

Complex torus の complex analytic family

に つ いて の 一 考 察

名 市 大 教 養 部 岡 野 節

§1. Kodaira-Spencer [34] に お いて complete 2- π -group effectively parametrized 5 complex torus の 具体的に与えられる の complex analytic family であることは一般の complex torus の complex analytic family である型を以てみるかを考へてみる。

Σ を Y 上の 既約な解析空間とし、 $2n^2$ 個の Y 上の正則函数を要素とする $(n, 2n)$ の行列 Ω を考へる。 Ω の要素を ω_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, 2n$) とする。さらに $(2n, 2n)$ 型行列 $\begin{pmatrix} \Omega \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}$ は 各点 $t \in Y$ 上で正則であるとは定まらない。
($\bar{\Omega}$ は Ω の conjugate を表す。)

\mathbb{C}^n 上の n 変数 $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ を持つ n 次元複素空間 \mathbb{C}^n を

空間とし、 $\Sigma \times Y$ 上の analytic automorphism

$$g_j: (z, t) \longrightarrow (z + \omega_j(t), t), (j=1, \dots, 2n)$$

を考へ. この $2n$ 個の automorphism z^i generate される

ρ -バレル群 Γ で表わす. $t \in Y$ に対し z^i $\omega_j(t) = \begin{pmatrix} \omega_{1j}(t) \\ \omega_{2j}(t) \\ \vdots \\ \omega_{nj}(t) \end{pmatrix}$

で表わす。

このとき, factor space $\mathbb{C}^n \times Y / \Gamma$ は明らかに complex space Z 上 n torus の complex analytic family が定まる. 今 $\mathbb{C}^n \times Y / \Gamma = X$ とおき, X から Y への natural projection を π とおく. 明らかに各 $t \in Y$ に対し $\pi^{-1}(t)$ は $\Omega(t)$ を 同期行列に等する complex torus である。

これから先, Z 上の行列 $\Omega(t)$ 及びこれから得られる complex torus の family $X \xrightarrow{\pi} Y$ を fix して考へる. 是れを各 $t \in Y$ に対し, 次の様な記号を用いる。

$$X_t = \pi^{-1}(t)$$

$K_t = X_t$ 上の有理型函数全体の体.

$td(K_t) =$ 体 K_t の複素数体への超越次数.

$$Y_R = \{ t \in Y \mid td(K_t) = k \} \quad (n \geq k \geq 0)$$

§2. 今 $t_0 \in Y_R$ ($k > 0$) の点とする. 是れを n 変数の変換,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{"あり"}.$$

K_{t_0} の函数は $n-k$ 個の変数 $w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n = \text{depend}$
 する。

今 $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ とおくと明らかに

(i) $\text{rank } P = k.$

であり, \mathbb{C}^k の中の $2n$ 個の \wedge^k 形式 $P \Omega_j(t_0), j=1, \dots, 2n,$
 は \mathbb{C}^k の中の $\text{rank } 2k$ の discrete ^{free} group Γ を生成する。(この事には

" Γ は例として [0], p. 103 を見ればよい)。この group $\Gamma \in \mathbb{C}^k$ とな
 るならば \mathbb{C}^k / Γ は明らかに Abelian variety であり, X_{t_0} の有理
 型函数体 $K_{t_0} \in \mathbb{C}^k / \Gamma$ の函数体と一致する。

今 $w'_1, w'_2, \dots, w'_{2k} \in \mathbb{C}^k$ の free base とすれば (2k, 2k) 型

整数行列 H_1 があって

$$P \Omega(t_0) H_1 = (w'_1, w'_2, \dots, w'_{2k}) \text{ と成る。 } \Gamma \in \mathbb{C}^k \text{ へ } w'_i = \begin{pmatrix} w'_{i1} \\ \vdots \\ w'_{ki} \end{pmatrix}.$$

さすれば $w'_1, w'_2, \dots, w'_{2k}$ が base である事なり。 (2k, 2k) 型整数

行列 H_2 があって

(ii) $P \Omega(t_0) H_1 H_2 = P \Omega(t_0)$ と成る。

さすれば, \mathbb{C}^k / Γ が abelian である事なり 歪対称な

(2k, 2k) 型

整数行列 A があって, $|A| \neq 0$,

$$(iii) \quad P \Omega(t_0) H_1 A (P \Omega(t_0) H_1)' = 0$$

$$(iv) \quad \sqrt{-1} \overline{P \Omega(t_0) H_1} A (P \Omega(t_0) H_1)' < 0$$

と仮定。 $E = E' L = = Z''$ / は 転置置 E を表わす。

特に今, $t_0 \in Y_n$ とする。このときは上の H_1, H_2 は単位行列に
とれる。

今 Y_n が \mathbb{C} -類の集合であると仮定する。このとき各 $t_0 \in Y_n$ に対して
($2n, 2n$) 型の歪対称反正則な整数行列 A があって,

$$\Omega(t_0) A \Omega(t_0)' = 0 \quad \text{かつ} \quad \sqrt{-1} \overline{\Omega(t_0) A \Omega(t_0)'} < 0 \quad \text{と仮定。}$$

$Z = Z''$ 各 $t_0 \in Y_n$ に対してこの様な A を一つずつに集合 $Y(A) = \{t \in Y \mid \Omega(t) A \Omega(t)' = 0\}$ を考へる。 $Y(A)$ は Y の解析的部分集合であり, 又仮定により Y_n は \mathbb{C} -類 E' から, A が整数行列である事より, 一つの A があって $Y(A) = Y$ と仮定する。

と仮定するが真 t_0 では $\sqrt{-1} \overline{\Omega(t_0) A \Omega(t_0)'} < 0$ 故から Y が「連結」
故から, 各点 $t \in Y$ において $\sqrt{-1} \overline{\Omega(t) A \Omega(t)'} < 0$ と仮定する。

よって $Y = Y_n = Y(A)$ と仮定する。

$Z = Z''$ の場合は \mathbb{C} 函数の理論を用いると任意の $t \in Y$ に
対して Kt の元 ϵ について $\epsilon \in Xt$ の近傍 K に入る事が分る。

§3.

Lemma 1. $F_1 \in (l, p)$ 型, $F_2 \in (p, l)$ 型の行列と仮定。
($E = E' L$, $l \geq p$)。このとき,

(l, l)型行列 $F_1 F_2 - E^{(l)}$ の rank は $l-p$ より小さいとは
 ない。 $E = E^{-1} E^{(l)}$ は l 次の単位行列を表現する。

証明) (l, l) 行列 $F_1 F_2$ の固有方程式は l 個の重複度 q_i と
 対応する q_i 個の non-singular (l, l) 型行列 J_i があって

$$J F_1 F_2 J^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & x_{q+1} & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & x_2 \end{matrix} & * \\ \end{pmatrix} \quad \text{と存在。 } E = E^{-1} \text{ 且 } x_i \neq 1.$$

$$\text{よって, } \text{rank } J(F_1 F_2 - E^{(l)})J^{-1} = \text{rank}(F_1 F_2 - E^{(l)}) \geq l - q.$$

$q = 0$ ならば $q \leq p$ は示す必要ない。

$$\text{今 } w_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots i \quad \text{と取ると, 明らかに } q \text{ 個の } w_i \text{ の } \wedge^q w_i$$

$J F_1 F_2 J^{-1} w_i \quad (i=1, \dots, q)$ は一次独立である。一方 F_2 は

(p, l) 型 E^{-1} から $q \leq p$ である。

Lemma 2. $T \in (2n, 2n)$ 型実行列 $S \in (n, 2n)$ 型行列

と存在するとき、

$$\text{rank } ST \geq \frac{1}{2} \text{rank} \begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix} T.$$

証明) 行列の rank はその行列が定める linear map の image
 の次元である。 T が real E^{-1} の S の rank と $\overline{S}T$ の rank は
 一致し $\frac{1}{2}$ より $\begin{pmatrix} S \\ S \end{pmatrix} T: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ の image は

$ST: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ の image と $\overline{ST}: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ の image
 の直和は $\lambda \neq 0$ であるから $2 \operatorname{rank} ST \geq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} S \\ \overline{S} \end{pmatrix} T$. Q.E.D.

次に $t \in Y_R$, $R > 0$ とする。前回は $\exists \lambda \neq 0$ なる λ と \exists と、4つの行列
 A, P, H_1, H_2 があった

- (i) $\operatorname{rank} P = k$
- (ii) $P \Omega(t_0)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = 0$
- (iii) $P \Omega(t_0) H_1 A (P \Omega(t_0) H_1)' = 0$
- (iv) $\sqrt{|P \Omega(t_0) H_1 (P \Omega(t_0) H_1)'|} < 0$.

逆に $t \in Y$ に対して H_1, H_2, P があって (i) $\operatorname{rank} P = k$,

(ii) $P \Omega(t) H_1 H_2 = P \Omega(t) z$ があるならば $P \Omega(t)$ の $2n$ 個の列ベクトル

は \mathbb{C}^k の $\operatorname{rank} 2k$ の discrete free group を生成し、

$P \Omega(t) H_1$ の $2k$ 個の列ベクトルはこの group の free base を与えている。

$z = z^0$. 3つの行列 H_1, H_2, A は fix する。 $z \in \mathbb{C}^n$.

$Y(H_1, H_2) = \{ t \in Y \mid \text{上の条件 (i) と (ii) を満たす } (k, n) \text{ 行列 } P \text{ が存在する} \}$,

$Y(H_1, H_2, A) = \{ t \in Y \mid \text{上の4つの条件 (i) ~ (iv) を満たす } (k, n) \text{ 行列 } P \text{ が存在する} \}$ とおく。

今 Π は型 (k, n) の行列の全体の作る $R \times n$ 次元の Λ の空間

とし $\Pi \times Y$ 上の方程式 $P \Omega(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = 0, t \in Y$

$P \in \Pi$, の解を \mathcal{S} とする。 \mathcal{S} から $Y \cap \Lambda$ の natural proj を ρ とおく。

このとき $P^{-1}(t)$ は Π の vector subspace である。さらに $P^{-1}(t)$ の中には rank が k である行列が存在する。この必要十分条件は

$$\text{rank } \Omega(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) \leq n - k$$

で与えられる。

Proposition 1. $Y(H_1 H_2)$ は $\Omega(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = n - k$ で与えられる Y の analytic subset であり、 $\mathcal{P} | Y(H_1 H_2)$ は rank k^2 の analytic vector bundle である。

さらに $t_1 \in Y(H_1 H_2)$ の一員、 $P_0 \in P^{-1}(t_1)$ の rank k の matrix があると、 $P^{-1}(t_1)$ の任意の matrix P_1 に対して、 (k, k) matrix L があって $P_1 = L P_0$ とおける。

証明) 行列 $\begin{pmatrix} \Omega(t) \\ \Omega(t) \end{pmatrix}$ が各 $t \in Y$ で non-singular であるから Lemma 1 と $\Omega \in \mathcal{P}^{\perp}$ として $\text{rank } \Omega(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) \geq n - k$ である。よって $Y(H_1 H_2)$ は $\text{rank } \Omega(t)(H_1 H_2 - E^{(2n)}) = n - k$ で与えられる。二番目の事柄は $P^{-1}(t_1)$ の rank が k^2 である事実より明らか。

Proposition 2. $Y(H_1 H_2 A)$ は $Y(H_1 H_2)$ の analytic subset である。

証明) $t_1 \in Y(H_1 H_2)$ の一員とすると、 t_1 の $Y(H_1 H_2)$ での近傍 τ と $\sigma \in \tau$ の vector bundle $\mathcal{P} | Y(H_1 H_2)$ の正則な section $P(t)$ があって $\text{rank } P(t) = k$, $t \in \tau$ と

厚さ。

この t 上で方程式 $P(t)Q(t)H_1 A (P(t)Q(t)H_1)^{\prime} = 0$ を考えよ。

この式は t の analytic subset である。 $t = 3.01$ の集合は section $P(t)$ のとり方に関係しない。 $\Sigma = \Sigma$

$N = \{ t \in Y(H_1, H_2) \mid \text{条件 (i) と (iii) が成り立つ } P^{-1}(t) \text{ の行列 } P \text{ が存在する} \}$ とおくと N は $Y(H_1, H_2)$ の analytic subset である。

今 $N_1, N_2, \dots \in N$ の connected components の全体とする。この各 N_i 上では Hermit 行列 $\sqrt{-1} P(t)Q(t)H_1 (P(t)Q(t)H_1)^{\prime}$ の符号数は一定である。よって $Y(H_1, H_2, A)$ は $Y(H_1, H_2)$ の analytic subset である。 Q.E.D.

Theorem 1. $n > j \geq 0$ なる整数 j に対し $Y_j \neq \emptyset$ である。

このとき $n \geq q > j$ なる整数 q に対し

$Y_q \cup Y_{q+1} \cup \dots \cup Y_n$ は Y の thin analytic set の高々可附番位の union である。

証明) $t_0 \in Y_R, (R \geq q)$ とおくと $t_0 \in Y(H_1, H_2, A)$ なる行列 H_1, H_2, A が存在する。 $Y_q \cup Y_{q+1} \cup \dots \cup Y_n$ はこの不変集合の高々可附番位の union である。

§3. $\sigma = \inf_{t \in Y} \text{td}(K_t)$ とおくと Theorem 1 により

Y 上 Y の 2 類集合 \mathcal{Z} がある。この $(2n, 2k)$ 型行列 H_1
 $(2k, 2n)$ -行列 H_2 , $(2k, 2k)$ -行列 A があって $Y = Y(H_1, H_2, A)$ と
 なる。 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}''$ の様な行列の system $H_1, H_2, A \in \rightarrow$ fix したとき。
 前回の \mathcal{Z} の様に \mathcal{Z}'' の H_1, H_2, A により $Y = \mathcal{Z}''$ の p^2 -次元の analytic
 vector bundle \mathcal{P} が得られる。

$t \in Y$. とする。 \mathcal{Z}'' の t の近傍 $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}''$ の \mathcal{P} の
 section $P(t)$ を $\text{rank } P(t) = p, (\forall t \in \mathcal{U})$ なる \mathcal{U} の \mathcal{P} がある。
 この section $P(t) \in$ 用いて T 度周期行列 $P(t)Q(t)H_1$
 とする \mathcal{U} の abelian variety の complex analytic

family X'_t と $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ から決まる $X|_{\mathcal{U}}$ から

X'_t の holomorphic map $\sigma_{\mathcal{U}}$ が決まる。

これは \mathcal{Z}'' の section $P(t) \in$ 変化したとき X'_t と $\sigma_{\mathcal{U}}$ は変化する。
 \mathcal{U} の座標系 $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$ が変化するときだけである。 \mathcal{Z}''

次の定理がある。

Theorem 2. $p = \inf_{t \in Y} \text{td}(K_t) \in \mathbb{R} < \infty$ となる $Y = \mathcal{Z}''$ の

$p = 2\bar{n}$ の complex analytic vector bundle $\mathcal{B} \rightarrow Y$

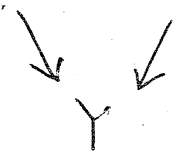
と $\mathbb{C}^n \times Y$ から \mathcal{B} への holomorphic map $\bar{\sigma}$ があって

$\bar{\sigma}$ は local には

$(z, t) \rightarrow (P(t)z, t)$ の形にかけ (ここで $P(t)$ は P の section), さらに $P(t)Q(t)$ は \mathcal{B} の discontinuous な abelian group $G' \in \mathcal{F}$ 之, factor space \mathcal{B}/G' は Y の abelian variety の family $\in \mathcal{F}$ としておける。

さらに $\bar{\sigma}$ から natural に X から \mathcal{B}/G' への holomorphic map τ があって

$$X \rightarrow X' = \mathcal{B}/G'$$



は commutative になっている。

Corollary 1. $K_t \in K_t$ の元で X_t の近傍の有理型函数に拡張出来るもの全体の定数部分体と等しい。

(a) K_t の超越次数は $\inf_{t \in Y} \dim K_t$ に等しい。

(b) K_t は K_t 内で代数的閉体になっている。

Corollary 2. 今 $Y_0 = \emptyset$ かつ $Y_n \neq Y$ とする。この時 family $X \rightarrow Y$ の member としてある abelian variety は 'singular' である。