数理解析研究所講究録
第 27 巻 1967 年 61-71

点推定における admissibility について

阪大. 理工. 草間時武

§0. 点推定論における admissibility の研究にはいくつかの論文があるが本講演ではその中で最も重要と思われる二つの論文

J. Sacks　Generalized Bayes solutions in estimation problems A.M.S. 34 (1963)

S. Karlin　Admissibility for estimation with quadratic loss. A.M.S. 29 (1958)

を中心に述べたい.

§1. 決定関数論においては Bayes 解の全体 $\mathcal{B}$ の regular topology による closure $\mathcal{B}^\alpha$ が完全類であることは良く知られている. (Bayes 解, regular topology 等については工藤教授の講演において説明されるはずである) しかし $\mathcal{B}^\alpha$ にぞくする決定関数がどのようにして求められるのかは難かしい問題である. J. Sacks は密度関数 $p(x,\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ と損失関数 $W(\omega,t)$ に制限を与えて $\mathcal{B}^\alpha$ にぞくする決定関数を求める方法を示した. F を a priori measure (通常確率測度とする) とするとき F に関する Bayes 解は標本 x に対して

$$\int_\Omega W(\omega,t)\,p(x,\omega)F(d\omega) \Big/ \int_\Omega p(x,\omega)F(d\omega) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

を最小にする t 決定を行うものである.

ここでFが確率測度とかぎらずΩの有界集合Sでは$F(S)<\infty$となるmeasure（したがってΩが有界でなければ$F(\Omega)=\infty$であってもよい）であるときほとんどすべてのxに対して(1)を最小にする決定tを行う決定関数をSacksは一般化されたBayes解と名づけた．

$\mathbb{B}^{\alpha}$から$\delta(\pm\infty\,|\,x)\neq 0$となる$x$のmeasureが$0$でないような$\delta$をのぞいた集合を$\mathbb{B}_0$とする．後で述べる假定1より$\mathbb{B}_0$は完全類である．これから述べるいくつかの假定のもとで$\delta\in\mathbb{B}_0$は一般化されたBayes解であることを示すことが主要な目的であり その証明の大ざっぱなoutlineを述べる．

μを実数上のσ-finite measureとする．$\Omega=\{\omega\,|\int e^{x\omega}\mu(dx)<\infty\}$とし$\omega\in\Omega$に対して密度関数$p(x,\omega)$を$p(x,\omega)=\rho(\omega)e^{x\omega}$とする．証明の本質にかゝわりないので$\Omega=(-\infty,\infty)$とし決定空間も$[-\infty,\infty]$とする．

regular topologyの意味でδ_nがδに収束すれば；

すべての$x\in E$ $(\mu(E)>0)$ とすべての有界集合Cに対して

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(C\,|\,x)=0$$

ならば ほとんど すべての$x\in E$とすべての有界集合Cに対して

$$\delta(C\,|\,x)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

またCがコンパクトのとき すべての$x\in E$で

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(C\,|\,x)=1$$

ならば ほとんどすべての$x\in E$で

$$\delta(C\,|\,x)=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

に注意しておく．(3)はこの議論で重要である．

假定は損失関数$W(\omega,t)$に関するものである．

假定1　$0\leqq W(\omega,t)<\infty$，$W(\omega,t)$は$\omega$と$t$に関して連続，$\omega$のコンパクト集合上で 一様に$W(\omega,t)\to\infty$ $(t\to+\infty,-\infty)$

假定2. $w > t > s$ なら $W(w, t) < W(w, s)$ で，かつ

$$\inf_{w \geqq t} [W(w, s) - W(w, t)] > 0$$

$w < t < s$ ならば $W(w, t) < W(w, s)$，かつ

$$\inf_{w \leqq t} [W(w, s) - W(w, t)] > 0$$

假定3 すべての t と $\varepsilon > 0$ で

$$\sup_{w \leqq 0} W(w, t) e^{\varepsilon w} < \infty, \quad \sup_{w \geqq 0} W(w, t) e^{-\varepsilon w} < \infty,$$

$$\lim_{A \to \infty} \sup_{w \geqq A} W(w, t) e^{-\varepsilon w} = \lim_{A \to \infty} \sup_{w \leqq -A} W(w, t) e^{\varepsilon w} = 0$$

假定1～3 をみたす損失関数 W はたとえば

$$W(w, t) = |w - t|^{\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

がその例である.

定理. δ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を Bayes 解の列とし regular topology の意味で $\delta_n \to \delta$ であり $\delta \in \mathfrak{B}_0$ ならば ほとんどすべての $x \in (z_0, z_1)$ で $\delta(B_x \mid x) = 1$ がなりたつ.

こゝに B_x は ある measure F (有界集合 S では $F(S) < \infty$) に対して

$$B_x = \left\{ t \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} W(w, t) p(x, w) F(dw) \text{ を最小にする} \right\}$$

と表わされる集合であり，z_0, z_1 は measure μ の support の下限と上限とする.

証明 先ず Lemma を二つ証明なしで述べておく.

Lemma 1. δ_n を a priori measure ξ_n に関する Bayes 解とする. $\{\xi_n\}$ の部分列 $\{\xi_{n_k}\}$ と a で次の性質をみたすものがある.

すべての $b<\infty$ に対し $\limsup_{k\to\infty} \xi_{n_k}(-b,\,b)/\xi_{n_k}(-a,a) < \infty$ ……(4)

Lemma 2. ほとんどすべての $x \in (z_0, z_1)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,\omega)F_n(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,\omega)F(d\omega) < \infty$$

また t のコンパクト集合上で一様に

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega,t)p(x,\omega)F_n(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega,t)p(x,\omega)F(d\omega) < \infty.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega,t)p(x,\omega)F(d\omega)$ は t の連続関数である.

定理の証明の概略 Lemma 1 により (4) をみたす $\{\xi_{n_k}\}$ と a が存在する. $F_{n_k} = \xi_{n_k}/\xi_{n_k}(-a,a)$ とおくと (4) より $\{F_{n_k}\}$ の部分列 $\{F_{r_i}\}$ と measure F が存在して $F_{r_i} \longrightarrow F$ (弱収束の意味で). (4) より F は有界集合 S で $F(S)<\infty$ であり $F(-a,a)=1$ だから $F(\Omega)\neq 0$. $\{\xi_{r_i}\}$ は最初の列 $\{\xi_n\}$ と假定しても一般性を失わないので $F_n \to F$ (弱収束) とする. δ_n は F_n に関する Bayes 解である.

$$H(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega,t)p(x,\omega)F(d\omega),\quad H(t,x,n) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega,t)p(x,\omega)F_n(d\omega)$$

$$m(x) = \inf_t H(t,x), \qquad m(x,n) = \inf_t H(t,x,n)$$

$B_{x,r} = \{t \mid H(t,x) \leqq m(x)+r\}$, $B^n_{x,r} = \{t \mid H(t,x,n) \leqq m(x,n)+r\}$ $(r \geqq 0)$ とおく. $r=0$ ならば $B_{x,0} = B_x$ であり, $\delta_n(B^n_{x,0} \mid x) = 1$ $(n=1,2,\cdots)$ である. $\delta(B_{x,0}|x) = 1$ (a.e. μ) であることを証明すればよい.

$\lim_{r\to 0}\delta(B_{x,r}|x) = \delta(B_{x,0}|x)$ だから $\delta(B_{x,0}|x) = 1$ (a.e. μ)
がなりたたないとするとすべての $r \leqq r_0$ と $x \in E_0$ ($E_0 \subset (z_0, z_1)$, $\mu(E_0) > 0$)
で $\delta(B_{x,r}\,|\,x) \leqq 1-\varepsilon_0$, $B_{x,r} \subset [-\gamma_0, \gamma_0]$ .... (5)
となる正数 r_0, γ_0, ε_0 と E_0 が存在する。仮定1とFatouのLemma
から $H(t,x)$ ($H(t,x,n)$) $\longrightarrow \infty$ ($t \to +\infty, -\infty$) であるから $B_{x,r}$
($B^n_{x,r}$) は有界, $H(t,x)$ ($H(t,x,n)$) は t の連続関数だから
$B_{x,r}$ ($B^n_{x,r}$) は closed したがってコンパクトである。したがって
γ_0 は存在する。

Lemma 2 により t のコンパクト集合上で $H(t,x,n)$ は $H(t,x)$ に
一様収束するから $m(x,n) \longrightarrow m(x)$. この一様収束性から

$$B^n_{x,r} \subset [-\gamma_1, \gamma_1] \quad (n=1,2,\dots) \quad x \in E_1, \quad r \leqq r_0$$

となる $\gamma_1 > 0$ と E_1 ($\subset E_0$, $\mu(E_1) > 0$) が存在することもわかる。
$r = r_0/4$ とすると十分大なる $n_0(x,r)$ が存在して

$$n \geqq n_0(x,r) \longrightarrow B^n_{x,r/2} \subset B_{x,r}.$$

$E_{kr} = \{x \mid B^n_{x,r/2} \subset B_{x,r},\ n \geqq k,\ x \in E_1\}$ とすると k を十分大きくとれば $\mu(E_{kr}) > 0$. $x \in E_{kr}$ ならば

$$1 = \delta_n(B^n_{x,r/2}\,|\,x) \leqq \delta_n(B_{x,r}|x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

二つの場合に分けて考える。

(i) $x^* \in E_{kr}$, $\mu(\{x^*\}) > 0$ となる x^* が存在する場合

(6)より

$$1 = \lim_{n\to\infty} \delta_n(B^n_{x^*,r/2}\,|\,x^*) \leqq \lim_{n\to\infty}\delta_n(B_{x^*,r}\,|\,x^*)$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n(B_{x^*,r}\,|\,x^*) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

$B_{x^*,r}$ がコンパクトであるから (3), (7) より $\delta(B_{x^*,r}\,|\,x^*) = 1$ がなり

たち(5)に矛盾する.

(ii) E_{kr} が atom を持たぬ場合

$x^* \in E_{kr}$ で E_{kr} に関する密度が1の点x^*が存在する. かかるx^*に対してはどんな$\eta>0$に対しても $\mu\{[x^*-\eta, x^*+\eta]\cap E_{kr}\}>0$ がなりたつ. Lemma 2 から $m(x)$ は連続関数(xの)であるから ηを十分小さくとれば

$$y\in E^*=[x^*-\eta,\ x^*+\eta]\cap E_{kr} \longrightarrow B_{y,r}\subset B_{x^*,2r}\subset B_{y,4r}.$$

$4r=r_0$ だから (5)より

$$\delta(B_{x^*,2r}\mid y)\leqq \delta(B_{y,4r}\mid y)\leqq 1-\varepsilon_0 \qquad (y\in E^*)\ \cdots\cdots(8)$$

$E^*\subset E_{kr}$ だから $n\geqq k$ ならば $y\in E^*$ に対して

$$1=\delta_n(B^n_{y,r/2}\mid y)\leqq \delta_n(B_{y,r}\mid y)\leqq \delta_n(B_{x^*,2r}\mid y)$$ したがって

(3)より $\delta(B_{x^*,2r}\mid y)=1$ これは(8)と矛盾する.

したがって (5)はなりたたない. 故に $\delta(B_{x,0}\mid x)=1$ (a.e. μ)

系1 $\mathcal{F}$ を有界集合 S では $F(S)<\infty$ となる measure F で, すべての t と x で(a.e. μ) $H(t,x)<\infty$ となる F 全体とする. $F\in\mathcal{F}$ に対して $\mathbb{B}_F$ を $\delta(B_x\mid x)=1$ (a.e. μ) となる δ の全体とする. $\mu(\{z_0\}\cup\{z_1\})=0$ でかつ假定1〜3のもとに

$$\mathbb{B}_0\subset\mathbb{B}^*=\cup\{\mathbb{B}_F\mid F\in\mathcal{F}\}$$ したがって $\mathbb{B}^*$ は完全類である.

系2 系1につけくわえて $W(\omega,t)$ が ω を fix すると t の強い意味の凸関数となるとき $\mathbb{B}_0=\mathbb{B}^*$ となる.

系1は定理からすぐわかる ($\mu(\{z_0\}\cup\{z_1\})=0$ の假定が必要なことは講演の時の説明にゆずる)

条えは W が凸関数であるから B_x は唯一点からなる集合であり，したがって $\mathcal{B}_F$ は唯一つの決定関数 δ_F からなる． δ_F はあきらかに non-randomized である． $\delta_F(\pm\infty \mid x) = 0$ $(a.e.\ \mu)$ だから $\delta_F \in \mathcal{B}^{\alpha}$ を示せば $\delta_F \in \mathcal{B}_0$ であることがわかる． F_n を F の $[-n, n]$ への restriction とし $\psi_n = F_n / F[-n, n]$ とする． δ_n を確率測度 ψ_n に対する Bayes 解とすると $\delta_n \to \delta_F$ $(n \to \infty)$ がなりたつ． 故に $\delta_F \in \mathcal{B}^{\alpha}$.

この問題において本質的な役割をするのは Lemma 2 のように思われる したがって密度函数がもっと一般的な場合にもこの定理はなりたつように思われる．

§2. Karlin の仕事は点推定論における admissibility の問題に大きな寄与をしたと思われる． 密度関数 $p(x, \omega)$ に対して $h(\omega)$ を推定する問題を考える． 損失関数は quadratic loss とする． そのときは non-randomized な決定関数のみを考えればよい． $a(x)$ が admissible な推定量であることを証明するのに Karlin は次のような方法を用いた．

$$r(\omega, a) = \int_X [a(x) - h(\omega)]^2 p(x, \omega)\, d\mu(x)$$ が危険関数となるが $r(\omega, b) \leqq r(\omega, a)$ $(\omega \in \Omega)$ なる推定量 $b(x)$ が存在すれば $b(x) = a(x)$ $(a.e.\ \mu)$ であることを証明すればよい．

$r(\omega, b) \leqq r(\omega, a)$ $(\omega \in \Omega)$ より

$$\int_X [b(x) - a(x)]^2 p(x, \omega)\, d\mu(x) \leqq 2 \int_X [a(x) - b(x)]\,[a(x) - h(\omega)]\, p(x, \omega)\, d\mu(x) \qquad \cdots\cdots (4)$$

が導びかれる　単調増加関数 $F(\omega)$ で

$$\int_\Omega h(\omega)p(x,\omega)\,dF(\omega) = a(x)\int_\Omega p(x,\omega)\,dF(\omega) \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

をみたすものが存在するとする　(9) の両辺を dF で積分し，積分順序の交換や (10) を用いれば

$$\int_X [b(x)-a(x)]^2\left[\int_\Omega p(x,\omega)\,dF(\omega)\right]d\mu(x) \leqq 0 \qquad (\omega \in \Omega)$$

がなりたつ。　故に $b(x)=a(x)$　(a.e. μ).

この定理にはいくつかの応用がある.

先ず X が密度関数 $\beta(\omega)e^{\omega x}$ を持つ場合を考える　Ω は $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x}d\mu(x) < \infty$ となる ω の全体で区間である.　$\theta(\omega)=E_\omega(X)$ $= -\beta'(\omega)/\beta(\omega)$ を大きさ 1 の標本 x から推定する問題を考えれば十分である.

Exponential family における十分統計量はまた exponential family に属するからである.

定理2　$\underline{\omega}$, $\overline{\omega}$ を Ω の下限，上限とする　$(\underline{\omega},\overline{\omega})$ の内点 C をてきとうにとって　$\int_C^b \beta^{-\lambda}(\omega)\,d\omega \to +\infty \qquad (b \to \overline{\omega})$

$$\int_a^C \beta^{-\lambda}(\omega)\,d\omega \to +\infty \qquad (a \to \underline{\omega}) \qquad a, b \in \Omega$$

がなりたてば $\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)x$ は $\theta(\omega)$ の admissible な推定量である

この定理から Ω と μ の様子によって色々異なった結果が得られる.

(イ)　$\Omega=(-\infty,\infty)$ で $\mu((0,\infty))>0$,　$\mu((-\infty,0))>0$ ならば $0<\gamma\leqq 1$ なる γ に対して γx は admissible な推定量である

(ロ)　$\Omega=(-\infty,\infty)$ で $\mu(\{0\})>0$ ならば $0<\gamma\leqq 1$ なる γ に対して

γx は admissible な推定量である。

(ハ) $\Omega=(-\infty,\ \infty)$ だけしか与えられていないときは x の admissibility がわかる。

一般に $\Omega=(a,\infty)$, 又は $(-\infty,b)$ (a,b は実数) のときは x は admissible な推定量にならない場合が多い。

次に $p(x,\omega)=\begin{cases} g(\omega)r(x) & 0\leqq x\leqq\omega \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

の場合を考える。ここに $r(x)>0$, $g^{-1}(\omega)=\int_0^{\omega} r(x)dx<\infty$ $(\omega\in(0,\infty))$, $g(\omega)\longrightarrow 0$ $(\omega\to\infty)$ とする。

$[1/g(\omega)]^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ を推定することにし $\gamma[1/g(x)]^{\alpha}$ なる形の推定量のみを考えると

定理　$\gamma[1/g(x)]^{\alpha}$ なる形の推定量で $[1/g(\omega)]^{\alpha}$ の admissible な推定量は $\gamma=(2\alpha+1)/(\alpha+1)$ の時のみである。

次の Translation parameter の推定問題を考える。X は密度関数 $p(x,\omega)=p(x+\omega)$ を持つとする ($p(\xi)$ は既知)。大きさ 1 の標本 x をもとにして $-\omega$ を推定するのに推定量 $\delta(x)=x$ の admissible であることが次の条件のもとで示される。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2p(\xi)d\xi<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi^2p^2(\xi)d\xi<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi p(\xi)d\xi=0 \quad \cdots\cdots$$

このとき $\delta(x)=x$ は $|g(x)-x|\leqq M<\infty$ をみたす推定量 $g(x)$ の全体のなかで admissible である。

もしこれ以外の $g(x)$ では (9) がなりたたないことが証明できれ

は $g(x)=x$ はすべての推定量のなかで admissible になる．
それは例えば $p(\xi)$ が $\xi<a, \xi>b$, $-\infty<a<b<\infty$ のとき $=0$，その他のとき $\geqq 0$ のときである．また $p(x,\omega)=p(x+\omega)$ が単調尤度比を持つときも $|g(x)-x|\leqq M<\infty$ をみたす $g(x)$ だけを考えればよい．　一般に δ_0 とそれほど違わない δ のなかでは δ_0 が admissible になると云うとき local admissible ということにすると，local admissibility の研究は一つの方向であろう．

今までは quadratic loss の場合のみを考えてきたが $W(\omega, a) = (a+\omega)^{2N}$ のときの translation parameter problem を考える．
(イ) $p(\xi)$ が symmetric，(ロ) $\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{2N}p(\xi)d\xi<\infty$, $\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{2N}p^2(\xi)d\xi<\infty$

のとき $|g(x)-x|\leqq M<\infty$ なる $g(x)$ のなかで x は admissible である．

最後に X が $p(x,\omega)=p(x+\omega)$ にしたがうときその n 個の観測結果 $x_1,\cdots,x_n$ から $-\omega$ を推定することを考える　Pitman の推定量は

$$\delta^*(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x_1 - T(y_2,\cdots,y_n)$$

ここに $y_i = x_i - x_1$

$$T(y_2,\cdots,y_n)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\xi p(\xi)\prod_{i=2}^{n} p(y_i+\xi)d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}p(\xi)\prod_{i=2}^{n} p(y_i+\xi)d\xi}$$

である　Girshick Savage は quadratic loss で δ^* が minimax (unique) であることを示し，Blackwell は X と ω が整数値をとり　$p(i+\omega)$　が有限個の i で >0 である場合に δ^* の admissibility を証明した　Karlin は δ^* の admissibility を

次の三つの場合に証明した。その方法はこの§のはじめに述べた方法である。

Case 1. $p(\xi)\begin{cases} \geqq 0 & -\infty < a \leqq \xi \leqq b < \infty \\ = 0 & \xi < a,\ b < \xi \end{cases}$

このときは $|g(x_1, y_2, \cdots, y_n) - \delta^*(x_1, y_2, \cdots, y_n)| \leqq M < \infty$

なる g のなかで δ^* が admissible になる。

Case 2 $\mathcal{X} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$,

$\Omega = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

$$P\{X = i \mid \omega\} = p(i + \omega), \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(j) = 1.$$

このときは

$\sum_{j=-\infty}^{\infty} j^2 \sqrt{p(j)} < \infty$ なる假定のもとで δ^* の admissibility が

証明される。

Case 3 $0 \leqq p(\xi) \leqq C$, $\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \sqrt{p(\xi)}\, d\xi < \infty$ かつ

$$\frac{p(\xi)p(y_2+\xi)\cdots p(y_n+\xi)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta)p(y_2+\theta)\cdots p(y_n+\theta)\,d\theta} \leqq C'$$ がすべての

$\xi, y_2, \cdots, y_n$ でなりたつ場合

このときも $|g(x_1, y_2, \cdots, y_n) - \delta^*(x_1, y_2, \cdots, y_n)| \leqq M < \infty$

をみたす g のなかで δ^* は admissible である。