数理解析研究所講究録
第 25 巻 1967 年 192-211

直交表による Fractional Factorial Design のわりつけ

農業技研　奥野忠一

1. Fractional factorial design の有用性

多くの因子を取扱かう実験においては，農業においても工業においても，それらの因子の水準のすべての組合せを実験するところの要因計画 factorial design が有効であることは，現在ではよく知られている．この計画では，それらの因子の間に交互作用 interaction が存在するときには，これを的確に評価することができるし，また，交互作用を無視できるときには，各因子の主効果の推定の精度が他のいかなる計画よりも高い．しかしながら，要因計画を採用すると，実験しなければならぬ処理組合せ treatment combinations の数が非常に多くなって，実施困難なことがしばしば起こる．たとえば，２水準の因子が８ケあるときには，処理組合せの数は $2^8=256$，３水準の因子が５つあれば，$3^5=243$ となる．通常，実験できる処理区数は100 以下であることが多いから，この例で，2^8 の 1/4 実施，すなわち 64 区，あるいは，3^5 の 1/3 実施，すなわち 81 区の実験を組むことがある．これらは「一部実施法」fractional factorial design とよばれる．このような一部実施法を採用すると，あるていどの情報のロスは避けられないけれども，重要な情報は確保し，それほど重要でない情報はぎせいにしようと

するのが，この方法の特徴である．

一部実施法が最近とくに注目を受け，応用分野が広がっているのは，電子計算機の急速な発展と普及に依る．この実験結果の統計解析を手計算で行なうのは，あまりにも煩雑であって，その正確さを保証しがたい．しかし，これを電子計算機に委ねれば，立ちどころに解が得られるからである．

2. Fractional factorial design の構成

要因計画は 古く，R. A. Fisher, F. Yates[1] によって考案され，その利点も詳細に検討されているが，一部実施法は，1945〜6年に同じく英国の D. J. Finney[2][3] によって導入されたのがはじめてである．その後，米国標準局では 各方面の要望に答えて，２水準系および３水準系の一部実施法のわりつけ表を，多くの学者の協力によって作成し公刊した（1957，'59）.[4,5] すなわち，2^n系では，M. Zelen の指導の下に，$n=5(1)16$ 因子について 1/2，1/4，1/8，1/16，1/32実施を W.H. Clatworthy, W.S. Connor, Loha S. Deming が，また，1/64，1/128，1/256 実施を R.C. Burton，F.L. Miller Jr., H.N. Pettigrew が作成し，全部で135ケの計画が84頁に収載されている．３水準系もほぼ同じメンバーが参加して $n=4(1)10$ 因子について 1/3，1/9，1/27，1/81，1/243 実施を37頁の表に与えている．これらの表には 次の欠陥が認められる：

①多くの人が分担したので，得られた各計画の間に統一がない．（とくに，一部実施を生成する「定義対比」definition identity に一貫性がない．）

②何分の１実施という規準でグルーピングしているので，一定の規模の実験でいくつの因子を比較できるかが明らかでない．

③実験単位を何段階かに分割する「分割区法」*split-plot design* を採用するときの考慮が示されていない.

④「定義対比」や「別名関係」をじゅうぶんに理解していない人には使いこなせない.

⑤全体が *trial and error* で構成されているため, ここに収録されている計画が それぞれの条件下で *best* であるという保証がない.

一方, 多因子を取扱かう実験計画の源流には Plackett & Burman[6] にはじまる秤量問題 *weighing problem* がある. この流れは種々の型の「直交表」*orthogonal arrays* を生み, わが国工業界では, とくに独自の利用方法が開発されている. しかし 後に述べるように, 筆者はこの方向に必ずしも満足していない.

ここでの研究は2部に分れ, 前半では, 米国標準局N.B.S.のぼう大なわりつけ表を, 「直交表」を用いて見通しの良いものにするとともに, そこで与えられている計画よりさらに有効なものをいくつか見出し, かつ 次の3つの長所をそなえたわりつけ表を作成した.

(i)各因子を 直交表のそれぞれ適当な列にわりつけることによって, 必要な処理組合せを容易に書きおろせるようにすること.

(ii)わりつけた主効果や交互作用と別名になる要因を, 定義対比を顧慮することなく, 直交表の列「基本表示」から容易に見出せるようにすること.

(iii)分割区法や多水準のブロックの導入も, 列の「群番号」(直交表に記載)を参照することによって容易にできること.

この研究の後半では 直交表の利用に際して 通常採用されている「線

点図法」よりも有効なわりつけをいくつか見出した．この前・後半をそれぞれ，66年3月と12月のシンポジウムで報告した．

3．わりつけの原則

一部実施法の，農業実験・工業実験への適用を通じて，次の原則に従うのが最も妥当であると筆者は考える：

①3因子以上の交互作用は無視する．——したがって，作成したわりつけ表には，主効果と2因子交互作用だけをわりつける．しかし，もし必要があれば，各列の「基本表示」を用いて，若干個の3因子交互作用の現われる「列」を求めることができる．

②各主効果は必ず単独で1つの列にわりつけ，どの2因子交互作用とも交絡しないようにする．——この意味で，主効果はすべて「推定可能」estimableであるという．

③以上の条件の下で，2因子交互作用のうち「推定可能」なものの数を最大にする．——ここで，ある2因子交互作用が「推定可能」であるというのは，それが単独で1つの列を占め，他のどの交互作用とも交絡しないことをいう．

④いろいろの水準のブロック因子（Rで表わす）を末1群の列から順にわりつけ，かつ，タテの点線によって，「分割区法」を採用したときの1次単位・2次単位などを適当にえらべるようにする．

このような原則に従い，かつ，次に示す記号法によって，各計画の呼び名をきめる：

(i) まず，実験の規模（区数）Nをきめる．—ここでは，2水準については，N=16，32，64を，3水準系についてはN=27と81を考える．

(ii) つぎに因子の数nをきめる．すると，2水準系ならば，$2^n/N = 2^p$ ならば，$1/2^p$実施，3水準系ならば，$3^n/N = 3^p$とすると，$1/3^p$実施であることがわかる．

(iii) さいごに，ブロックの数bをきめる．これを2水準系，3水準系ごとに $b=2^s$，$b=3^s$ とおく．すると各ブロックの大きさは，2^{n-p-s}，3^{n-p-s} となる．

N.B.S.（*National Bureau of Standards*）の表[4),5)]では，以上をまとめて各計画を（2^p, n, 2^{n-p-s}）で表わし，$1/2^p$実施を強調している．筆者らの表[7)]では，これを（n, $1/2^p$, 2^s）という記号で，$N=2^{n-p}$ごとにまとめた．3水準系も同様の記号法を用いた．

4. N.B.S.の表との比較

3の「わりつけの原則」に基づいて得られた120個の計画は，筆者らの論文[7)]に収録されている．これらのうち，N.B.S.の表とのちがいを明らかにし，かつ，N.B.S.よりも優れた計画のいくつかを示すために，二，三の例をあげる。

［例 1］　32区を用い，7因子（各2水準）の1/4実施をして，これを2ブロックに入れる計画（N.B.S.：（4, 7, 16），奥野ら：（7, 1/4, 2））．

まず，この計画に対するN.B.S.の叙述を再録する：

「*1/4 replication of 7 factors in 2 blocks of 16 units each.*

Factors: A, B, C, D, E, F, G

I = ABCEG = ABDF = CDEFG

Block confounding AB

All two factor interactions except AB, AD, AF, BD, BF and DF are measurable.

Blocks

1				2			
(1)	abdf	ab	df	bcd	acf	acd	bcf
ce	abcdef	abce	cdef	bde	aef	ade	bef
cg	abcdfg	abcg	cdfg	bdg	afg	adg	bfg
eg	abdefg	abeg	defg	bcdeg	acefg	acdeg	bcefg

」

これだけの記述によって，確かに，2ブロック各16区の処理内容を理解することができる．しかし，これらの処理がどういう構造をもっているかをうかがうためには，定義対比Ⅰとこの処理との関係を詳細に吟味しなければわからない．また，AB, AD, … など6ケの2因子交互作用は「推定可能」ではないことがわかるが，それでは，いくつの2因子交互作用が推定できるのかは計算してみなければ判然としない．実際，2因子交互作用の総数は $n=7$ のときは，${}_7C_2=21$ であるから，結局 $21-6=15$ が「推定可能」であることが予想される．

このような表現に対して，奥野らの表は，L_{32} 直交表を前提するとはいえ，この特殊の計画に対しては，そのわりつけ表は(7)の No. 30 の次の表現だけで事足りる．すなわち，

(計画)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
基本表示	a	b	ab	e	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
要因	R	A	BC	B	AC	AB=FG	C	D	e	AD	EG	BD	EF	e	CD

(計画)	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
基本表示	e	ae	be	abe	ce	ace	bce	abce	de	ade	bde	abde	cde	acde	bcde	abcde
要因	E	e	AE	DG	BE	DF	e	CE	DE	BF=AG	CF	G	CG	F	e	AF=BG

かつ，この表には，「推定される２因子交互作用の数」は15(+3)であること，および，誤差の自由度（誤差列の数）が5であることが示されている．

この方法の優位性を次に列挙する：

①「推定可能」な15ヶの２因子交互作用が明らかであるばかりでなく，推定不可能な6つの交互作用の交絡関係も明示される．それゆえ，もしG因子とA, B, Fとの交互作用は，何らかの技術的判断から無視できるならば，AB, AF, BFも「推定可能」となることがわかる．このことが，「推定される２因子交互作用の数」を15(+3)としている理由である．

② 32処理区の構成は，L_{32}直交表で，主効果をわりつけた列だけをぬき去して，その水準が2のものだけを拾う（1でもよい）というルールで求めることができる（次頁）―― これをN.B.S.の記号法で表わしたものを表の右欄につける．

③ ブロックRの効果を２因子交互作用との交絡なしに評価することができる．N.B.S.の表では，R＝AB＝DFとなっていた．それゆえブロック効果は推定できないし，また①にあげたような取扱いもできない．（その代

りに誤差の自由度は1増えて6になるはずであるが，N.B.Sには明記されていない.）

列番	1	2	4	7	8	16	29	27		
因子	R	A	B	C	D	E	F	G	処理組合せ	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	(1)	
2	1	1	1	1	1	2	2	2	efg	
3	1	1	1	1	2	1	2	2	dfg	
4	1	1	1	1	2	2	1	1	de	
5	1	1	2	2	1	1	2	1	bcf	
6	1	1	2	2	1	2	1	2	bceg	
7	1	1	2	2	2	1	1	2	bcdg	
8	1	1	2	2	2	2	2	1	bcdef	ブロック R_1
9	1	2	1	2	1	1	1	2	acg	
10	1	2	1	2	1	2	2	1	acef	
11	1	2	1	2	2	1	2	1	acdf	
12	1	2	1	2	2	2	1	2	acdeg	
13	1	2	2	1	1	1	2	2	abfg	
14	1	2	2	1	1	2	1	1	abe	
15	1	2	2	1	2	1	1	1	abd	
16	1	2	2	1	2	2	2	2	abdefg	
17	2	1	1	2	1	1	2	2	cfg	
18	2	1	1	2	1	2	1	1	ce	
19	2	1	1	2	2	1	1	1	cd	
20	2	1	1	2	2	2	2	2	cdefg	
21	2	1	2	1	1	1	1	2	bg	
22	2	1	2	1	1	2	2	1	bef	
23	2	1	2	1	2	1	2	1	bdf	
24	2	1	2	1	2	2	1	2	bdeg	ブロック R_2
25	2	2	1	1	1	1	2	1	af	
26	2	2	1	1	1	2	1	2	aeg	
27	2	2	1	1	2	1	1	2	adg	
28	2	2	1	1	2	2	2	1	adef	
29	2	2	2	2	1	1	1	1	abc	
30	2	2	2	2	1	2	2	2	abcefg	
31	2	2	2	2	2	1	2	2	abcdfg	
32	2	2	2	2	2	2	1	1	abcde	

④ 多段分割法を容易に導入できる．P.7の表のタテの点線を利用して，Aを1次因子(8区づつまとめる)，B,Cを2次因子(4区づつまとめる)，Dを3次因子(2区づつまとめる)，Eを4次因子(1区ごとに水準をかえる)

とすることができる．

（注）このときの定義対比 I＝ABFG＝ACDEF＝BCDEG である．

［例2］ 同じく32区を用い，2^7の1/4実施をおこなうが，これを4ブロックに入れる計画．（N.B.S.（4.7.8），奥野ら（7.14.4））

まず N.B.S.の叙述をみよう：

「1/4 replication of 7 factors in 4 blocks of 8 units each.

Factors： A, B, C, D, E, F, G

I＝ABCE＝ABDFG＝CDEFG

Block confounding, ACD, BEF, ABCDEF

All two factor interactions except AB, AC, AE, BC, BE, CE and DF are measurable.

以下わりつけ表を略す」

ここで大事なのは，推定可能な2因子交互作用の数が前より1つ減って14となったことである．さらにこの定義対比は，例1のと全く無関係であることである．奥野らのわりつけ表[7]では，定義対比は例1と全く同じにとっている．ブロック(4水準)を前のRとどれかの誤差項にとると，その交互作用によって，2因子交互作用の1つについての情報が失われ，結果的にはN.B.S.のと同じになる．しかし奥野ら[7]は，こういう時には交絡している列にブロックを割りつけることによって，2因子交互作用のぎせいを無くし，結局「推定可能」な2因子交互作用の数は15(+2)とできた．誤差列の数は1つ減って4となる．このようにして各計画相互の関連を明らかにして行くと，N.B.S.よりもよいものがいくつか得られる．

[例3] 32区を用い，8因子で2^8の1/8実施をするとき，4ブロック．

このときのN.B.S.の表では

$$I = ABEGH = ACFG = ABCD$$

となっており，例2とすっかり変る．しかし，奥野ら[7]では，

$$I = ACDEF = ABFG = ACGH$$

から生成することになり，はじめの2つは例1，2，3のすべてに共通である．かくて，奥野ら[7]では推定可能な2因子交互作用の数は13(+4)，誤差の自由度は3であることも付記されている．

・さらに，因子数nが増え，$n=16$でsaturatedするまで，定義対比は新しい要因を追加するほかは，つねに前のものを保持するというルールがとられた。もちろん，前のものを保持するために，betterなものを取逃がすということが起ると，このルールは破棄される．このようにして，つねにbetterなものを追究して行った．

5. 線点図法との比較

つぎに，奥野らのわりつけ表[7]を用いると，田口氏らが提唱する線点図法[8]利用の場合にくらべて，はるかに安全で信頼のおけることを例証する．「線点図法」とは，田口氏らの直交表に付記されているもので，点は各因子の主効果を，その2点を結ぶ直線は，それら2因子の交互作用を表わす．これを用いて，取上げたすべての主効果 $A, B, C, \ldots$と，一部の2因子交互作用（それが存在すると予想される！）$A\times B,\ A\times C \ldots$ などをわりつけるべき列番をきめることができる．しかし，この場合に，取上げなかった2

因子交互作用の一部が，予想に反してある程度の効果をもつとき，それが直交表のどの列に現われ，いかなる要因と交絡するかは，この線点図は何も教えない．もしそれが現われる列にある因子の主効果がすでにわりつけられておれば，この主効果の推定にはカタヨリがもちこまれることになる．

［例4］ L_{16} 直交表に8因子をわりつけるとき，ただし2因子交互作用としては，$A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, $A \times D$, $A \times E$, $F \times H$, $F \times G$ は知りたいとする．

次の線点図を用いると，これら8因子 A, B, C, D, E, F, G, H のわりつけられるべき列番がきまる．

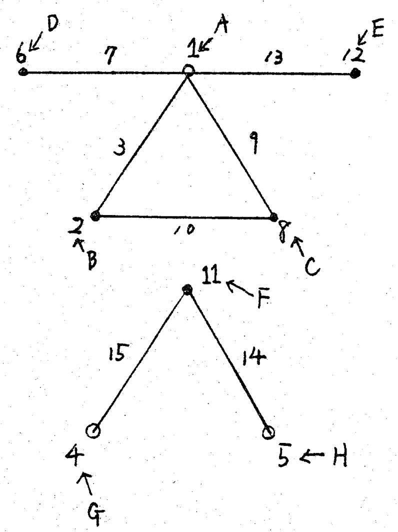
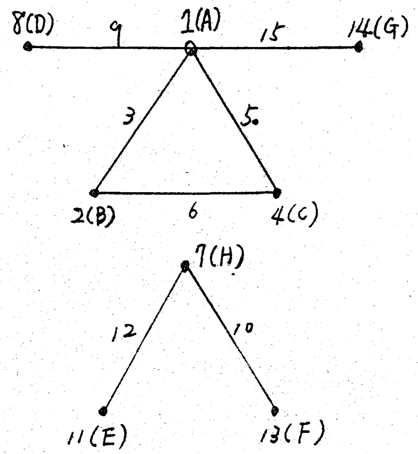


表 1

列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
基本表示	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
左のわりつけ	A	B	AB	G	H	D	AD	C	AC	BC	F	E	AE	FH	FG
交絡要因	=GH	=DG	=CF=DH	=BD=CE=AH	=AG	=BG	=EF=BH	=EG	=BF=GH	=DE=AF		=CG	=DF=CH	=CD=BE=FH	=FG
別のわりつけ	A	B	AB	C	AC	BC	H	D	AD	FH	E	EH	F	G	AG
交絡要因			=DE=FG=CH		=DF=EG=BH	=EF=DG=AH			=BE=CF=GH	=BD=AE=CG		=CD=AF=BG			=CE=BF=DH

この線点図へのわりつけを，表1の上段にうつし，同時に，これら各列に交絡する2因子交互作用をかきおろすと，F以外の主効果，およびはじめに予定したすべての2因子交互作用は，1ついし3つの無視した交互作用と交絡していることがわかる．したがって，この予想が少しでもはずれると，どれかの主効果または2因子交互作用の推定値にはカタヨリがもちこまれる．それゆえ，このわりつけはrobustness頑健性をもたないということができる．

それでは，主効果だけはどのような見込違いがあっても正しく推定できるようなわりつけは存在しないだろうか．その答は，奥野ら[7]のわりつけ表を用いると与えられ，表1の下段に示すものとなる．明らかに主効果はどの交互作用とも交絡していない．また，線点図法を用いるときのように，その下段の表の交絡要因をすべて無視することができるとすると，このわりつけは，次の線点図で表示することができ，それは上に与えたものと同じだけの情報をもつことがわかる．



〔例5〕 L_{32}直交表に9因子をわりつけるとき．

このときの奥野ら[7]のわりつけ表に，いろいろの技術的仮定をおくと，従来知られていない種々の直交表線点図をつくることができる。まず，表2にそのわりつけ表を示す．

表　2

列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
基本表示	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd	e	ae	be	abe	ce	ace	bce	abce	de	ade	bde	abde	cde	acde	bcde	abcde
わりつけ	A	B	AB=FG=CI	C	AC=GH=BI	BC=FH=AI	I	D	AD	BD	EH	CD	EF	EG	DI	E	AE	BE	DH	CE	DF	DG	EI	DE	CF=BH=GI	CG=AH=FI	H	AF=BG=HI	F	G	BF=AG=CH
図1のとき			e		e	e																			e	e		e			e
図2のとき			AB		AC	BC																			CF	e		AF			BF

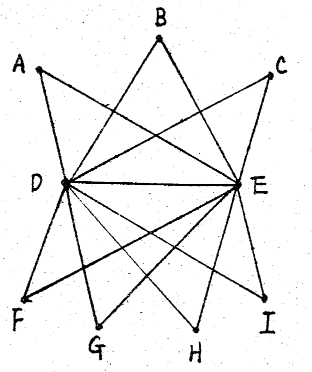


図1．D, Eとのすべての交互作用が検出できる場合

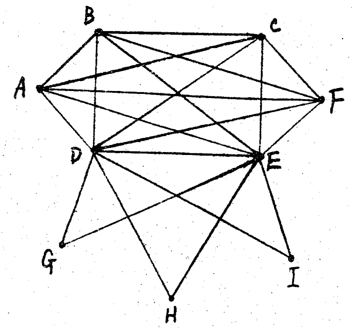


図2．G, H, IはD, Eとしか交互作用をもたない場合

ここで，図1はもとのわりつけ表に対応して，「推定可能」な2因子交互作用の数15ヶを示すものである．このときには，D，Eという2つの因子が軸となって，これらと他のすべての因子との交互作用だけが「推定可能」である．残りの21個の2因子交互作用は3つづつまとめて7列にわりつけられているから，もしこれらが全部無視できるならば，これを自由度7の誤差列とみることができる．

さらに，図2に示すように，G，H，IとA，B，C，Fとの交互作用は無視できるとすれば，15+6=21個の2因子交互作用が「推定可能」となる．

6. 今後の問題点

直交表を用いると *fractional factorial design* のわりつけの見通しが非常によくなることはすでに述べたとおりである．しかしなお次の問題点が残されている：

①ここで得られた解が *best* であるという一般的証明はまだ得られていない．

②互に交絡している2因子交互作用をうまく点と線で表わすことができるならば，奥野ら[7]のわりつけ表を線点図表現になおすこと．

③ここではふれなかったが，3水準系での交絡に際しては，ABとA^2Bのような対をまとめて交絡する方法を工夫すること．

④2水準系の直交表に，4水準の因子をわりつけること．

⑤部分交絡 *partial confounding* の利点を取りこむこと．（直和型のわりつけになる．）

⑥混合型直交表 L_{18}，L_{54}，L_{48} などの理論的開発をおこなうこと．

［付表］ 直交表へのわりつけ表（奥野ら[7]による）

＜L_{16} 実験 — 1ブロックのとき＞

№	列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	成分 （計画）	*a*	*b*	*a* *b*	*c*	*a* *c*	*b* *c*	*a* *b* *c*	*d*	*a* *d*	*b* *d*	*a* *b* *d*	*c* *d*	*a* *c* *d*	*b* *c* *d*	*a* *b* *c* *d*	（定義対比）
①	4. 1	A	B	A B	C	A C	B C		D	A D	B D		C D				—
②	5. 1/2	A	B	A B	C	A C	B C	D E	D	A D	B D	C E	C D	B E	A E	E	I＝ABCDE
③	6. 1/4	A	B	A B ＝ D E	C	A C ＝ D F	B C ＝ E F		D	A D ＝ B E ＝ C F	B D ＝ A E	E	C D ＝ A F	F		C E ＝ B F	I＝ABDE ＝ACDF
④	7. 1/8			＝ F G		＝ E G	＝ D G				＝ C G		＝ B G		G	＝ A G	I＝ABDE ＝ACDF ＝BCDG
⑤	8. 1/16			＝ C H		＝ B H	＝ A H	H		＝ G H	＝ F H		＝ E H			＝ D H	＝ABCH

＜L_{16}実験―2ブロックのとき＞

№	列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	成分 （計画）	a	b	a b	c	a c	b c	a b c	d	a d	b d	a b d	c d	a c d	b c d	a b c d	（ブロック） （定義対比）
⑥	4.　1.	R	A		B		A B	C D	C		A C	B D	B C	A D		D	$R=ABCD$
⑦	5.　½	R = A B	A	B	C	D E	A C	B C	D	C E	A D	B D	C D	E	B E	A E	$R=AB$ $I=ABCDE$
⑧	6.　¼	R	A	B C = E F	B	A C = D F	A B = D E	C	D	C E = B F	A D = B E = C F		B D = A E	F	E	C D = A F	$R=ABC$ $I=ABDE$ $=ACDF$
⑨	7.　⅛			= D G		= E G	= F G			= A G		G	= C G			= B G	$=BCDG$
⑩	8.　1/16	R = A B = D E = F G = C H	A	B	G	H	A C = D F = E G = B H	B C = E F = D G = A H	D	E	A D = B E = C F = G H	B D = A E = C G = F H	C D = A F = B G = E H	C E = B F = A G = D H	F	G	$=ABCH$ 但し$R=AB$

＜L_{32} 実験、1ブロックのとき＞

No.	列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
	成分 (計画)	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd	e	ae	be	abe	ce	ace	bce	abce	de	ade	bde	abde	cde	acde	bcde	abcde	定義対比
⑪	5.1	A	B	AB	C	AC	BC		D	AD	BD		CD				E	AE	BE		CE				DE								—
⑫	6.1/2	A	B	AB	C	AC	BC		D	AD	BD		CD			EF	E	AE	BE		CE			DF	DE			CF		BF	AF	F	I＝ABCDEF
⑬	7.1/4	A	B	AB ‖ FG	C	AC	BC		D	AD	BD		CD	EF	EG		E	AE	BE		CE	DF	DG		DE	CF	CG		AF ‖ BG	F	G	BF ‖ AG	I＝ACDEF ＝BCDEG （ABFG）
⑭	8.1/8					‖ GH	‖ FH					EH								DH						‖ BH	‖ AH	H				‖ CH	＝ABDEH （ACGH）
⑮	9.1/16			‖ CJ		‖ BI	‖ AI	I								DJ								EJ		‖ GI	‖ FI		‖ HI				＝ABCI
⑯	10.1/32	A	B	AB ‖ FG	C	AC ‖ GH	BC ‖ FH	EI ‖ DJ	D	AD ‖ GI	BD ‖ FI	EH ‖ CJ	CD ‖ HI	EF ‖ BJ	EG ‖ AJ	J	E	AE ‖ GJ	BE ‖ FJ	DH ‖ CI	CE ‖ HJ	DF ‖ BI	DG ‖ AI	I	DE ‖ IJ	CF ‖ BH	CG ‖ AH	H	AF ‖ BG	F	G	BF ‖ AG ‖ CH ‖ DI ‖ EJ	I＝ACDEF ＝BCDEG ＝ABDEH ＝ABCEI ＝ABCDJ
⑰	16.1/2048	A	B	AB ‖	C	AC ‖	BC ‖	G	D	AD ‖	BD ‖	H	CD ‖	I	J	EF ‖	E	AE ‖	BE ‖	K	CE ‖	L	M	DF ‖	DE	N	O	CF ‖	P	BF ‖	AF ‖	F	I＝ABCDEF ＝ABCG ＝ABDH ………… ………… ＝CDEP

（8つの2因子交互作用が1列に入っている）

<L_{27} 実験。1ブロックのとき>

№	列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	成分 （計画）	a	b	a b	a^2 b	c	a c	a^2 c	b c	c b c	a^2 b c	b^2 c	a b^2 c	a^2 b^2 c	定義対比
⑱	3.1	A	B	A B	A^2 B	C	A C	A^2 C	B C			B^2 C			—
⑲	4⅓	A	B	A B ‖ C^2 D	A^2 B	C	A C ‖ B^2 D	A^2 C	B C ‖ A^2 D	D	A D	B^2 C	B D	C D	$I=ABCD^2$

文　献

1) F. Yates : The design and analysis of factorial experiments, Technical Communication No.35, Imperial Bureau of Soil Science, 1937

2) D. J. Finney : The fractional replication of factorial arrangements, Annals of Eugenics, 12, 1945, 4, 291-301.

3) D. J. Finney : Recent developments in the design of field experiments. III. Fractional replication, J. Agric. Sci., 36, 1946, 3, 184-191.

4) National Bureau of Standards : Fractional factorial experiment designs for factors at two levels, 1957, U.S. Dept. of Commerce, Applied Mathematics Series, 48.

5) National Bureau of Standards : Fractional factorial experiment designs for factors at three levels, 1959, U.S. Dept. of Commerce, Applied Mathematics Series, 54.

6) R. L. Plackett & J. P. Burman : The design of optimum multifactorial experiments, 1946, Biometrika 33, 305-325.

奥野忠一・塩見正衛：直交表による多因子計画のわりつけ，1965.
農技研報告 A 12号 pp 23-75.

8) 田口玄一：実験計画法，上.下　丸善