数理解析研究所講究録
第 29 巻 1967 年 31-41

変 形 の 実 例

東京大学　教養学部　　伊　勢　幹　夫
中央大学　理工学部　　金　行　壮　二　　（記）

§ 0. まえがき

記号：
S^i : i 次元球面

$T^i(\mathbb{C})$: i 次元複素トーラス

$P^i(\mathbb{C})$: i 次元複素射影空間

Θ : 考えている多様体の解析的ベクトル場の芽の層

直積多様体 $S^1 \times S^{2p+1}$ は，$P^p(\mathbb{C})$ 上の fibre $T^1(\mathbb{C})$ の解析的バンドルの構造をもつことが知られている．$S^1 \times S^{2p+1}$ にこれにより，複素構造を入れたものを "Hopf 多様体" といい X_p で表わす．（但し $p \geqq 1$ ）．更にもつと一般に奇数次元の球面の直積 $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ は，$P^p(\mathbb{C}) \times P^q(\mathbb{C})$ 上のファイバー $T^1(\mathbb{C})$ の解析的バンドルの構造が入る．従つて，$S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ は，複素構造をもつ．こうしてえられた複素多様体を "Calabi-Eckmann 多様体" といい $X_{p,q}$ で表わす．

さて，

$$\begin{cases} \dim_C H^1(X_p, \Theta) = (p+1)^2 \\ \dim_C H^2(X_p, \Theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dim_C H^1(X_{p,q}, \Theta) = (p^2+q^2+2p+2q)+1 \\ \dim_C H^2(X_{p,q}, \Theta) = 0 \end{cases}$$

が知られている．故に，$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\cdot,\Theta)$ だけの parametre をもつ変形が存在する．

また $S^2 = P^1(\mathbb{C})$ の直積 $S^2 \times S^2 = X$ には自然な複素構造がある．そして，$H^1(X,\Theta) = 0$ である．しかし，$S^2 \times S^2$ には，可算無限ケのことなる複素構造が入ることが知られている．これらはすべて $P^1(\mathbb{C})$ 上のファイバー $P^1(\mathbb{C})$ の解析的バンドルの全空間としてえられる．この多様体を Σ_n $(n=1,2,\cdots)$ とかき，"Hirzebruch 多様体"という．Hirzebruch 多様体に対して $H^1(\Sigma_n,\Theta) = 0$ が知られている．以上のことは Brieskorn [10] により $P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^{n-1}(\mathbb{C})$ をファイバーとするバンドルの全空間の場合に拡張されている．

§ 1. コンパクト・複素多様体の例

イ） 閉リーマン面 X

X の種数を g とすると

$g = 0$ ナラバ $X = P^1(\mathbb{C})$

$g = 1$ ナラバ $X = T^1(\mathbb{C})$

$g \geqq 2$ ナラバ $X = \Gamma \backslash D$.

ここに，$D = \{|Z| < 1\}$ かつ Γ は D に働く不連続群である．

ロ） 単連結 コンパクト均質複素多様体（ Wang 多様体，C- 多様体）

これは Kähler 構造をもつものと，もたないものにわかれる．前者の例として，$P^n(\mathbb{C})$，複素グラースマン多様体，実多様体，後者の例として，Calabi-Eckmann 多様体がある．Wang 多様体の"不変"複素構造は数えられている．

ハ） コンパクト複素 parallisable 多様体

これは，複素リー群 G の discrete 部分群 Γ による商空間 G/Γ として表わされる．複素トーラス $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 以外のこの種の多様体はあまり性質がよくわかつていない．

ニ） 解析的 fibre bundle

底空間又は，ファイバーが（ロ）又は（ハ）であるもの．例えば，Hopf 多様体など．一般に，コンパクト均質複素多様体は（ロ）を底，（ハ）をファイバーとする fibre bundle の全空間となる．

ホ） 対称領域の不連続群による商多様体

ヘ） よく性質のわかつている多様体の divisor となつているもの

（ロ），（ハ），（ホ）は夫々リーマン面の $g=0,1,\geqq 2$，の場合の高次元への一般化である．

§ 2. Wang 多様体

定理 (Bott) X を Kähler Wang 多様体とすると

$$H^q(X,\Theta) = 0, \qquad q \geqq 1.$$

特に，X の複素構造の small deformation は trivial である．X の homogeneous でない複素構造については何も知られていない．global deformation については，次の二つのこと以外はわかつていない．

定理 (Hirzebruch-Kodaira) X を $P^n(\mathbb{C})$ と C^∞- 同型なコンパクト Kähler 多様体としよう．もし，n が奇数ならば X は，$P^n(\mathbb{C})$ と解析的に同型である。

定理 (Brieskorn[9]) X を complex quadric $Q_n(\mathbb{C}) = SO(n+2)/SO(n)\times SO(2)$ と C^∞- 同型なコンパクト Kähler 多様体としよう．n が奇数ならば，X は $Q_n(\mathbb{C})$ と解析的に同型である．

なお，Kähler Wang 多様体の複素構造の任意の deformation は trivial であることが予想される．

non-Kähler Wang 多様体X（即ち，Kähler 構造の入らない Wang 多様体）は，Kähler Wang 多様体Y上の複素トーラス・バンドルの構造をもつ．ファイバーの複素トーラス Tがr 次元だとする．

$$H^1(X,\Theta) = H^1(T,\Theta_T) \oplus H^0(Y,\Theta_Y) \otimes H^1(T,0)$$

が成立つ．そして，$H^1(T,\Theta_T) = H^1(T,0) \otimes \mathbb{C}^n$ である．但し，0 は，解析函数の芽の層を表わす。$H^1(T,\Theta_T)$ はトーラスの複素構造の変形を表わすが，$H^0(Y,\Theta_Y) \otimes H^1(T,0)$ はXのどの様な変形に対応しているか不明である．なお，$H^2(X,\Theta)$ は一般にはゼロでない．$q>r$ ならば $H^q(X,\Theta)=0$ が成立つ．故に，$r=1$ のときは $H^2(X,\Theta) = 0$ である．

§ 3. 複素トーラス

複素トーラスX は，$\mathbb{C}^n/\Gamma$ と表わされる．但し，Γ は，$\{\omega_1,\cdots,\omega_{2n}\}$ で生成される lattice である．X の複素構造の変形の族の具体的な構成は次の様にしてなされる．

$$M = \{t=(t^\alpha_\beta);n\ 次正方行列\ \mid \det(\mathrm{Im}\,t)>0\}$$

とする．

$$\omega^\alpha_j(t) = \begin{cases} \delta^\alpha_j & 1\leqq j\leqq n \\ t^\alpha_\beta & j=n+\beta,\quad 1\leqq\beta\leqq n \end{cases}$$

とおき，行 vector $\omega_j(t) = (\omega_j^1(t), \cdots, \omega_j^n(t))$ $1 \leqq j \leqq m$

を考える．

$\mathbb{C}^n \times M$ 上の変換 $g_j(1 \leqq j \leqq 2n)$ を次の様に定義しよう．

$$g_j : (z,t) \to (z+\omega_j(t), t)$$

そして $\{g_1, \cdots, g_{2n}\}$ で生成された $\mathbb{C}^n \times M$ 上の不連続変換群をGとする．そして，商多様体 $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n \times M/G$ を考えると，$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ は，$X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ の変形の族である．射影ϖは，$(z,t) \to t$ で定義すればよい．

$$\varpi^{-1}(t) = V_t = \mathbb{C}^n \times \{t\}/G = \mathbb{C}^n/\Gamma_t$$

である．但し，Γ_t はGの $\mathbb{C}^n \times \{t\}$ 上への制限を表わす．

定理 (Kodaira-Spencer[36][37]) 上で構成した族$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ はcomplete かつ，effectively parametrized である．即ち，写像 $\rho_t ; (T_M)_t \to H^1(V_t, \Theta_t)$ が上への同型である．更に任意の複素トーラスに対してそれを含む complete かつ effectively parametrized な holomorphic family が存在する．

"global"deformation については，次のことが知られている．

定理 (Andreotti-Stoll[2]) 複素トーラスの任意の変形はまた1つの複素トーラスである．

なお実トーラスに複素構造を任意に入れたものが複素トーラスに限るかどうかは不明である．

§4. 対称有界領域の商空間

この時は，small deformation については次の結果がある．

定理 (Calabi-Vesentini[12])

D を対称領域とし，その既約成分の次元はすべて1 より大とする．Γ をD に解析的にかつ，不動点なく動く不連続群で，商多様体 $X = \Gamma/D$ は compact としよう。この時 $H^1(X,\Theta) = 0$。

この場合も global deformation については不明である。Γ の変形については，Weil[64] を参照されたい．

§ 5. コンパクト Kähler 均質多様体

コンパクト Kähler 均質多様体 Xは，Kähler Wang 多様体Y と複素トーラス $T^q(\mathbb{C})$ の直積になる．Y の解析的自己同型群は，複素半単純リー群である．それをG とし，そのリー代数を$\mathcal{G}$で表わす．この時，

$$H^1(X,\Theta) = H^1(T^q,\Theta_T) \oplus \mathcal{G} \otimes H^1(T^q,O) \qquad \text{（直和）}$$

が成立つ．

$H^1(X,\Theta)$ の中には，通常のベクトル場のブラケットから，自然にブラケット演算が定義される．（詳しくは，Kodaira-Spencer[34] を見られたい．）．

さて，X を member にもつ複素構造の変形の微分可能な任意の族$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ を考えよう．この時，ρ-map $\rho_0 ; (T_M)_0 \to H^1(X,\Theta)$ $(\varpi^{-1}(0)=X)$ が定義されるが，Im ρ_0 は $H^1(X,\Theta)$ の中でブラケット演算に関して可換な部分空間をなす．この部分空間を infinitesimal deformation space という．これは Xを member にもつ変形の族に対応してきまるわけであるが，これらの infinitesimal deformation space の中で極大なものを deformation space という．一方 $H^1(X,\Theta)$ の可換部分空間は

$$H^1(T^q,\Theta_T) \oplus \mathcal{G}' \otimes H^1(T^q,O)$$

なる形であることがわかる．ここに$\mathscr{S}'$は$\mathscr{S}$ の可換な複素部分代数である．

定理　$\mathscr{S}$を$\mathscr{G}$の極大可換複素部分代数としよう．この時，可換部分空間

$$D(\mathscr{S}) = H^1(T^q,\Theta_T) \oplus \mathscr{S} \otimes H^1(T^q,0)$$

は deformation space である．

証明　$X = T^q \times Y$ であり，トーラス $T^q = \mathbb{C}^q/\Gamma$ に対しては，$H^1(T^q,\Theta_T)$ だけの変形が実際存在する．故に$\mathscr{S} \otimes H^1(T^q,0)$ に対応する変形の族をつくればよい．

格子Γ の generator を $\{\omega_1,\cdots,\omega_{2q}\}$ としよう．$\omega_i=(\omega_{i1},\cdots,\omega_{iq}) \in \mathbb{C}^q$ である．この時，次のような可換な diagram が成立つ；

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}_e(\mathbb{C}^q,\mathscr{S}) & \xrightarrow{r} & \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathscr{S}). & \text{(exact)} \\ & \downarrow \exp & & \downarrow \exp & \\ 0 \to & \mathrm{Hom}_h(\mathbb{C}^q,H) & \xrightarrow{r} & \mathrm{Hom}(\Gamma,H). & \text{(exact)} \end{array}$$

ここに，Hom_e, Hom_h, Hom はそれぞれ linear homomorphism, holomorphic homom. アーベル群としての homomorphism を表わす．Hは$\mathscr{S}$が Gで生成する analytic group, r は制限写像とする．$\mathrm{Hom}_a(\mathbb{C}^q,\mathscr{S})$は，$\mathbb{C}^q$ から$\mathscr{S}$への additive function σ で，$\sigma(\lambda z) = \bar{\lambda}\sigma(z)$ $\lambda \in \mathbb{C}$ を充すもの全体から成る集合とする．このσの定義域をΓに制限することによつてえられる準同型の全体を$\mathrm{Hom}_a(\Gamma,\mathscr{S})$ で示す．この時，$\mathrm{Hom}_a(\Gamma,\mathscr{S}) = \{\sigma\ ;\ \sigma(\omega_i) = \sum_{j=1}^{\varepsilon} \bar{\omega}_{ij}\,\varphi_j,\ \varphi_j \in \mathscr{S}\}$ が成立つ．これより$\mathrm{Hom}_a(\Gamma,\mathscr{S}) \cong \mathscr{S} \otimes H^1(T,0)$ がわかる．$M = \mathscr{S} \otimes \mathbb{C}^q$ とおく．この時 $M \cong \mathrm{Hom}_a(\Gamma,\mathscr{S})$ である．直積 $\mathbb{C}^q \times Y \times M$ 上の$\gamma \in \Gamma$ の作用を

$$\gamma\cdot(z,y,t) = (z+\gamma,\ \exp\sigma_t^{-1}(\gamma)y,t)$$

で定義する．商多様体 $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^q\times Y\times M)/\Gamma$ を考える．この時 $\mathcal{V} \xrightarrow{\tilde{\omega}} M$ は求める変形の族である．ここに $\tilde{\omega}$ は $[(z,u,t)] \to t$ で定義する．この時，$V_t = \tilde{\omega}^{-1}(t) = (\mathbb{C}^q\times Y)/\Gamma$ でこれはトーラス $\mathbb{C}^q/\Gamma$ 上のファイバー Y の解析的バンドルの全空間がある．さて，族 $\mathcal{V}\to M$ に対応する ρ-map．ρ_0 ; $(T_M)_0 \to H^1(V_0,\Theta_0)$ $(V_0 = X$ である$)$ は 1 対 1 である．そして $(T_M)_0$ を M と同一視するとき $M \cong \mathrm{Hom}_a(\Gamma,\mathscr{J}) \ni \sigma_t$ に対して

$$\rho_0(\sigma_t) = \sum_{j=1}^{q} \varphi_j d\bar{z}_j$$

となるから ρ_0 は，$(T_M)_0$ から $\mathscr{J}\otimes H^1(T,0)$ の上への同型である．

§6. $P^n(\mathbb{C})$ の hypersurface

X を Kähler Wang 多様体としよう． $X = G/U$ と coset space で表わせる．ここに G は複素半単純リー群，U はその複素閉部分群である．この時，次の同型が成立つ．

$$H^1(X,0^*) \overset{\delta}{\cong} H^2(X,\mathbb{Z}) = (\mathscr{J}_{\mathbb{Z}})^*$$

ここに，0^* は X 上の non-vanishing な解析函数の芽の層，$(\mathscr{J}_{\mathbb{Z}})^*$ は G のリー代数 $\mathscr{G}$ の Cartan 部分環 $\mathscr{J}$ の integral part の dual である．$(\mathscr{J}_{\mathbb{Z}})^* \ni \lambda$ に上の同型で対応する複素直線 bundle を $F_\lambda \in H^1(X,0^*)$ としよう．$\mathbb{F}_\lambda$ を F_λ の解析的切断面の芽の層とする．そして，$H^0(X,\mathbb{F}_\lambda)$ に対応する完全一次系を $|F_\lambda|$ で表わす ($|F_\lambda|$ は $H^0(X,\mathbb{F}_\lambda)$ の dual space に associate した複素射影空間のこと)．

$|F_\lambda| = P^N(\mathbb{C})$ としよう．λ に関する適当な条件の下で，F_λ は ample となる．そしてこの時，各 $x \in X$ に対して $H^0(X, \mathbb{F}_\lambda) \to F_x$ は onto．よつてその kernel を F_x' とすると，

$$0 \to F_x' \to H^0(X, \mathbb{F}_\lambda) \to F_x \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

が各点 $x \in X$ で成立つ．ここにF_x は F_λ の x 上の fibre である．そして f_λ ;$x \to F_x' \in P^N(\mathbb{C})$ はX から $P^N(\mathbb{C})$ への解析的 injection であることがわかる．

今，$\mathfrak{S}$を reducible 又は singular な $P^N(\mathbb{C})$ の hypersurface の和集合とし，$M = P^N(\mathbb{C}) - \mathfrak{S}$ とおく．

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(x,t) \in X \times M \ ; \langle f_\lambda(x), t \rangle = 0\}$$

とおくと，これは complex manifold である．但し，〈，〉は次のいみとする．$f_\lambda(x)$ の $P^N(\mathbb{C})$ での斉次座標を $(\xi_0(x), \cdots, \xi_N(x))$ とし，t の斉次座標を $(t_0, \cdots, t_n)$ とすると，

$$\langle f_\lambda(x), t \rangle = \sum_{i=0}^{N} t_i \xi_i(x) \qquad .$$

とする．

$\mathcal{V}_\lambda \xrightarrow{\varpi} M$ は，X の hypersurface を member とする変形の族である．ここに，ϖ は $(x,t) \to t$ で定義する．

$$V_t = \varpi^{-1}(t) = \{(\xi_0, \cdots, \xi_N) \in P^N(\mathbb{C}) \ ; \sum t_i \xi_i = 0\} \cap f_\lambda(X)$$

は，X の hypersurface とみられる．

Def　X を member とする変形の解析的族$\mathcal{V} \to M$ が complete

かつ effectively parametrized のとき $\dim_{\mathbb{C}} M$ をX の moduli といい $m(X)$ で表わす.

Xが射影空間の時, Kodaira-Spencer による次の定理が知られている.

<u>定理</u> $X = P^{n+1}(\mathbb{C})$ で次の二つの場合を除外する.

$$\begin{cases} n = 1 \text{ で hypersurfaceの次数} \geq 4 \\ n = 2 \text{ で hypersurfaceの次数} = 4 \end{cases}$$

この時, $\mathcal{V}_\lambda \to M$ は complete な変形の解析的族で, 更にMのある複素部分多様体N に制限した族 $\mathcal{V}|_N \to N$ は effectively parametrized になる. そして, $m(V_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(V_t, \Theta_t) = \dim|F_\lambda| - \dim G = N - \dim G$ が成立つ.

<u>証明</u> 後半だけを示そう. Ξ をX上の解析的 vector 場の芽の層 $\Xi|V_t = \Xi_t$ とする. Θ_t は V_t 上の解析的 vector 場の芽の層

この時,

$$0 \to \Theta_t \to \Xi_t \to \mathbb{F}_{\lambda,t} \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

が V_t 上で成立つ. ここに $\mathbb{F}_{\lambda,t} = \mathbb{F}_\lambda|V_t$ である. また

$$0 \to \Xi \otimes \mathbb{F}_\lambda^* \to \Xi \to \tilde{\Xi}_t \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

がX上で成立つ. ここに $\mathbb{F}_\lambda^*$ はF_λ の dual bundle F_λ^* の解析的切断面の芽の層であり, $\tilde{\Xi}_t$ は Ξ_t の X上への natural extension を表わす.

$$H^q(X, \Xi \otimes \mathbb{F}_\lambda^*) = 0 \qquad q = 0,1,2$$

が成立つ. これは Xが射影空間であることから出る. また Bott により

$$H^1(X, \Xi) = 0$$

これらを用いて次の可換な diagram をうる:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & H^0(V_t, \Xi_t) \arrow[r] \arrow[u] & H^0(V_t, \mathbb{F}_{\lambda, t}) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(V_t, \Theta_t) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)} \\
 & H^0(X, \Xi) \arrow[r] \arrow[u] & (T_M)_t \arrow[u] \arrow[ur, "\rho_t"'] & & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}
$$

たての矢は exact である. $H^0(X,\Xi) = \mathscr{G}$(= G のリー代数),

$\dim(T_M)_t = \dim|F_\lambda|$. これより直ちに定理の後半がわかる.