

### 点推定問題の一例

区間  $(0, \theta]$  上の一様分布にしたがう観測値に  
もとづく,  $\theta$  の種々の推定量

大阪市大 理学部 森本治樹

区間  $(0, \theta]$  上の一様分布を  $P_\theta$  と書く. これはこの本の  
草間氏の報告 §2, 定理3の特殊な場合で,  $r(x) = 1$ ,  $g(\theta) = 1/\theta$  であるものをいうのである.  $\theta$  の推定とは  $\alpha = 1$  であるということだから, 2乗損失関数の下では

[定理A] (Karlin) 推定量  $\varphi_0(x) = 3/2 x$  は AD (admissible の略).  $\varphi(x) = kx$  ( $k \neq 3/2$ ) は IAD (inadmissible の略).

この問題に直接適用できる定理を, もう一つ挙げておく.

[定理B] (工藤[53]) 標本空間  $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$ ,  
母数空間  $\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i$  という分割が,

$$P_\theta \left( \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{X}_i \right) = 0, \quad \theta \in \Theta_n; \quad n=1, 2, \dots,$$

という条件を満足すると仮定する.  $\xi_i$  は  $\Theta$  上の  $\sigma$  有界測度で  $\xi_i(\Theta_i) = 1$  であるとする ( $i=1, 2, \dots$ ). また

$$r_i(\xi_i, \varphi) = \int_{\Theta} \int_{x_i} L(\varphi(x), \theta) dP_{\theta}(x) d\xi_i(\theta)$$

と定義する.

さらに推定量  $\varphi^*$  が次の条件をみたすとする.

もしも  $x_i$  上で  $\varphi^\dagger(x) = \varphi^*(x)$  a.e.  $P_{\theta}$ ,  $\theta \in \Theta$  でない限り

$$r_i(\xi_i, \varphi^*) < r_i(\xi_i, \varphi^\dagger).$$

以上の前提のもとで, もしもある推定量  $\varphi$  に対して

$$r_{\varphi}(\theta) \leq r_{\varphi^*}(\theta) \quad \theta \in \Theta$$

なら, それぞれの  $\xi_i$  について殆ど到る所で

$$r_{\varphi}(\theta) = r_{\varphi^*}(\theta).$$

現在の問題に対しては  $\mathcal{X} = \Theta = (0, \infty)$ ,  $L(\varphi(x), \theta) = (\varphi(x) - \theta)^2$  と仮定しており, また終結部の下線の個所は不要であることが容易に示される. つまり  $\varphi^*$  は AD になる事を注意しておく.

§ 1.  $\theta$  の推定量としてどのようなものが AD になるかを考えるのであるが, 最初に次の2つのことはすぐわかる.

[C]  $\varphi(x)$  が AD  $\Rightarrow \varphi(x) \geq x$ .

[D] "  $\Rightarrow \varphi(x)$  は単調増大.

何故なら,  $\bar{\varphi}(x) = \text{Max}(\varphi(x), x)$ ,  $\bar{\varphi}(x) = \varphi(\mu[\varphi_1(x) < y] \leq x \leq \mu[\varphi_1(x) = y])$  とおけば  $r_{\varphi}(\theta) \geq r_{\bar{\varphi}}(\theta) \geq r_{\bar{\varphi}}(\theta)$  で, それぞれの等号がすべての  $\theta \in \Theta$  について成立するのは両辺にあらわれる2つの推定量が互いに相等しいときだけである. なお  $\mu$  は Lebesgue 測度をあらわす.

§ 2. しばらく問題をさらに特殊化して  $\Theta = \{1, 2, \dots, n\}$  とする. このとき量小十分統計量は  $[x]$  となるので, [C], [D] のほかにさらに

[E]  $\varphi(x)$  が AD  $\Rightarrow \varphi(x)$  は  $[x]$  の関数.

そこで  $[x] = i$  のときの  $\varphi$  の値を  $\varphi_i$  とおく. また  $\Theta$  上に確率測度  $\xi$  をとり,  $\xi(\{i\}) = \xi_i$  とおく.  $\xi$  に対する Bayes 解は次の形で与えられる ([13]):

$$\varphi_i = \frac{\sum_{k=i}^n \xi_k}{\sum_{k=i}^n \frac{1}{k} \xi_k}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

この  $\varphi$  が一意にきまるのは  $\xi_n \neq 0$  のときで, そのとき  $\varphi$  は AD なのであるから, 逆にどのような  $\varphi$  が (1) の形に書けるかが問題になる. 結果は簡単で,

[F]  $n \geq y_i, y_{i+1} \geq y_i, y_i > i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )  
ならば  $\varphi$  は (1) の形に書け、従って AD.

何らかの  $i$  に対して  $y_i = i$  となる場合は、 $\xi_{i+1} = \dots = \xi_n = 0$  となる。このようなときは  $\times$  及び  $\oplus$  を  $(0, i]$  および  $(i, n]$  に分割して、それぞれの中で同じことを行い、[定理 B] を援用すれば、そのようなものも AD であることが示される。 $y_i = i$  となるような  $i$  がいくつあっても、分割をさらに細かくすればよいだけであるから、

[G]  $n \geq y_i, y_{i+1} \geq y_i, y_i \geq i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )  
ならば  $\varphi$  は AD.

これは [C][D][E] の逆になっている。それ故この問題に対しては、[G] の条件をみたす  $\varphi$  が最小完全類をなしていることがわかるのである。

§ 3. もとの問題にかえて、 $\Theta = (0, \infty]$  を任意の可算個の点列  $0 = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots$  を用いて  $\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i, \Theta_i = (\theta_i, \theta_{i+1}]$  に分割し、これに [定理 B] を適用することにする。各々の  $\Theta_i$  の中に有限個の点列  $\theta_i = \theta_{i1} < \theta_{i2} < \dots < \theta_{i+1}$  を取る。[定理 B] において  $\xi_i$  としては、これら有限個の点にのみ重さをもつ測度を考えれば、“どのような  $\varphi^*$  がこの定理の条件をみたすか？” という問題は各  $X_i = (\theta_i, \theta_{i+1}]$  の上

で §2. と同じ問題を解くことに帰着する。したがって、

[F]  $\varphi(x)$  が単調増加階段関数で、 $\sup\{x; \varphi(x)=x\} = \infty$  ならば、 $\varphi(x)$  は AD.

また §2 と同様に “どのような  $\varphi$  が、もとの問題の Bayes 解となっているか?” ということを調べることもできる。すなわち  $\Theta$  上の先験分布  $\xi$  が存在して、それについての  $\varphi$  の事後危険が殆ど確実に有限であり、かつ

$$\varphi(x) = \frac{\int_x^\infty d\xi(\theta)}{\int_x^\infty \frac{1}{\theta} d\xi(\theta)} \quad (2)$$

となるとき  $\varphi(x)$  は  $\xi$  に対する Bayes 解であり、それ以外に Bayes 解がなければ AD である。例えばここで、 $\varphi(x)$  が  $x$  に関して微分可能な関数であるとし、 $d\xi(\theta) = \xi(\theta)d\theta$ 、 $\int_x^\infty \frac{1}{\theta} \xi(\theta) d\theta = A(x)$ 、すなわち  $-\xi(\theta) = \theta A'(\theta)$  とおけることに注意して (2) を変形すると

$$A(x) \varphi'(x) + A'(x)(x - \varphi(x)) = 0$$

という微分方程式となる。これから  $A(x)$  を求めることは容易であり、それから導かれる  $\xi$  についての  $\varphi$  の事後危険が有限になるための条件も求められる。

§4. 他方、[定理 A] から想像されることは

$$[H] \quad \varphi(x) \geq \varphi_0(x), \quad x \leq x_1$$

$$\varphi(x) > \varphi_0(x) + \varepsilon_3(x - x_1) \quad x > x_1$$

あるいは,

$$\varphi(x) \leq \varphi_0(x) \quad x \leq x_1$$

$$\varphi(x) < \varphi_0(x) - \varepsilon_4(x - x_1) \quad x > x_1$$

ならば  $\varphi(x)$  は IAD.

このことは  $\varphi(x)$  と,  $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ ,  $x \leq x_1$ ,  
 $\varphi_1(x) = \varphi(x) + C(x - x_1)$  との危険関数を比較することによ  
 って容易に証明できる.