#} \end{cases}$$

が得られる．

§5. $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ と $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の間の関係

$\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ および $\mathfrak{A}(s^{k-p}-F_r)$ の幾何学的意味を考えて，我々は実数体上の v_k 次元 Euclid 空間から v_{k-p} 次元 Euclid 空間への線型写像 σ を与える operator Φ を次の様に定義する．

(5.1) $\quad \Phi\,(\equiv\Phi(F;f)) = \|\varphi_{\underline{x}\,\underline{a}}\|\ (s^{k-p}\times s^k)\ ,\ \underline{x}\in\mathcal{F}_f^{k-p},\ \underline{a}\in EG(k,s)$

ここに

$$\varphi_{\underline{x}\,\underline{a}} = \begin{cases} 1 \ ; & \underline{x}=\underline{a} \text{ のとき} \\ 0 \ ; & \underline{x}\neq\underline{a} \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．Φ による $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ の線型写像：

$$\sigma:\ A \longrightarrow \Phi A \Phi' \quad (A\in\mathfrak{A}(PG(k-1,s)))$$

を考える．$\Phi A_{\underline{\alpha}} \Phi'$ は明らかに

(5.2) $$\Phi A_{\underline{\alpha}} \Phi' = \begin{cases} B_{\underline{\alpha}} & ; \quad \underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 0 & ; \quad \textit{otherwise} \end{cases}$$

である．(4.4)式および(4.5)式から

(5.3) $$\Phi A^{\#}_{\underline{\alpha}} \Phi' = \begin{cases} \dfrac{1}{s^p} B^{\#}_{\underline{\alpha}} & ; \quad \underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\ \dfrac{s-1}{s^p} B^{\#}_{\underline{0}} & ; \quad \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(F') \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する．

係数 $\frac{1}{s^p}$，$\frac{s-1}{s^p}$ を度外視して(5.3)式を満す，Φ によって定義される $\mathfrak{A}(PG(k-1,s))$ の線型写像 σ を<u>一部(実施)相似写像(*fractionally similar mapping*)</u>ということにする．

任意の $\underline{\alpha} \in \overline{PG}(k-1,s)$ に対して

$$\underline{\alpha} = \xi \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2 \quad (\underline{\alpha}_1 \in \mathcal{P}(\tilde{F}'),\ \underline{\alpha}_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F'),\ \xi \in GF(s))$$

として一意的に書き表わされるから，簡単な計算で，$\underline{\alpha} \neq \underline{0}$ のとき

(5.4) $$\Phi A^{\#}_{\underline{\alpha}} \Phi' = \begin{cases} \dfrac{1}{s^p} B^{\#}_{\underline{\alpha}_1} & ; \quad \xi \neq 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{s-1}{s^p} B^{\#}_{\underline{0}} & ; \quad \xi = 0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \underline{\alpha} = \xi \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2$$

であることがわかる．以上のことより線型写像 τ：

(5.5) $$\tau(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} \dfrac{s^p}{s-1} \sigma(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) & ; \quad \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(F') \text{ のとき} \\ s^p \sigma(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) & ; \quad \textit{otherwise} \end{cases}$$

と定義すれば

(5.6) $$\tau(A^{\#}_{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} B^{\#}_{\underline{\alpha}_1} ; & \underline{\alpha} = \xi \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2,\ \underline{\alpha}_1 \in \mathcal{P}(\tilde{F}'),\ \underline{\alpha}_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F'),\ \xi \neq 0 \text{ のとき} \\ B^{\#}_{\underline{0}} ; & \underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}(F') \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する．

以上のことより次の定理を得る.

定理Ⅱ. (5.5)式によって定義される $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(PG(k-1,s))$ から $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(s^{k-p}-F_r)$ への線型写像では(5.6)式によって, $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(PG(k-1,s))$ の $\frac{s^p-1}{s-1}+1$ 個の idempotents $A^{\#}_{\underline{\alpha}_2}$; $\underline{\alpha}_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F')$ が $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(s^{k-p}-F_r)$ の同一の idempotent $B^{\#}_{\underline{0}}$ に対応し, s^p 個の idempotents $A^{\#}_{\xi\underline{\alpha}_1+\underline{\alpha}_2}$; $\underline{\alpha}_1 \in \mathcal{P}(\tilde{F}')$, $\underline{\alpha}_1$固定, $\xi \neq 0$, $\underline{\alpha}_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F')$, が $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(s^{k-p}-F_r)$ の同一の idempotent $B^{\#}_{\underline{\alpha}_1}$ に対応する.

§6. Block design と Relationship algebra

s^k 個の treatments $\phi(\underline{a})$, $\underline{a} \in EG(k,s)$ のどの treatments を実施するかを指定するために用いた $GF(s)$ 上の行列 $F(p\times k)$,および実施した treatments $\phi(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{F}^{k-p}_{\underline{f}}$, をどのように blocks に配置するかの仕方を指定するために r 個の $GF(s)$ 上の $\ell\times k$ 行列 B_i ; $i=1,\cdots,r$ を導入する. ここに F, B_i ; $i=1,\cdots,r$ は次の条件をみたすものとする.

(6.1) $\qquad r(F';B_1';\cdots;B_r') = p + r\ell \leq k$

$EG(k,s)$ 上の $k-p-\ell$ 次元超平面:

(6.2) $\qquad \mathcal{B}_{i\underline{u}} = \{\underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f},\ B_i\underline{x} = \underline{u}\}$, $\underline{u} \in EG(\ell,s)$

を考える. 明らかに $\mathcal{B}_{i\underline{u}}$ の点の個数 κ は

$$\kappa = s^{k-p-\ell}$$

である.

$\mathcal{B}_{i\underline{u}} \ni \underline{x}$ に対応する treatments $\phi(\underline{x})$ によって block $\phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}})$

(6.3) $\qquad \phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}}) = \{\phi(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathcal{B}_{i\underline{u}}\}$

を構成する．

このように $v = s^{k-p}$ 個の *treatments* を rs^l 個の *blocks* $\phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}})$, $i = 1, \cdots, r$, $\underline{u} \in EG(l, s)$ に配置するときの *design* の *incidence matrix* を N で表わす．すなわち

(6.4) $$N = \| n_{\underline{x}, i\underline{u}} \| \quad (s^{k-p} \times rs^l)$$

である．ここに

$$n_{\underline{x}, i\underline{u}} = \begin{cases} 1 & ; \ \underline{x} \in \mathcal{B}_{i\underline{u}} \text{ のとき} \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．N は $v \times b$ 行列 ($v = s^{k-p}$, $b = rs^l$) であって，*block* の大きさ，および反復数はそれぞれ $k = s^{k-p-l}$, r であることがわかる．

いま $B_i \underline{\alpha} = \underline{0}$, $\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$ をみたす i を $i = i_1, \cdots, i_{\lambda_{\underline{\alpha}}}$ とし，$i \neq i_1, \cdots, i_{\lambda_{\underline{\alpha}}}$ に対しては $B_i \underline{\alpha} \neq \underline{0}$ とする．$\lambda_{\underline{\alpha}}$ は明らかに $\underline{\alpha}$ だけに関係する．すなわち互に $\underline{\alpha}$-*th associate* である2つの *treatments* $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ の会合数は $\lambda_{\underline{\alpha}}$ であることが容易にわかるが，会合数 $\lambda_{\underline{\alpha}}$ は互に $\underline{\alpha}$-*th associate* である *treatments* $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ の選び方に無関係である．よってこの *design* は s^{k-p} - *fractional factorial association scheme* を有する PBIB *design* (*Partially balanced incomplete block design*) である．したがって，行列 N について次の関係式が成立する．

(6.5) $$NN' = rB_{\underline{0}} + \sum_{\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}} \lambda_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\alpha}}$$

また $\mathfrak{A}(s^{k-p} - F_r)$ の互に直交する *idempotents* $B^{\#}_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}(\hat{F}')$ を用いて

(6.6) $$NN' = \sum_{\underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}(\hat{F}')} \mu_{\underline{\alpha}} B^{\#}_{\underline{\alpha}}$$

と表わされる．ここに

$$(6.7)\quad \begin{cases} \mu_{\underline{0}} = rk = r + (s-1)\displaystyle\sum_{\underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}} \lambda_{\underline{\beta}} \\ \mu_{\underline{\alpha}} = r + (s-1)\displaystyle\sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}} - \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}\neq 0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}}\ ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')\ \text{のとき} \end{cases}$$

である．NN' が *positive semi definite* であることおよび(6.7) 式から既知の不等式：

$$(6.8)\qquad 0 \leqq \mu_{\underline{\alpha}} \leqq rk \quad ;\ \underline{\alpha}\in\bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$$

が成立する．(6.7) 式よりまた

$$(6.9)\qquad \mu_{\underline{\alpha}} = s\sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta}\in\mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}} - r\,\frac{k-s}{s-1} \quad ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')$$

と書くことができる．$B_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')$ に対応する *treatment contrast* の *confounding coefficient* $c_{\underline{\alpha}}$ は

$$(6.10)\qquad c_{\underline{\alpha}} = \frac{1}{rk}\,\mu_{\underline{\alpha}} \quad ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')$$

である[5]．

$n\,(= rv = bk = rs^{k-p})$ 個の *plots* に適当に番号をつけて次の *incidence matrices* を定義する．

(a) *treatment* : $\Phi_T = \|\varphi^T_{f\underline{x}}\|\ (n\times v)$

(b) *block* : $\Phi_B = \|\varphi^B_{f,i\underline{u}}\|\ (n\times b)$

ここに

$$\varphi^T_{f\underline{x}} = \begin{cases} 1 \ ;\ \text{plots } f \text{ に treatment } \phi(\underline{x}) \text{ が施されるとき} \\ 0 \ ;\ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi^{B}_{f,i\underline{u}} = \begin{cases} 1 \,;\ \text{plot } f \text{ が block } \phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}}) \text{ に含まれるとき} \\ 0 \,;\ \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．そのとき design の incidence matrix N について，$N = \Phi_T' \Phi_B$ が成立する．Treatments $\phi(\underline{x})$; $\underline{x} \in \mathcal{F}_{\underline{t}}^{k-p}$ の間に定義された association scheme の行列表現としての association matrices を導入したと同じように，plots の間の relationship の行列表現とみなされる relationship matrices を定義する[2]．

(c) identity : I_n (d) universal : G_n (e) block : $V = \Phi_B \Phi_B' = \| b_{fg} \|$

(f) treatments : $T_{\underline{\alpha}} = \Phi_T B_{\underline{\alpha}} \Phi_T' = \| t_{fg}^{\underline{\alpha}} \|$; $\underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p}$

ここに

$$b_{fg} = \begin{cases} 1 \,;\ \text{plots } f \text{ と } g \text{ が同じ block に含まれるとき} \\ 0 \,;\ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$t_{fg}^{\underline{\alpha}} = \begin{cases} 1 \,;\ \text{plots } f \text{ と } g \text{ が互に } \underline{\alpha}\text{-th associate である treatment を受けるとき} \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

である．Treatment relationship matrices $T_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p}$ のかわりに $\mathcal{O}(s^{k-p} - F_r)$ の互に直交する principal idempotents $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$ に対応する matrices

(6.11) $$T_{\underline{\alpha}}^{\#} = \Phi_T B_{\underline{\alpha}}^{\#} \Phi_T' \ ; \ \underline{\alpha} \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$$

を定義すると便利である．

Relationship matrices I_n, G_n, V, $T_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$ を生成元とする実数体上の algebra :

$$\mathcal{R} = \{ I_n, G_n, V, T_{\underline{\alpha}} ; \underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p} \}$$

は我々の PBIB design の relationship algebra とよばれている[2].

$\mathcal{R}$は対称行列によって生成される algebra であるから, completely reducible である. したがって$\mathcal{R}$は既約な両側 ideals の直和として表わされる. この既約成分の種類は NN' の固有値μ_α の値に応じて3通りの場合, すなわち $\mu_\alpha=0$, $0<\mu_\alpha<rk$, $\mu_\alpha=rk$ に分類されることは既知であるから結果のみを記すことにする[5].

Case 1. $\mu_\alpha=0$ のときは $\frac{1}{r}T_\alpha^{\#}$ は $\mathcal{R}$ の1次元の両側 ideal の principal idempotent で, $B_\alpha^{\#}$ に対応する treatment contrast は block に orthogonal である.

Case 2. $0<\mu_\alpha<rk$ のときは$[T_\alpha^{\#}, VT_\alpha^{\#}, T_\alpha^{\#}V, VT_\alpha^{\#}V]$は$\mathcal{R}$ の4次元の両側 ideal であって, complete 2×2 matric algebra に同型である. その principal idempotent は

(6.12) $$E_\alpha^{\#(2)}=\frac{1}{rk-\mu_\alpha}\left(kT_\alpha^{\#}-VT_\alpha^{\#}-T_\alpha^{\#}V+\frac{r}{\mu_\alpha}VT_\alpha^{\#}V\right)$$

である. またこのとき $B_\alpha^{\#}$ に対応する treatment contrast は block に partially confounded であり, その confounding coefficient は C_αである. 更に block effect を消した $B_\alpha^{\#}$ に対応する treatment contrast を与える idempotent は

(6.13) $$F_\alpha^{\#}=\frac{k}{rk-\mu_\alpha}\left(I_n-\frac{1}{k}V\right)T_\alpha^{\#}\left(I_n-\frac{1}{k}V\right)$$

である. また treatments を無視した block contrast を与える idempotent は

(6.14) $$H_\alpha^{\#}=\frac{1}{k\mu_\alpha}VT_\alpha^{\#}V$$

である.

Case 3. $\mu_{\underline{\alpha}} = rk$ のとき，$\frac{1}{r}T^{\#}_{\underline{\alpha}}$ は $\mathcal{R}$ の1次元の両側 ideal の principal idempotent で $B^{\#}_{\underline{\alpha}}$ に対応する treatment contrast は block に totally confounded である．

以上のことより我々は既約成分の分類をするために次の Lemma は有用である．

<u>Lemma 4.</u> $\mu_{\underline{\alpha}}$; $\underline{\alpha} \in \mathcal{P}(F')$ について次の同値関係が成立する．

(i) $\mu_{\underline{\alpha}} = 0 \iff \underline{\alpha} \notin \mathcal{P}(B'_i)$; $i = 1, 2, \cdots, r$

(ii) $0 < \mu_{\underline{\alpha}} < rk \iff \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(B'_i)$ となる B_i がある．但し $r \geq 2$ のとき

(iii) $\mu_{\underline{\alpha}} = rk \iff \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(B'_1)$，但し，$r = 1$ のとき

したがって $r = 1$ の場合は partially confounded part が存在しない．また $r \geq 2$ の場合には totally confounded part が存在しないことがわかる．$k = p + r\ell$ のときは orthogonal part が存在しない．(ii) の場合はさらに $\mu_{\underline{\alpha}} = k$ であることがわかる．

<u>証明</u> (6.9)式からわかるように $\sum\limits_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}}$ の値をしらべればよい．$\lambda_{\underline{\beta}}$ の定義から

$$(6.15) \qquad (s-1) \sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\underline{\beta}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\underline{u} \in EG(\ell, s)} n_{\underline{x}, i\underline{u}} \sum_{\substack{\rho \in GF(s) \\ \rho \neq 0}} \sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} n_{\underline{x}+\rho\underline{\beta}, i\underline{u}}$$

である．(6.15)式の右辺において $n_{\underline{x}, i\underline{u}} = 1$ のところのみをしらべればよい．このとき $B_i \underline{x} = \underline{u}$ であるから

$$(6.16) \qquad \sum_{\substack{\underline{\beta}'\underline{\alpha}=0 \\ \underline{\beta} \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} n_{\underline{x}+\rho\underline{\beta}, i\underline{u}} = \begin{cases} \dfrac{s^{k-p-\ell}-1}{s-1} & ; \underline{\alpha} \in \mathcal{P}(B'_i) \text{ のとき} \\[2ex] \dfrac{s^{k-p-\ell-1}-1}{s-1} & ; \underline{\alpha} \notin \mathcal{P}(B'_i) \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する．したがって(6.15)，(6.16)式から

$$(6.17)\qquad (s-1)\sum_{\substack{\beta'\underline{\alpha}=0\\ \beta\in\mathcal{P}^{k-1-p}}}\lambda_{\beta}=\begin{cases} r(s^{k-p-\ell-1}-1)\ ;\ \underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i')\ ;\ i=1,\cdots,r\ \text{のとき}\\[2ex] r(s^{k-p-\ell-1}-1)+s^{k-p-\ell-1}(s-1)\ ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')\ \text{となる}\ i\ \text{があるとき}\end{cases}$$

であることがわかる．(6.9)，(6.17)式から Lemma 4. が成立することがわかる．

また Lemma 4. の (i) を使うことにより

$$b-v+\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} r_{\underline{\alpha}}=r-1\quad ;\quad r(B^{\#}_{\underline{\alpha}})=r_{\underline{\alpha}}$$

であるから，一般化された Fisher の不等式

$$(6.18)\qquad b\geq v-\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}} r_{\underline{\alpha}}$$

が成立する．等号が成立するのは $r=1$ の場合に限る．

以上のことより relationship に対応する $\mathcal{R}$ の単位元 I_n の分解が次の様に一意的に表わされる[5]．

$r=1$ の場合：

$$(6.19)\qquad I_n=\frac{1}{n}G_n+\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_1')\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}}T^{\#}_{\underline{\alpha}}+\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_1')}T^{\#}_{\underline{\alpha}}$$

である．

$r\geqq 2$ の場合：

$$(6.20)\qquad I_n=\frac{1}{n}G_n+E_B+E_e+\frac{1}{r}\sum_{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),\, i=1,\cdots,r,\, \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\tilde{F}')}T^{\#}_{\alpha}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')}E^{\#(2)}_{\underline{\alpha}}$$

ここに

$$(6.21)\quad \begin{cases} E_B = \frac{1}{k}V - \frac{1}{n}G_n - \sum_{i=1}^{r}\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')} H_{\underline{\alpha}}^{\#} \\ E_e = I_n - \frac{1}{k}V - \frac{1}{r}\sum_{\substack{\underline{\alpha}\notin\mathcal{P}(B_i'),i=1,\cdots,r \\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(\widetilde{F}')}} T_{\underline{\alpha}}^{\#} - \sum_{i=1}^{r}\sum_{\underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i')} F_{\underline{\alpha}}^{\#} \end{cases}$$

である．*idempotents* E_B および E_e の *rank* は

$$(6.22)\quad \begin{cases} r(E_B) = r-1>0 \\ r(E_e) = (r-1)s^{k-p} - rs^{\ell} + 1 > 0 \end{cases}$$

で与えられる．$E_{\underline{\alpha}}^{\#(2)}$ の１次元への分解は一意的ではないが *block* に直交する部分と含まれる部分に

$$E_{\underline{\alpha}}^{\#(2)} = F_{\underline{\alpha}}^{\#} + H_{\underline{\alpha}}^{\#}\ ;\ \underline{\alpha}\in\mathcal{P}(B_i'),\ i=1,\cdots,r\ (r\geq 2)$$

分解される．

§7. *aliases pattern* と *pseudo - block idempotents*

(3.1)式を規定する行列 F' の列ベクトルの生成する $\overline{PG}(k-1,s)$ の $p-1$ 次元部分空間を便宜的に

$$(7.1)\quad \mathcal{P}_{\underline{0}}(F') = \overline{\mathcal{P}}(F')$$

で表わすことにする．$\overline{PG}(k-1,s)\ni\underline{\alpha},\underline{\beta}$ に対して，もし $\underline{\alpha}-\underline{\beta}\in\mathcal{P}_{\underline{0}}(F')$ のとき，$\underline{\alpha}$ と $\underline{\beta}$ とは同値であるといつて，$\underline{\alpha}\equiv\underline{\beta}\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}_{\underline{0}}(F'))$ と書くことにする．明らかにこの関係は同値律をみたす．$\overline{PG}(k-1,s)$ をこの同値関係によって互に同値であるものからなる類：

$$(7.2)\quad \overline{PG}(k-1,s)/\mathcal{P}_{\underline{0}}(F') = \{\mathcal{P}_{\underline{\alpha}}(F')\mid \underline{\alpha}\in\overline{\mathcal{P}}(\widetilde{F}')\}$$

に分割する．ここに $\mathscr{P}_{\underline{\alpha}}(F')=\{\underline{\beta} \mid \underline{\beta}\equiv\underline{\alpha}\ (\mathrm{mod}\ \mathscr{P}_{\underline{0}}(F'))\}$ とする．

$\overline{PG}(k-1,s)\ni\underline{\alpha},\underline{\beta}$ に対応する *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$，$A^{\#}_{\underline{\beta}}$ が，もし $\underline{\alpha}\equiv\underline{\beta}$ $(\mathrm{mod}\ \mathscr{P}_{\underline{0}}(F'))$ であるとき，互に別名(*alias*)[1]であると定義する．この別名関係を $A^{\#}_{\underline{\alpha}}\sim A^{\#}_{\beta}\ (\mathscr{P}_{\underline{0}}(F'))$ で表わす．$\overline{PG}(k-1,s)\ni\underline{\alpha}$ に対応する *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$ の全体の集合：

(7.3) $$A^{\#}(\overline{PG}(k-1,s))=\{A^{\#}_{\underline{\alpha}}\mid\underline{\alpha}\in\overline{PG}(k-1,s)\}$$

をこの別名関係にある *idempotents* よりなる類：

(7.4) $$A^{\#}(\mathscr{P}_{\underline{\beta}}(F'))=\{A^{\#}_{\underline{\alpha}}\mid\underline{\alpha}\in\mathscr{P}_{\underline{\beta}}(F')\}\ ;\ \underline{\beta}\in\overline{\mathscr{P}}(\tilde{F}')$$

に分割される．すなわち

(7.5) $$A^{\#}(\overline{PG}(k-1,s))=\bigcup_{\underline{\beta}\in\overline{\mathscr{P}}(\tilde{F}')}A^{\#}(\mathscr{P}_{\underline{\beta}}(F'))$$

である．(7.5) 式を (3.1) 式によって決定される $A^{\#}(\overline{PG}(k-1,s))$ の <u>*aliases pattern*</u> ということにする．

定理Ⅱから互に別名関係にある *idempotents* は (5.5) 式によって定義される線型写像 τ によって $\mathfrak{A}(s^{k-r}-F_r)$ の同一の *idempotent* に対応する．

§6 で実施した *treatments* をどのように *blocks* に配置するかの仕方を指定するために用いた r 個の $l\times k$ 行列 B_i；$i=1,\cdots,r$ に対して，$\mathscr{P}(F';B_i')\ni\underline{\alpha}$ に対応する *idempotents* $A^{\#}_{\underline{\alpha}}$ の集合：

(7.6) $$A^{\#}(\mathscr{P}(F';B_i'))=\{A^{\#}_{\underline{\alpha}}\mid\underline{\alpha}\in\mathscr{P}(F';B_i')\}$$

の元を (6.3) 式で定義した *blocks* の族 $\phi(\mathscr{B}_{i\underline{u}})$；$\underline{u}\in EG(l,s)$ (i：固定) に付随した <u>*pseudo-block idempotents*</u> ということにする．

(5.6) 式から

$$\tau(A^{\#}(\mathcal{P}(F'; B_i'))=\{B_{\underline{\alpha}}^{\#} \mid \underline{\alpha}\in\bar{\mathcal{P}}(B_i')\}$$

であることがわかる。§6. から $r=1$ の場合は，pseudo-block idempotent に対応する treatments contrast は block に totally confounded であり，$r\geqq 2$ の場合は $B_{\underline{0}}^{\#}$ に対応する treatment contrast を除いて partially confounded で，その confounding coefficient は $\frac{1}{r}$ であることがわかる。また pseudo-block idempotent でない idempotents $A_{\underline{\alpha}}^{\#}$ に対応する treatment contrast は block に orthogonal である。

最後に，広島大学理学部教授 山本 純恭 先生よりいただいたいろいろな御批判にたいして深く感謝します。

参考文献

[1] Box, G.E.P. and Hunter, J.S. (1961) The 2^{k-p}-fractional factorial designs. Part Iand II, Technometrics Vol. 3, No. 3, 311-351. Vol. 3, No. 4, 449-458.

[2] Ogawa, J. (1959) The theory of the association algebra and the relationship algebra of a partially balanced incomplete block design. Inst. Statist. mimeo. Ser. 224 Chapel Hill, N.C.

[3] Weyl, H. (1939) The classical groups their invariants and representations. Lond. Princeton Univ. Pres.

[4] Yamamoto, S. (1964) Some aspects for the composition of relationship algebras of experimental designs. j. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 28, 167-197.

[5] Yamamoto, S. and Fujii, Y. (1963) Analysis of partially balanced incomplete block designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 27, 119-135.

[6] Yamamoto, S., Fujii, Y. and Hamada, N. (1965) Composition of some series of association algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 29, 181-215.