数理解析研究所講究録
第 26 巻 1967 年 46-74

[C] Riemann 空間の倉持境界

東大理　伊藤清三

§0. 序文. 本稿の目的は, Riemann 空間の Laplace-Beltrami 作用素に関する倉持境界を, 倉持氏[2]による Riemann 面の理想境界の一般化として, 偏微分方程式論の方法で構成することである. その方法は, 筋道としては, 大津賀氏の方法[1]に従っているが, [1]で使われている函数論の結果を, 高次元の場合にどのように置き換えるかが興味の中心なので, 本稿では特に §§1—4 を詳しく述べる. §5 以後においても, [1]の方法と比べて, 技術上の点で minor modification を必要とする所もあるが, 本質的に[1]と同じ方法で議論が進められるので, §5 以後は理論構成の筋道として必要な定義と定理をあげ, 定理の証明は省略して, [1]の中の対応する定理の番号を記しておく.

偏微分方程式に関する結果については[3]を引用し, Martin 境界論とまったく平行な議論をできる所は[4]を引用する.

本稿で扱う Riemann 空間 R が, 別の Riemann 空間 M の部分領域であって, M の中での R の境界(の一部) S が十分滑らかな場合に, S が本稿の意味の倉持境界 $\hat{S}$ に自然な方法で埋蔵されるかという問題は, 証明がまだ完全には整理してないので本稿では割愛したが, Martin 境界の場合[4]と同じ方法(または本稿定理 3.3 の証明と類似の方法)で肯定的に証明できると思われる.

§1 <u>準備</u>. RをコンパクトでないRiemann空間(次元$\geqq 2$)とし，その計量テンソル$\|g_{ij}(x)\|$はC^2級とする；AをRにおけるLaplace-Beltrami作用素とする：$\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}$，$g = \det\|g_{ij}\|$とするとき

$$Au(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g(x)}\, g^{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right].$$

Rにおけるvolume element dx, hypersurface element dS_x等はすべて$\|g_{ij}\|$で定義される計量について考えるものとする.

ΩをRの部分領域とする．函数uがΩで<u>区分的に滑らか</u>とは，uがΩで連続であって，Ωに含まれて互いに交わらない有限個の単純閉曲面$S_1, \cdots, S_n$が存在して，uが$\Omega - S_1 - \cdots - S_n$において$C^1$級なることであるとする．$\Omega$で区分的に滑らかな函数$u, v$に対して，次の記号を定義する(それぞれの右辺が意味をもつかぎり)：

$$|\nabla u(x)|^2 = g^{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}\frac{\partial u(x)}{\partial x^j} \quad (\text{各 } x \in \Omega \text{ に対して}),$$

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega g^{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}\frac{\partial v(x)}{\partial x^j}\,dx,$$

$$\|u\|_\Omega^2 = (u, u)_\Omega = \int_D |\nabla u(x)|^2\,dx \quad (\text{Dirichlet積分}).$$

Rの部分集合Eが<u>regular</u>であるとは，その境界∂EがC^3級単純閉曲面であることとする.

今後，Rの中のregularなコンパクト集合K_0と，次の条件を満たすregularな領域の列$\{D_n\}$とを固定する：i) 各$\overline{D_n}$はコンパクト，ii) $K_0 \subset D_n \subset \overline{D_n} \subset D_{n+1}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = R$．更に

$$D'_n = D_n - K_0 \; (n=1,2,\cdots), \quad R' = R - K_0$$

とおく.

以下の1°, 2°, 3° は[3]の結果に含まれるものである.

1°. Ω を R の中の regular な領域で, $\bar{\Omega}$ がコンパクトなものとする. Ω における楕円型境界値問題

(1.1) $\quad Au = f, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi$

の Green 函数 $G_\Omega(x, y)$ が唯一つ存在する; f が $\bar{\Omega}$ で Hölder 連続, φ が $\partial\Omega$ で連続ならば, (1.1) の解は

(1.2) $\quad u(x) = -\int_\Omega G_\Omega(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \dfrac{\partial G_\Omega(x,y)}{\partial n_y} \varphi(y) dS_y$

で与えられる. また $G_\Omega(x, y)$ は

(1.3) $\quad G_\Omega(x,y) = G_\Omega(y,x) \geqq 0$

を満たし, y を固定すれば x の函数として

(1.4) $\quad A G_\Omega = 0 \quad (x \in \Omega - \{y\}), \quad G_\Omega = 0 \quad (x \in \partial\Omega - \{y\})$

を満たす.

2°. Ω は1°と同じとし, $\partial\Omega = S_1 + S_2$ (S_1, S_2 は $\partial\Omega$ の閉部分集合で共通点を持たない) とする. Ω における楕円型境界値問題

(1.5) $\quad Au = f, \quad u|_{S_1} = \varphi_1, \quad \partial u/\partial n|_{S_2} = \varphi_2$

の核函数 $N_\Omega(x, y) \equiv N_{\Omega, S_1, S_2}(x, y)$ が唯一つ存在する; f, φ_2 がそれぞれ $\bar{\Omega}$, S_2 で Hölder 連続, φ_1 が S_1 で連続ならば, (1.5) の解は

(1.6) $$u(x) = -\int_\Omega N_\Omega(x, y) f(y) dy - \int_{S_1} \frac{\partial N_\Omega(x, y)}{\partial n_y} \varphi_1(y) dS_y + \int_{S_2} N_\Omega(x, y) \varphi_2(y) dS_y$$

で与えられる．また $N_\Omega(x, y)$ は

(1.7) $$N_\Omega(x, y) = N_\Omega(y, x) \geqq 0$$

を満たし，y を固定すれば x の函数として

(1.8) $$\begin{cases} AN_\Omega = 0 \ (x \in \Omega - \{y\}), \\ N_\Omega = 0 \ (x \in S_1 - \{y\}), \quad \partial N_\Omega / \partial n = 0 \ (x \in S_2 - \{y\}) \end{cases}$$

を満たす．

3°. $\{D'_n\}$ を前述のとおりとし $G_n(x, y) = G_{D'_n}(x, y)$ とおくと

$$0 \leqq G_n(x, y) \leqq G_{n+1}(x, y) \quad (x, y \in \bar{D}'_n \ ; \ x \neq y),$$

また，有限な $G(x, y) = \lim_{n \to \infty} G_n(x, y)$ $(x, y \in D' + \partial K_0 \ ; \ x \neq y)$ が存在して

(1.9) $$G(x, y) = G(y, x) \geqq 0 ;$$

$y \in R' + \partial K_0$ を固定すれば，x の函数として

(1.10) $$AG = 0 \ (x \in R'), \quad G = 0 \ (x \in \partial K_0).$$

古典的なラプラシアン Δ の場合によく知られている次のような事実は，A についても同様に成立する．

<u>補題 1.1.</u> Ω が regular な領域でコンパクトな閉包を持つものとし，$u(x)$ は $\bar{\Omega}$ で連続，Ω で区分的に滑らかで $\|u\|_\Omega < \infty$，$v(x)$ は $\bar{\Omega}$ で C^1 級，Ω で C^2 級であって $\int_\Omega |Av(x)| dx < \infty$ を満たすとすると，

$$(u, v)_\Omega + \int_\Omega u\cdot Av\,dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS \quad (\text{Green の公式}).$$

<u>補題1.2.</u> Ω, S_1, S_2 を前記 2° のとおりとする．$u(x)$ が $\overline{\Omega}$ で連続，Ω で $Au=0$ を満たし，$\partial u/\partial n|_{S_2}=0$ とし，$\Omega+S_2$ の或る点で最大値または最小値をとるとすると，u は $\overline{\Omega}$ で定数である．

<u>補題1.3.</u> Ω が R' の中の regular な領域で，ある n_0 に対して $\Omega \supset R-D_{n_0}$ なるものとする．$n>n_0$ に対して $\Omega_n=\Omega\cap D_n$ とし，u_n は $\overline{\Omega}_n$ で連続であって Ω_n で $Au_n=0$ を満たすものとする．このとき，

i) $\sup_{n>n_0}\sup_{x\in\partial\Omega}|u_n(x)|<\infty$, $\sup_{n>n_0}\|u_n\|_{\Omega_n}<\infty$ ならば，適当な部分列 $\{u_{n(k)}\}$ と，$\overline{\Omega}$ で連続であって Ω で $Au=0$ を満たす函数 u が存在して

(1.11) $\lim_{k\to\infty} u_{n(k)}(x)=u(x)$ （$\overline{\Omega}$ で広義一様収束），

(1.12) $\lim_{k\to\infty}|\nabla(u_{n(k)}(x)-u(x))|=0$ （Ω で広義一様収束）;

ii) $\lim_{m,n\to\infty}\sup_{x\in\partial\Omega}|u_m(x)-u_n(x)|=0$, $\lim_{m>n\to\infty}\|u_m-u_n\|_{\Omega_n}=0$ ならば，i) における部分列 $\{u_{n(k)}\}$ をもとの函数列 $\{u_n\}$ でおきかえることができる．

iii) $\partial\Omega\supset\partial K_0$ であって，$u_n|_{\partial K_0}$ が n に無関係で ∂K_0 上で C^2 級の函数ならば，(1.12) は $\Omega+\partial K_0$ で広義一様収束として成立する．

今後一般に，領域 Ω において函数 u が $Au=0$ を満たすとき，u は Ω において<u>調和</u>であるという．また u が Ω において<u>優調和</u>ということも，普通の Δ の場合と同様に定義する．

§2. 核函数 $N(x, y)$. $\{D_n'\}$, $\{G_n(x, y)\}$, $G(x, y)$ を §1 に述べたとおりとし, $N_n(x, y) = N_{D_n', \partial K_0, \partial D_n}(x, y)$ (§1 の 2° 参照) とおく. 次の二つの補題は Green の公式を使って容易に示される:

補題 2.1. $x, y \in \overline{D_n'}$; $x \neq y$ ならば

$$(2.1)\quad N_n(x,y) - G(x,y) = -\int_{\partial D_n} \frac{\partial G(x,z)}{\partial n_z} N_n(z, y)\, dS_z .$$

補題 2.2. $m > n$, $x, y \in \overline{D_n'}$; $x \neq y$ ならば

$$(2.2)\quad N_m(x,y) - G_n(x,y) = -\int_{\partial D_n} N_m(x,z) \frac{\partial G_n(z,y)}{\partial n_z}\, dS_z .$$

次に

$$(2.3)\qquad h_n(x,y) = -\int_{\partial D_n} \frac{\partial G(x,z)}{\partial n_z} N_n(z,y)\, dS_z \qquad (x, y \in \overline{D_n'})$$

とおくと, h_n は y を固定するとき $x \in \overline{D_n'}$ で調和 (y も含めて) であり, (2.1) により

$$(2.4)\qquad h_n(x,y) = N_n(x,y) - G(x,y) ;$$

従って

$$(2.5)\qquad h_n(x,y) = h_n(y,x).$$

定理 2.1. 任意の $y \in R'$ を固定するとき, $N_n(x,y)$ は或る函数 $N(x,y)$ に $x \in (R' + \partial K_0) - \{y\}$ について広義一様に収束し, $\| N_n(\cdot, y) - N(\cdot, y) \|_{D_n'} \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ となる; 函数 $N(\cdot, y)$ は $G(\cdot, y)$ + 調和函数 (x について) の形に表わされ, $x \in \partial K_0$ ならば $N(x,y) = 0$ であり, y の任意の近傍 Ω に対して $\| N(\cdot, y) \|_{R' - \Omega} < \infty$ となる.

証明. 一点 $y_0 \in R'$ と $y_0 \in D_{n_0}$ なる n_0 とを固定し, $\gamma_n = h_n(y_0, y_0)$ $(n > n_0)$ とおく. 以後 G, N_n, h_n を x のみの函数として扱かう. $m > n > n_0$ ならば

$$\| N_m \|^2_{D_m - D_n} = \int_{\partial D_m} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} ds - \int_{\partial D_n} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} ds = -\int_{\partial D_n} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} ds$$

だから

$$(2.6) \qquad \int_{\partial D_m} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} ds \leqq 0 .$$

また, (1.6) において $u = h_n - h_m$, $N_\Omega = N_n$ として, (1.7) を使うと

$$(2.7) \quad h_n(y_0, y_0) - h_m(y_0, y_0) = \int_{\partial D_n} N_n(z, y_0) \frac{\partial \{h_n(z, y_0) - h_m(z, y_0)\}}{\partial n_z} ds_z .$$

一方, (2.4) により $N_n - N_m = h_n - h_m$ で, これは D'_n で調和であり,

$$N_n|_{\partial K_0} = N_m|_{\partial K_0} = 0 , \quad \partial N_n / \partial n|_{\partial D_n} = 0$$

だから,

$$\begin{aligned} \| N_n - N_m \|^2_{D'_n} &= \int_{\partial D_n} (N_n - N_m) \frac{\partial (N_n - N_m)}{\partial n} ds \\ &= \int_{\partial D_n} N_n \frac{\partial (h_n - h_m)}{\partial n} ds + \int_{\partial D_n} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} ds \\ &\leqq \gamma_n - \gamma_m \qquad ((2.6), (2.7) \text{ により}). \end{aligned}$$

だから $\{\gamma_n\}$ は単調減少数列である. 一方 ∂D_{n_0} の上で $h_n = N_n - G \geqq -\max_{\partial D_{n_0}} G$ だから, 最小値原理 (補題 1.2) によって $\gamma_n \geqq -\max_{\partial D_{n_0}} G > -\infty$ となり, 有限な $\lim_{n \to \infty} \gamma_n$ が存在する. 従って

$$(2.8) \qquad \lim_{m > n \to \infty} \| N_n - N_m \|_{D'_n} = 0 ,$$

(2.9) $\qquad \displaystyle\lim_{m>n\to\infty} \| h_n - h_m \|_{D'_n} = 0.$

(2.4)によりすべてのnに対して$h_n|_{\partial K_0}=0$だから，(2.9)と補題1.3により，$R'+\partial K_0$において連続でR'において調和な函数$h=h(\cdot, y_0)$が存在して

(2.10) $\qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n(x, y_0) = h(x, y_0)$ （$R'+\partial K_0$で広義一様），

(2.11) $\qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty} |\nabla\{h_n(x, y_0) - h(x, y_0)\}| = 0$ （$R'+\partial K_0$で広義一様）

となり，$h(x, y_0)$は$R'+\partial K_0$でC^1級，かつ$x\in\partial K_0$ならば$h(x, y_0)=0$となる．ここで

$$N(x, y_0) = G(x, y_0) + h(x, y_0)$$

と定義すると，

(2.12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} N_n(x, y_0) = N(x, y_0)$ （$R'+\partial K_0-\{y_0\}$で広義一様），

(2.13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\nabla\{N_n(x, y_0) - N(x, y_0)\}| = 0$ （$R'+\partial K_0-\{y_0\}$で広義一様），

(2.14) $\begin{cases} N(x, y_0)\text{は}R'+\partial K_0\text{で}C^1\text{級}, \\ x\in\partial K_0\text{ならば}N(x, y_0)=0. \end{cases}$

ここで

(2.15) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \| N_n(\cdot, y_0) - N(\cdot, y_0) \|_{D'_n} = 0$

および

(2.16) y_0の任意の近傍Ωに対して$\| N(\cdot, y_0) \|_{R'-\Omega} < \infty$．

となることを示そう．(2.1)により，任意の$\varepsilon>0$に対して適当なn_εをとれば，$m>n>n_\varepsilon$なるかぎり$\|N_n - N_m\|_{D'_n} < \varepsilon$となる．$m\to\infty$とすると(2.13)とFatouの補題によって$\|N_n - N\|_{D'_n} < \varepsilon$となる．この結果は(2.15)を意味する．(2.16)を示すには，$\partial\Omega$が十分滑らか

であって $y_0\in\Omega\subset D_{n_0}$ と仮定してよい．N_n の定義により

$$\partial N_n/\partial n\big|_{\partial D_n}=0,\quad N_n\big|_{\partial K_0}=0$$

だから，任意の $n>n_0$ に対して

$$\|N_n\|^2_{D_n'-\Omega}=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial N_n}{\partial n}N_n\,dS\,;$$

$n\to\infty$ とすると，(2.13) と Fatou の補題によって

$$\|N\|^2_{R'-\Omega}\leqq\int_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial N}{\partial n}\right)N\,dS$$

となり，(2.16) が得られる．

以上の議論において y_0 は任意だから，定理 2.1 が証明された．

<u>系 2.1.1.</u> $N(x,y)$ は $(R'+\partial K_0)\times(R'+\partial K_0)-\{(z,z);\,z\in\partial K_0\}$ において，∞ の値を含めた意味で連続であり，$N(x,y)=N(y,x)$.

（補題 2.2 において $m\to\infty$ とした式を使って証明する.）

<u>系 2.1.2.</u> 任意の $y\in R'$ と，$K_0\subset\Omega\ni y$ であってコンパクトな閉包 $\bar\Omega$ をもつ任意の領域 Ω に対して

$$(2.17)\qquad\int_{\partial\Omega}\frac{\partial N(x,y)}{\partial n_x}dS_x=\int_{\partial K_0}\frac{\partial N(x,y)}{\partial n_x}dS_x=1.$$

証明: $\bar\Omega\subset D_{n_0}$ なる n_0 をとると，$n>n_0$ ならば $N_n(\cdot,y)$, $N(\cdot,y)$ が $\Omega-K_0$ で調和なことにより

$$(2.18)\qquad\int_{\partial\Omega}\frac{\partial N_n(x,y)}{\partial n_x}dS_x=\int_{\partial K_0}\frac{\partial N_n(x,y)}{\partial n_x}dS_x,$$

$$(2.19)\qquad\int_{\partial\Omega}\frac{\partial N(x,y)}{\partial n_x}dS_x=\int_{\partial K_0}\frac{\partial N(x,y)}{\partial n_x}dS_x.$$

一方，(1.6) で $u\equiv 1$, $N_\Omega = N_n$ とすると

$$\int_{\partial K_0} \frac{\partial N_n(x,y)}{\partial n_x}\, dS_x = 1$$

だから，(2.18) により

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_n(x,y)}{\partial n_x}\, dS_x = 1.$$

$n\to\infty$ とすると (2.13) により

(2.20) $$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial N(x,y)}{\partial n_x}\, dS_x = 1.$$

(2.19), (2.20) により (2.17) を得る.

定理 2.2. $N(x, y)$ は K_0 だけに関係し，$\{D_n\}$ のとり方には関係しない.

証明. $\{D_n\}$ と同じ性質をもつ他の領域の列 $\{\widetilde{D}_n\}$ をとり，それに対応する $\{\widetilde{N}_n(x,y)\}$, $\{\widetilde{h}_n(x,y)\}$, $\widetilde{N}(x,y)$ を定義する. $y_0\in R'$ を固定し，

$$\widetilde{\gamma}_n = \widetilde{h}_n(y_0, y_0),\quad \widetilde{N}_n = \widetilde{N}_n(\cdot, y_0),\quad \widetilde{N} = \widetilde{N}(\cdot, y_0)$$

とおくと，定理 2.1 の証明と同様に

(2.21) $$\gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma_n > -\infty,\quad \widetilde{\gamma} = \lim_{n\to\infty}\widetilde{\gamma}_n > -\infty$$

が存在する. 各 ν に対して n_ν, m_ν を

$$\nu < n_\nu < m_\nu,\quad \overline{D_\nu}\subset \widetilde{D}_{n_\nu}\subset \overline{\widetilde{D}_{n_\nu}}\subset D_{m_\nu}$$

なるようにとると，定理 2.1 の証明中に示したように

(2.22) $$\begin{cases} \gamma_\nu - \widetilde{\gamma}_{n_\nu} \geqq \| N_\nu - \widetilde{N}_{n_\nu}\|^2_{D'_\nu} \geqq 0 \\ \widetilde{\gamma}_{n_\nu} - \gamma_{m_\nu} \geqq \| \widetilde{N}_{n_\nu} - N_{m_\nu}\|^2_{D'_{n_\nu}} \geqq 0\ ; \end{cases}$$

従って

$$(2.23) \qquad \gamma_\nu \geqq \tilde{\gamma}_{n_\nu} \geqq \gamma_{m_\nu}.$$

$\nu \to \infty$ のとき $n_\nu \to \infty$, $m_\nu \to \infty$ となるから，(2.23), (2.21) によって $\gamma = \tilde{\gamma}$ となる．従って (2.22) と Fatou の補題によって $\|N - \tilde{N}\|^2_{R'} = 0$ となり，$N|_{\partial K_0} = \tilde{N}|_{\partial K_0} = 0$ なることと合わせて，$R' + \partial K_0$ において $N \equiv \tilde{N}$ となる．（証明終り）

今後 $N(x, y)$ をポテンシャルの核とする．R' 上の Borel 測度 μ に対して，ポテンシャル $N\mu(x)$ を

$$(2.24) \qquad N\mu(x) = \int_{R'} N(x, y)\, d\mu(y)$$

で定義する．ただし μ は，任意のコンパクト集合 $K \subset R$ に対して $\mu(K \cap R') < \infty$，かつ $N\mu(x) \not\equiv \infty$ なるもののみを考える．μ の台を $S[\mu]$ と書く．

あとで使う補題を述べておく．

補題 2.3. $N\mu(x)$ は R' において優調和である．

補題 2.4 (Riesz 分解). Ω を R' の任意の部分領域とすると，Ω で優調和な任意の函数 $v(x)$ に対して，Ω 上の Borel 測度 μ と調和函数 h とが一意的に定まって $v = N\mu + h$ となる．

補題 2.3 は，（優）調和函数の単調増加列の極限函数は，$\equiv \infty$ でないかぎり優調和であることを使えばよい．補題 2.4 は，優調和函数が局所可積分であることを使って，L. Schwartz の超函数論の方法によって，証明することができる．

§3. 倉持境界の定義.

補題 3.1. K を $R'+\partial K_0$ のコンパクト部分集合, F を R の閉部分集合で $R'-K$ に含まれるものとすると,

$$(3.1) \qquad \sup_{x\in K,\, y\in F}|N(x,y)|<\infty, \qquad \sup_{x\in K,\, y\in F}|\nabla_x N(x,y)|<\infty.$$

証明. Ω を regular な領域で $K\cup K_0\subset\Omega\subset\overline{\Omega}\subset R'-F$ かつ $\partial\Omega$ がコンパクトなものとし, $h(x)$ を $\Omega'=\Omega-K_0$ で調和であって $h|_{\partial\Omega}=1$, $h|_{\partial K_0}=0$ なるものとすると, $\partial h/\partial n|_{\partial\Omega}>0$, 従って $\min_{\partial\Omega}\partial h/\partial n>0$ となる. 任意の一点 $y\in F$ を固定して, $N=N(x,y)$ を x の函数として扱う. N は Ω' において調和だから, Green の公式によって $\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial h}{\partial n}N-h\frac{\partial N}{\partial n}\right)dS=0$. だから $h|_{\partial\Omega}=1$, $N\geqq 0$ なることと系 2.1.2 を使って

$$\min_{\partial\Omega}\frac{\partial h}{\partial n}\cdot\int_{\partial\Omega}N\,dS\leqq\int_{\partial\Omega}\frac{\partial h}{\partial n}N\,dS=\int_{\partial\Omega}h\frac{\partial N}{\partial n}dS=1.$$

だから, y に無関係な定数 M_Ω が存在して $\int_{\partial\Omega}N(z,y)dS_z\leqq M_\Omega$ となる.

一方, (1.2) で $u=N(\cdot,y)$ とすると

$$(3.2) \qquad N(x,y)=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_{\Omega'}(x,y)}{\partial n_z}N(z,y)dS_z.$$

K と $\partial\Omega$ とは互いに交わらないコンパクト集合だから,

$$\sup_{x\in K,\, z\in\partial\Omega}\left\{\left|\frac{\partial G_{\Omega'}(x,z)}{\partial n_z}\right|+\left|\nabla_x\frac{\partial G_{\Omega'}(x,y)}{\partial n_z}\right|\right\}<\infty.$$

このことと (3.2) とにより (3.1) を得る. (証明終り)

Rの一点コンパクト化の位相を与える距離を ρ_0 とする．また，任意の $x\in R'$, $y\in K_0$ に対して $N(x, y)=0$ と定義しておいて，任意の y, $y'\in R$ に対して

$$(3.3)\qquad \rho_1(y, y')=\int_{D_1'}\frac{|N(x, y)-N(x, y')|}{1+|N(x, y)-N(x, y')|}dx$$

と定義する．このとき，補題3.1を使って次の二つの補題は Martin 境界論の場合（例えば[4]）と同様に証明される：

補題3.2. ρ_1 を $R'\times R'$ に制限したものは距離の公理を満たし，R' に本来の位相と同じ位相を与える．

補題3.3. R' は距離 ρ_1 について全有界である．

そこで

$$\rho(y, y')=\rho_0(y, y')+\rho_1(y, y')\qquad (y, y'\in R)$$

と定義すると，ρ は R において距離の公理を満たし，本来の位相と同じ位相を与え，R は ρ について全有界である．だから R の ρ に関する完備化を $\hat{R}$ とし，$\hat{S}=\hat{R}-R$ とおくと，次の二つの定理およびその系も Martin 境界論の場合と同様に証明できる；今後 ρ の $\hat{R}\times\hat{R}$ への拡張も同じ文字 ρ で表わす．

定理3.1. 距離 ρ に関して $\hat{R}$ はコンパクト，S はその中で内点を持たない閉集合であり，ρ から導かれる R の相対位相は，R の本来の位相に一致する．

定理3.2. $N(x, y)$ は $(R'+\partial K_0)\times\hat{R}-\{(z, z);\ z\in R'+\partial K_0\}$ の上の連続函数に拡張せられ，任意の $y\in\hat{R}$ を固定するとき $N(x, y)$ は x に

ついて$R'-\{y\}$で調和である．

系3.2.1. KがR'のコンパクト部分集合，Fが$\hat{R}$の閉部分集合で，$K\cap F=\phi$ ならば，$N(x,y)$は$K\times F$の上でρに関して一様連続である．

系3.2.2. $\xi,\eta\in\hat{S}$であって，任意の$x\in R'$に対して$N(x,\xi)=N(x,\eta)$ならば，$\xi=\eta$である．

ここで次の定理を証明する：

定理3.3. $\hat{R}$はK_0，$\{D_n\}$，ρ_0のとり方に無関係である．詳しく述べると；—— K_0，$\tilde{K}_0$をRの中の regular なコンパクト集合とし，それぞれに対して$\{D_n\}$，$\{\tilde{D}_n\}$を§1で述べたようにとり，$N(x,y)$，$\tilde{N}(x,y)$を前述のように定義する．またρ_0，$\tilde{\rho}_0$をRの一点コンパクト化の位相を与える距離とし，$\rho=\rho_0+\rho_1$，$\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_0+\tilde{\rho}_1$に関する$R$の完備化をそれぞれ$\hat{R}$，$\hat{\tilde{R}}$とすると，$\hat{R}$と$\hat{\tilde{R}}$は同相であって，その同相写像は$R$においては恒等写像である．

証明. まず，$\overline{D_1}\subset(\tilde{K}_0)^\circ$（$^\circ$は内部を表わす）として証明すればよいことは明らか．また定理2.2により，$n\geqq 2$ならば$D_n=\tilde{D}_n$と仮定してよい（ρ_1がD_1には関係している）．このときRにおいて，距離ρによる一様位相と$\tilde{\rho}$による一様位相が同値なことを証明すれば，それらによる完備化が一様空間として同じになるから，この定理が証明されたことになる．ρと$\tilde{\rho}$によるRの一様位相の同値性は，Rのコンパクト部分集合（例えば$\overline{D_3}$）の上では明らかであり，ρ_0と$\tilde{\rho}_0$によるRの一様位相が同値なことも明らかだから，$R-D_2$において次の i)，ii) を示せばよい：

i) 任意の $\tilde{\varepsilon}>0$ に対して，適当な $\varepsilon>0$ をとれば，$\rho(y, y')<\varepsilon$ なる任意の $y, y' \in R-D_2$ に対して $\tilde{\rho}_1(y, y')<\tilde{\varepsilon}$ となる；

ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当な $\tilde{\varepsilon}>0$ をとれば，$\tilde{\rho}(y, y')<\varepsilon$ なる任意の $y, y' \in R-D_2$ に対して $\rho_1(y, y')<\varepsilon$ となる．

i) の証明．$n \geqq 2$ ならば，補題 2.1 と同様に，任意の $x, y \in D_n-\tilde{K}_0$ に対して次の式が示される：

$$N_n(x, y)-\tilde{N}_n(x, y)=\int_{\partial\tilde{K}_0} \frac{\partial \tilde{N}_n(x, z)}{\partial n_z} N_n(z, y)\, dS_z$$

（$\partial/\partial n$ は $\tilde{K}_0$ から見て外向きの法線微分）．だから (2.11)，(2.12)（および $\tilde{N}_n$ に対する同様な式）により，任意の $x, y \in R-\tilde{K}_0$ に対して

$$N(x, y)-\tilde{N}(x, y)=\int_{\partial\tilde{K}_0} \frac{\partial \tilde{N}(x, z)}{\partial n_z} N(z, y)\, dS_z .$$

従って，特に $x \in \partial\tilde{D}_1$ および $y, y' \in R-D_2$ に対して

$$(3.4) \quad \begin{aligned}\tilde{N}(x, y)-\tilde{N}(x, y') &= N(x, y)-N(x, y') \\ &\quad -\int_{\partial\tilde{K}_0} \frac{\partial N(x, z)}{\partial n_z}\{N(z, y)-N(z, y')\}\, dS_z .\end{aligned}$$

ここで $\partial N(x, z)/\partial n_z$ は $\partial\tilde{D}_1 \times \partial\tilde{K}_0$ で有界であり，また $N(x, y)$ は $(\partial\tilde{D}_1+\partial\tilde{K}_0)\times(R-D_2)$ で距離 ρ に関して一様連続（系 3.2.1）だから，任意の $\tilde{\varepsilon}>0$ に対して適当な $\varepsilon>0$ をとれば，$y, y' \in R-D_2$，$\rho(y, y')<\varepsilon$ なるかぎり $\sup_{x \in \partial\tilde{D}_1}|\tilde{N}(x, y)-\tilde{N}(x, y')| \leqq \tilde{\varepsilon}\Big/\int_{D_1'} dx$ となる．一方，$y \in R-D_2$ を固定すれば $\tilde{N}(x, y)$ は x について $\tilde{D}_1'$ において調和であり，$x \in \partial\tilde{K}_0$ ならば $\tilde{N}(x, y)=0$ であるから，補題 1.2

（において S_2 が空である場合）により，$\rho(y, y') < \varepsilon$ なる $y, y' \in R - D_2$ に対しては $\sup_{x \in \widetilde{D}_1'} |\widetilde{N}(x, y) - \widetilde{N}(x, y')| \leqq \widetilde{\varepsilon} / \int_{\widetilde{D}_1'} dx$ となる．だから $\widetilde{\rho}_1$ の定義により，$\widetilde{\rho}_1(y, y') < \widetilde{\varepsilon}$ となる．

ii）の証明．上の（3.4）と同様に，$x \in \partial\widetilde{D}_1$ および $y, y' \in R - D_2$ に対して

$$N(x, y) - N(x, y') = \widetilde{N}(x, y) - \widetilde{N}(x, y')$$
$$+ \int_{\partial\widetilde{K}_0} N(x, z) \left\{ \frac{\partial \widetilde{N}(z, y)}{\partial n_z} - \frac{\partial \widetilde{N}(z, y)}{\partial n_z} \right\} dS_z .$$

ここで $N(x, z)$ は $\partial\widetilde{D}_1 \times \partial\widetilde{K}_0$ で有界であり，$\widetilde{N}(x, y)$，$\partial\widetilde{N}(z, y)/\partial n_z$ は $(\partial\widetilde{D}_1 + \partial\widetilde{K}_0) \times (R - D_2)$ において距離 $\widetilde{\rho}$ に関して一様連続であるから，i）の証明と同様に，任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な $\widetilde{\varepsilon} > 0$ をとれば，$y, y' \in R - D_2$，$\rho(y, y') < \varepsilon$ なるかぎり $\sup_{x \in \partial\widetilde{D}_1} |N(x, y) - N(x, y')| < \varepsilon / \int_{D_1'} dx$，従って $\sup_{x \in D_1'} |N(x, y) - N(x, y')| < \varepsilon / \int_{D_1'} dx$ となる．だから ρ_1 の定義により $\rho_1(y, y') < \varepsilon$ となる．（証明終り）

<u>定義</u>．上のようにして構成された $\hat{S} = \hat{R} - R$ を Laplace-Beltrami 作用素 A に対する R の<u>念封境界</u>という．

（2.24）で定義されたポテンシャル $N\mu(x)$ を，μ が $R' + \hat{S}$ の上の Borel 測度であって

$$(3.5) \qquad N\mu(x) = \int_{R' + \hat{S}} N(x, y)\, d\mu(y)$$

が $\not\equiv \infty$ である場合に，拡張しておく．

§4. Dirichlet 原理とその関連事項. KをR'の中の regular なコンパクト集合，φを∂Kの上の連続函数とするとき，

$$\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)=\left\{u;\ \begin{array}{l} R-K_0^\circ-K^\circ \text{ で連続, } R'-K \text{ で区分的に滑} \\ \text{らかであって } \|u\|_{R'-K}<\infty,\ u|_{\partial K_0}=0,\ u|_{\partial K}=\varphi \end{array}\right\}$$

とおく. 例えば$\varphi\in C^2(\partial K)$ならば$\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)\neq\phi$である.

<u>定理 4.1.</u> $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)\neq\phi$ならば，$\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$の中で最小の Dirichlet 積分をもつ$u(x)$がただ一つ存在し，その$u$は$R'-K$で調和であって

(4.1) 任意の$v\in\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$に対して$(v-u,\ u)_{R'-K}=0$.

<u>証明.</u> まず，最小の Dirichlet 積分をもつuが存在するとして，それが(4.1)を満たすことを証明する. 任意の$v\in\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$と任意の$\varepsilon>0$に対して$\|u\|_{R'-K}^2\leqq\|u\pm\varepsilon(v-u)\|_{R'-K}^2$だから

$$0\leqq\pm2\varepsilon(u,\ v-u)_{R'-K}+\varepsilon^2\|v-u\|_{R'-K}^2.$$

この両辺をεで割って$\varepsilon\downarrow0$とすると$\pm(u,\ v-u)_{R'-K}\geqq0$; これより(4.1)を得る.

次にこのようなuの一意性を示す. u, vがともに最小の Dirichet 積分をもつとすると，(4.1)により

$$(u-v,\ u)_{R'-K}=0,\qquad (u-v,\ v)_{R'-K}=0$$

となるから，この二つの等式で辺々引くと$(u-v,\ u-v)_{R'-K}=0$となる. このことと$u|_{\partial K_0}=v|_{\partial K_0}=0$とから$u\equiv v$となる.

最後に，そのようなuの存在を示す. $K\subset D_{n_0}'$なるn_0を一つ定め，任意の$v\in\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$をとる. 任意の$n>n_0$に対して，$D_n'-K$において調和な函数$u_n$で，$u_n|_{\partial K_0}=0$，$u_n|_{\partial K}=\varphi$，$\partial u_n/\partial n|_{\partial D_n}=0$と

なるものが存在する．このとき Green の公式により $(v-u_n,\ u_n)_{D_n'-K}=0$ となるから

$$\|u_n\|^2_{D_n'-K}=(v,\ u_n)_{D_n'-K}\leqq\|v\|_{D_n'-K}\|u_n\|_{D_n'-K};$$

よって $\|u_n\|_{D_n'-K}\leqq\|v\|_{D_n'-K}\leqq\|v\|_{R'-K}<\infty$．だから補題 1.3（$\Omega=R'-K$ とする）により $\{u_n;\ n>n_0\}$ の部分列 $\{u_{n(k)}\}$ と，$R'-K$ で調和な函数 $u(x)$ が存在して

$$\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}u_{n(k)}(x)=u(x) & (R-K_0^\circ-K^\circ\ \text{で広義一様収束})\\ \lim\limits_{k\to\infty}|\nabla\{u_{n(k)}(x)-u(x)\}|=0 & (R-K_0^\circ\ \text{で広義一様収束}).\end{cases}$$

だから $u|_{\partial K_0}=0$，$u|_{\partial K}=\varphi$ となり，また Fatou の補題により

$$\|u\|^2_{R'-K}\leqq\lim_{k\to\infty}\|u_{n(k)}\|_{D'_{n(k)}-K}\leqq\|v\|^2_{R'-K}.$$

だから u は $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$ の中で Dirichlet 積分最小のものである．

（証明終り）

上のような函数 u を今後 φ_K で表わす．このとき；

<u>系 4.1.1.</u> i) 任意の $v\in\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$ に対して $(v-\varphi_K,\ \varphi_K)_{R'-K}=0$.

ii) $\min\{\min\limits_{\partial K}\varphi,\ 0\}\leqq\varphi_K(x)\leqq\max\{\max\limits_{\partial K}\varphi,\ 0\}\quad(x\in R'-K^\circ)$.

iii) $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$, $\mathcal{D}_{R'-K}(\psi)\neq\phi$ ならば $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi+\psi)$, $\mathcal{D}_{R'-K}(c\varphi)\neq\phi$（$c$ は任意の定数）であって，$(\varphi+\psi)_K=\varphi_K+\psi_K$，$(c\varphi)_K=c\varphi_K$.

i) は (4.1) の書きかえである．ii), iii) は定理 4.1 の $\varphi_K=u$ の構成と一意性からわかる —— ii) の証明には補題 1.2 を使う．

<u>系 4.1.2.</u> K_1, K_2 は R' の中の regular なコンパクト集合であって，$K_1\subset K_2^\circ$ とし，φ は ∂K_1 の上で連続であって $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)\neq\phi$ と

すると，$\mathcal{D}_{R'-K_2}(\varphi_{K_1})\neq\phi$ であって，$R'-K_2^\circ$ の上で $(\varphi_{K_1})_{K_2}=\varphi_{K_1}$ となる．

証明は［3］の定理2とまったく同じ方法でできる．

さて，$C_{\mathcal{D}}(\partial K)=\{\varphi;\ \varphi\in C(\partial K),\ \mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)\neq\phi\}$ とし，φ_K を任意の $\varphi\in C(\partial K)$ にまで拡張する．$C_{\mathcal{D}}(\partial K)$ は $C(\partial K)$ の線型部分空間であり，任意の $x\in R'-K^\circ$ を固定するとき，$\varphi_K(x)$ は $C_{\mathcal{D}}(\partial K)$ の上の正値線型汎函数で $|\varphi_K(x)|\leqq\max_{\partial K}|\varphi|$ を満たす（系4.1.1）．一方，$C_{\mathcal{D}}(\partial K)$ は $C^2(\partial K)$ を含むから $C(\partial K)$ で稠密である．だから $\varphi_K(x)$ は $C(\partial K)$ の上の有界正値線型汎函数に一意的に拡張せられ，従って ∂K の上の $\mu_K^x(\partial K)\leqq 1$ なる Borel 測度 μ_K^x が存在して

$$(4.2)\qquad \varphi_K(x)=\int_{\partial K}\varphi(y)\,d\mu_K^x(y)\qquad \varphi\in C(\partial K).$$

さらに，∂K の上の任意の Borel 可測函数 φ に対して

$$(4.3)\qquad \varphi_K^{\pm}(x)=\int_{\partial K}\varphi^{\pm}(y)\,d\mu_K^x(y)\qquad \left(\begin{array}{l}\varphi^+=\max\{\varphi,0\}\\ \varphi^-=\max\{-\varphi,0\}\end{array}\right)$$

と定義し，$\varphi_K^+(x)$，$\varphi_K^-(x)$ の少なくとも一方が各点 $x\in R'-K^\circ$ で有限なとき次の定義をする：

$$(4.4)\qquad \varphi_K(x)=\varphi_K^+(x)-\varphi_K^-(x).$$

このとき，系4.1.2の拡張として，

<u>定理4.2.</u> K_1，K_2 を R' の中の regular なコンパクト集合であって $K_1\subset K_2^\circ$ とし，φ を ∂K_1 の上の下半連続函数とすると，$R'-K_2^\circ$ において $(\varphi_{K_1})_{K_2}=\varphi_{K_1}$ となる．

証明. 系4.2.1と上記のφ_Kの拡張により，任意の$\varphi \in C(\partial K_1)$に対してこの定理が成立し，従って$C(\partial K_1)$に属する函数の単調増加列の極限としての下半連続函数に対して成立する.

次に，前述の核函数$N(x, y)$と，R'の中のregularなコンパクト集合Kに対して，$N_K(x, y)$を次のように定義する：$y \in R - K_0^\circ + \hat{S}$を任意に固定すると，$\varphi(x) = N(x, y)$は$\partial K$の上で下半連続だから$\varphi_K(x)$が$R - K_0^\circ - K^\circ$で定義される；これを$N_K(x, y)$と書く．このとき，

定理4.3. R'の中の任意のregularなコンパクト集合Kと，$R' + \hat{S}$の上の任意のBorel測度μに対して；$R' - K$の上で$(N\mu)_K \leqq N\mu$が成立する；特に$S[\mu] \subset K^\circ$ならば$\leqq$は$=$になる.

証明は[1]の定理5と同じ方法による；$y \in \hat{S}$に対する$N_K \leqq N$の証明は，$y \in R'$の場合の極限を考えればよい.

定理4.4. R'の中の任意のregularなコンパクト集合Kと，∂Kの上の任意の下半連続函数φに対して，$R' - K$の各連結成分においてφ_Kが恒等的に∞ではないかぎり，φ_Kはその成分において調和である.

証明. φが∂K上の連続函数で$\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi) \neq \phi$の時は，$\varphi_K$の調和なことは定理4.1で証明されている．だから，φ_Kの拡張の定義と，調和函数の一様収束列の極限，単調増加列の極限で恒等的に∞でないものが，いずれも調和函数になることによって，この定理の成立することがわかる.

§5. FH函数とFSH函数. 下記の定義においては, $v(x)$ は R' 上で正の値をとる下半連続函数で恒等的に∞ではないものとする. また, そのような v と R' の中の regular なコンパクト集合 K に対して, $\varphi = v|_{\partial K}$ から§4に述べたように定義した φ_K を v_K と書く.

定義. i) R' の中の任意の regular なコンパクト集合 K に対して $R'-K$ 上で $v_K(x) \leqq v(x)$ となるとき, $v(x)$ を FSH 函数または full superharmonic function (全優調和函数) という; さらに $v(x)$ が R' で調和であるとき, FH 函数または full harmonic function (全調和函数) という.

ii) $v(x)$ が FSH 函数であり, $(K_m)^\circ \supset K_{m+1}$ $(m \geqq 1)$, $\lim_{m\to\infty} K_m = K_0$ を満たす任意の regular なコンパクト集合の列 $\{K_m\}$ に対して R' 上で $\lim_{m\to\infty} v_{\partial K_m}(x) = 0$ となるとき, $v(x)$ を FSH_0 函数という; さらに $v(x)$ が R' で調和であるとき, FH_0 函数という.

注意. 任意の FH_0 函数は ∂K_0 上で境界値0をとる (系5.1.2; 後述) が, FSH_0 函数は必ずしもそうでない. 反例: $E = \{z_1, z_2, \cdots\}$ を ∂K_0 の中の高々可算無限の集合とする (∂K_0 において稠密にもなり得る). 各 $z_n \in E$ に対して, それに収束する点列 $\{z_{n\nu};\ \nu = 1, 2, \cdots\}$ を R' の中にとる. $u(x) = \sum_{n,\nu} 2^{-(n+\nu)} N(x, z_{n\nu})$ は FSH_0 函数 (下記補題5.3参照) であるが, 任意の $z_n \in E$ に対して $\overline{\lim_{x\to z_n}}\, u(x) = \infty$ となる.

補題5.1. FSH 函数は優調和である.

証明. v が FSH 函数ならば, コンパクトな閉包 $\overline{\Omega} \subset R'$ をもつ任

意の regular な領域 Ω に対して，Ω 上で $v_{\partial\Omega} \leqq v$ となる．このことから v の優調和なことがわかる．

<u>補題 5.2.</u> $\{v_n\}$ が FSH 函数の列で，R' 上で $v(x)=\lim_{n\to\infty} v_n(x)$ が存在して下半連続かつ $\not\equiv\infty$ ならば，v も FSH 函数である．

<u>証明.</u> 任意の regular なコンパクト集合 K と任意の $x \in R'-K$ に対して，Fatou の補題によって

$$v_K(x)=\int_{\partial K} v(y)\,d\mu_K^x(y) \leqq \varliminf_{n\to\infty}\int_{\partial K} v_n(y)\,d\mu_K^x(y) \leqq \lim_{n\to\infty} v_n(x)=v(x)$$

となるからである．

<u>補題 5.3.</u> $R'+\mathfrak{F}$ 上の任意の Borel 測度 μ に対して，ポテンシャル $N\mu$ は FSH_0 函数である．

証明は [1] の定理 6 と同じ．

<u>補題 5.4.</u> $\{v_n\}$ が FSH_0 函数の列で，R' 上で $v(x)=\lim_{n\to\infty} v_n(x)$ が存在して下半連続，かつ R' 上の FSH_0 函数 $u(x)$ で $v(x) \leqq u(x)$ なるものが存在するならば，v も FSH_0 函数である．

証明は，補題 5.2 と $v(x) \leqq u(x)$ とから容易にできる．

R' 上の FSH 函数 v と，R' の中の regular なコンパクト集合 K に対して，$R'-K$ で定義されている函数 v_K を，K の上では $v_K = v$ とおくことにより，R' 全体に拡張する．このとき次の定理は，[1] の定理 7 と同様に証明される：

<u>定理 5.1.</u> R' 上の任意の FSH 函数 v と，任意の regular なコンパクト集合 $K \subset R'$ に対して，v_K は $S[\mu] \subset K$ なる測度 μ のポテンシ

アル $N\mu$ に等しい。

系 5.1.1. 上の定理の v_K は FSH_0 函数である。

このことは上の定理と補題 5.3 とから明らかである。

系 5.1.2. 任意の FH_0 函数は、∂K_0 上で境界値 0 をとる。

証明は [1] の §7 の補題 4 と同じ。

定理 5.2. 任意の FSH 函数は、ある FH 函数とポテンシャルとの和で表わされる。

証明は [1] の定理 8 と同じ。

ここで、任意の FSH 函数 v と、$R'+\hat{S}$ の中の任意の開集合 Ω に対して、v_Ω を

$$(5.1)\qquad v_\Omega(x)=\sup_{K\in\mathcal{R}_\Omega} v_K(x)\ (\leqq v(x))$$

によって定義する。ここに $\mathcal{R}_\Omega$ は $\Omega\cap R'$ に含まれる regular なコンパクト集合の全体を表わす。任意の開集合 $\Omega\subset R'+\hat{S}$ に対して、

$$(5.2)\qquad \{K_m\}\subset\mathcal{R}_\Omega,\ K_m\subset\mathring{K}_{m+1},\ \bigcup_{m=1}^{\infty}K_m=\Omega\cap R'$$

となるような列 $\{K_m\}$ は必ずとれるが、このような任意の $\{K_m\}$ に対して

$$(5.3)\qquad v_\Omega(x)=\lim_{m\to\infty} v_{K_m}(x)\ (\text{単調増加列の極限})$$

となることは容易に証明される。これらのことから、次の二つの補題が証明される（補題 5.6 の証明には、補題 5.2 と 5.4 も使われる）：

補題 5.5. 任意の FSH 函数 u, v と、任意の開集合 $\Omega\subset R'+\hat{S}$ に対して $(u+v)_\Omega=u_\Omega+v_\Omega$.

補題 5.6. 上に定義された v_Ω は FSH 函数である。特に $\bar{\Omega}\cap K_0=\phi$ ならば、v_Ω は FSH_0 函数である。

定理 5.3. Ω_1, Ω_2 が $R'+\hat{S}$ の中の開集合で $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば、任意の FSH 函数に対して $(v_{\Omega_1})_{\Omega_2} = v_{\Omega_1}$.

証明. (5.1) により $x \in \Omega_1$ ならば $v_{\Omega_1}(x) = v(x)$ となるから、任意の $K \in \mathcal{R}_{\Omega_1}$ に対して R' 上で $(v_{\Omega_1})_K = v_K$, 従って $(v_{\Omega_1})_{\Omega_1} = v_{\Omega_1}$ となり、このことから $(v_{\Omega_1})_{\Omega_2} \geqq (v_{\Omega_1})_{\Omega_1} = v_{\Omega_1}$ を得る. 一方、補題 5.6 により、任意の $K' \in \mathcal{R}_{\Omega_2}$ に対して $(v_{\Omega_1})_{K'} \leqq v_{\Omega_1}$ であるから、(5.1) により $(v_{\Omega_1})_{\Omega_2} \leqq v_{\Omega_1}$ となる. (証明終り)

次に, $\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対して, $R'+\hat{S}$ の中の開集合 Ω で Γ を含むものの全体を $\mathcal{U}_\Gamma$ とし, 任意の FSH 函数 v に対して

(5.4) $$v_\Gamma(x) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_\Gamma} v_\Omega(x)$$

と定義する. 任意の閉集合 $\Gamma \subset \hat{S}$ に対して,

(5.5) $$\{\Omega_m\} \subset \mathcal{U}_\Gamma, \quad \Omega_m \supset (\Omega_{m+1})^a, \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Gamma$$

(上の添え字 ^{a} は $\hat{R}$ における閉包演算) となるような $\{\Omega_m\}$ は必ずとれるが, このような任意の $\{\Omega_m\}$ に対し

(5.6) $$v_\Gamma(x) = \lim_{m\to\infty} v_{\Omega_m}(x) \quad \text{(単調減少の極限)}$$

となることは容易に証明される. 従って, 補題 5.5 および 5.6 に対応して; ——

補題 5.7. 任意の FSH 函数 u, v と, 任意の閉集合 $\Gamma \subset \hat{S}$ に対して $(u+v)_\Gamma = u_\Gamma + v_\Gamma$.

補題 5.8. 上に定義された v_Γ は FSH_0 函数である.

これらの補題は, 以下の §6 における定理の証明(本稿中では省略)の中で使われる.

○ 以後の理論の構成は［1］と完全に平行にできるから，筋道だけを述べる．

§6. FH_0函数，FSH_0函数の積分表示．

定理 6.1．任意の FSH_0函数（または FH_0函数）は，$R'+\hat{S}$の上（または$\hat{S}$の上）の測度 μ のポテンシャル $N\mu$ で表わされる；逆も成立する．

証明は［1］の定理13と同様である（その中で，$\xi\in\hat{S}$に対して $N_K\leqq N$ を証明する部分は，本稿では定理4.3で述べてある）．

補題6.1．v を FSH函数とし，Ω を $R'\cup\hat{S}$ の部分領域で $\Omega^a\cap K_0=\phi$ なるものとすると，$S[\mu]\subset\Omega^a$ なる測度μが存在して，R'において $v_\Omega=N\mu$ が成立する．

証明は［1］の定理14と同じ方法による；（5.2）を満たす$\{K_m\}$をとり，Ω と$\{K_m\}$とをそれぞれ［1］の F と$\{F_m\}$のように considerればよい。

従ってまた，次の補題も［1］の定理15と同様にして証明される．

補題6.2．v が FSH函数，μ が $R'+\hat{S}$の上の測度，Ω が $R'+\hat{S}$の部分領域ならば，R'において $(N\mu)_\Omega=N_\Omega\mu$ が成立する．

次の二つの定理は，それぞれ［1］の定理16，定理17と同様に証明される；［1］における$\{A^{(m)}\}$のかわりに，（5.5）のような$\{\Omega_m\}$を考えて，上の二つの補題を使えばよい．

定理 6.2．v が FSH 函数，Γ が $\hat{S}$ の中の閉集合とすると，$S[\mu]\subset\Gamma$ なる測度μ が存在して，

$$(6.1)\qquad v_\Gamma(x)=\int_\Gamma N(x,\xi)d\mu(\xi),\qquad \mu(\Gamma)=\int_{\partial K_0}\frac{\partial v_\Gamma}{\partial n}dS.$$

（註：次の頁下）

定理 6.3. μ を $R'+\hat{S}$ の上の測度，Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合とすると，R' において $(N\mu)_\Gamma = N_\Gamma \mu$.

次の定理は [1] にはないから，証明を（簡単であるが）与えておく．

定理 6.4. 任意の FH_0 函数 v に対して $v_{\hat{S}} = v$.

証明. $\{D_n\}$ を §1 に述べたような領域の列とし，$\Omega_n = \hat{R} - \overline{D_n}$，$K_n = \overline{D_{n+2}} - D_{n+1}$ $(n \geq 1)$ とおく．このとき $K_n \subset \Omega_n$ であるから，$v_{K_n} \leqq v_{\Omega_n} \leqq v$ である．一方，∂D_{n+1} $(\subset \partial K_n)$ の上で $v_{K_n} = v$ であり，また系 5.2.1 により ∂K_0 の上で $v_{K_n} = v = 0$ であって，v_{K_n} も v も $D_{n+1} - K_0$ で調和だから，D'_{n+1} で $v_{K_n} = v$，従って $v_{\Omega_n} = v$ となる．$\{\Omega_n\}$ は (5.5) において $\Gamma = \hat{S}$ としたものを満たすから，(5.6) によって $v_{\hat{S}} = v$ を得る．

以下の各定理も [1] の定理 18, 19, 20 にならって証明できる；上の定理 6.2 の場合と同様に，[1] の $\{A^{(m)}\}$ を本稿の $\{\Omega_m\}$ でおきかえる（定理 6.6 の証明では定理 5.3 が使われる）．

定理 6.5. v が R' において区分的に滑らかで $\|v\|_{R'} < \infty$ なる FSH 函数ならば，$\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対して $(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$ となる．

特に R' 上で $\omega(x) \equiv 1$ なる函数 ω に上の定理を適用できるから

$$(\omega_\Gamma)_\Gamma = \omega_\Gamma \tag{6.2}$$

定理 6.6. v を FSH 函数，Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合で $\omega_\Gamma \equiv 0$ なるものとすると，$(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$ となる．

(註) (6.1) の第2式は，第1式と系 2.1.2 とから容易にわかる．

§7. 境界点の分類, 標準表現, 極値的函数. この§においても前の§と同様に, [1] の中での F, $\{F_m\}$, A, $\{A^{(m)}\}$ がそれぞれ本稿における Ω, $\{K_m\}$, Γ, $\{\Omega_m\}$ に対応することに注意すれば, 以下の各定理はすべて [1] にならって証明できるから, 以下単に理論の筋道になる定理を並べて, [1] の中の対応する(同じ方法で証明される)定理の番号を記すだけにする.

まず§4で述べた $N_K(\cdot,y)$ と同様に $N_\Gamma(\cdot,y)$ (Γ は $\hat{S}$ の閉部分集合) を定義し, 特に $\Gamma=\{\xi\}$ (一点 $\xi\in\hat{S}$ から成る集合) の場合を考えて,

$$(7.1) \qquad \alpha(\xi)=\int_{\partial K_0}\frac{\partial N_{\{\xi\}}(x,\xi)}{\partial n_x}\,dS_x \qquad (\xi\in\hat{S})$$

とおく. このとき

定理 7.1. 任意の $\xi\in\hat{S}$ に対して, $\alpha(\xi)=0$ または 1 であり, それに従って $N_{\{\xi\}}(x,\xi)=0$ または $N(x,\xi)$ となる.

([1] 定理21 およびその系.)

ここで $\hat{S}_0=\{\xi\in\hat{S}\,;\,\alpha(\xi)=0\}$, $\hat{S}_1=\{\xi\in\hat{S}\,;\,\alpha(\xi)=1\}$ とおくと, [1] 定理22, 定理23, 定理24 およびその系と同様にして;——

定理 7.2. $\hat{S}_0$ は F_σ 集合である.

定理 7.3. v が FSH 函数ならば, $\hat{S}_0$ の任意の閉部分集合 Γ に対して $v_\Gamma\equiv 0$ である.

定理 7.4. v が FSH 函数で, Γ が $\hat{S}$ の閉部分集合ならば, v_Γ は $\int_{\Gamma\cap\hat{S}_1}N\,d\mu$ の形に表わされる. 特に任意の FH_0 函数は $\int_{\hat{S}_1}N\,d\mu$ の形に表わされる.

定義. i) $\hat{S}$ 上の測度 μ で $\mu(\hat{S}_0)=0$ なるものを標準測度といい，標準測度による $\int_{\hat{S}_1} N d\mu$ の形の表現を標準表現という．

ii) u が FH_0 函数であって，v および $u-v$ がともに FH_0 函数であるような函数 v は $v=cu$ (c は定数 ≥ 0) にかぎるとき，u は極値的 (extremal) であるという —— [1] では minimal と呼んでいる．

このとき，[1] の定理 26，定理 27 およびその系に対応して；——

定理 7.5. i) u を極値的 FH_0 函数，Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合とする．いま $u_\Gamma \gneq 0$ であって $u-u_\Gamma$ が FH_0 函数ならば，一点 $\xi_0 \in \Gamma \cap \hat{S}_1$ があって

$$(7.2) \qquad u(x)=cN(x,\xi_0), \quad ここに \quad c=\int_{\partial K_0} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

ii) 任意の極値的 FH_0 函数は，ある $\xi \in \hat{S}_1$ に対する $N(x,\xi)$ の定数倍である．

iii) $N(x,\xi)$ は $\xi \in \hat{S}_1$ のとき，かつそのときにかぎり，x の極値的 FH_0 函数である．

(註. (7.2) の ξ_0 が u によって一意的に定まることは，系 3.2.2 によってわかる．)

定理 7.6. 任意の FH_0 函数の標準表現は一意的である；従って，任意の FH_0 函数 v と $\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対して，v_Γ に対する標準測度の台は Γ に含まれる．

以上で Martin 境界の場合 [4] に対応する理論が ([4] の §6 を除き) 一応構成されたことになる．

文　　　献

（本文中で直接引用したもののみを記す．他の関連文献は［1］の末尾の文献表を見られたい．）

［1］ M. Ohtsuka, An elementary introduction of Kuramochi boundary, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, Vol. 28 (1964), 271－299.

［2］ Z. Kuramochi, Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces, II, Osaka Math. J., Vol. 8 (1960), 145－186.

［3］ S. Itô, Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Jap. J. Math., Vol. 27 (1957), 55－102.

［4］ S. Itô, Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold, J. Math. Soc. Japan, Vol. 16 (1964), 307－334.