数理解析研究所講究録
第29巻 1967年 80-96

複素直線バンドルの extension について

京大数理解析研　中野 茂男

1. コンパクトな複素多様体の解析的な変形族 $\varpi : \mathcal{V} \to M$ があって、Mの一点0に対応する V_0 が射影的代数多様体であるとき、V_t がまた射影的であるような $t(\in M)$ の集合はどんなになっているか？　この問題を考えるのに、"V_0 の射影空間への埋込みを与える複素直線バンドルが、どんな V_t にまで extend できるか" という形で考える。目標とする結果は次のとおりである：

<u>定理</u>　$\varpi : \mathcal{V} \to M$ がコンパクトな Kähler 多様体の解析的変形族で、Mの一点0に対応する $V_0 = \varpi^{-1}(0)$ 上に複素直線バンドル B_0 が与えられているとする。このとき（必要に応じMを点0の小さな近傍でおきかえると*）

$$S = \{ t \in M \mid B_0 \text{ が } V_t \text{ 上に extend できる。} \}$$

はMの解析的部分集合となる。

筆者は論文[49]において V_t が2次元の場合にこれを証明

（脚注）*以下大ていこの条件のもとに考える。それで必ずしも断らない。

したが、同様な方法で任意次元のときも証明できるので、ここに報告する。実は同じ定理が Safarevich の書[a]に、もっとエレガントに証明されている。

2. $\mathcal{V} \to M$ は、倉西によって構成された universal family $\tilde{\mathcal{V}} \to T$ から、($M \to T$ の正則写像によって) induce されたものだと仮定してよい。この場合微分同型 $\phi : \mathcal{V} \to V_0 \times M$, $p_2 \circ \phi = \varpi$ (p_2 は $V_0 \times M \to M$ の標準射影) がつぎのようにとれる：$\mathcal{V}$ 上の座標近傍系 $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ が $\phi(\mathcal{U}_\alpha) = U_\alpha \times M$ であり、$\mathcal{U}_\alpha$ での局所座標系 $(z_\alpha^1, \cdots, z_\alpha^n, t^1, \cdots, t^m)$ と $U_\alpha \times M$ 上のそれ $(\zeta_\alpha^1, \cdots, \zeta_\alpha^n, t^1, \cdots t^m)$ との間に

$$(1) \qquad z_\alpha^j = z_\alpha^j(\zeta_\alpha, t) \qquad \left[\begin{array}{l}\zeta_\alpha, t \text{ につき } C^\infty \\ t \text{ につき正則}\end{array}\right]$$

という関係がある。

V_0 が Kähler だから V_t も Kähler である。さらに

命題1. V_t 上の Kähler metrics の族を、基本形式 $\omega(t)$ が t に関して実解析的であるようにとることができる。

命題2. 上のように metric をとるとき、V_t 上の閉微分形式の族 $\{\varphi(t)\}_{t \in M}$ が t に関して実解析的ならば、その調

和部分 $H_t\varphi(t)$ もまた t に関し実解析的である.

これらの命題は, t に関する微分可能性を与える基本定理 [34.Ⅲ, 定理7, 定理15) の証明を見直して行けば, その成立がわかる. その際注意すべき点は次のとおりである:

(a) 我々は V_t の *underlying* C^∞-*manifold* X 上の複素数値微分形式のバンドルについて考えればよい. 従って微分作用素 E_t が t に関し実解析的であるかということに気をつければよい.

(b) V_t 上の *Hermite* 計量の実解析的な族は作れる. 従って (a) は OK である.

(c) [34.Ⅲ 命題1の証明では E_t が *self-adjoint* であることは使わない. それで E_t の係数を t, $\bar{t}$ の実解析函数としてあらわし, そこで $\bar{t}$ を別の複素変数 τ でおきかえてえられる微分作用素 $E_{t,\tau}$ についても命題が使える. そこで

$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(E_{t,\tau}^{-1}\varphi(t,\tau)\right)=0$ を示しうる. $E_{t,\tau}^{-1}\varphi(t,\tau)$ の $\bar{t}$, τ による微係数が 0 だという. これから実解析性が出る.

3. 前節にいうような *Kähler metrics* の族をとって考える. V_t 上の2次正則微分式の芽の層を Ω_t^2 であらわすと, *Kähler* 性から $H^0(V_t, \Omega_t^2)$ の次元は t に無関係であるから

その基底の族 $\Phi^{(1)}(t), \cdots, \Phi^{(p)}(t)$ を，t に関し正則であるようにとれる．そうすると $\omega(t)^{n-2} \wedge \Phi^{(\varrho)}(t)$，$(\varrho = 1, \cdots, p)$ は，V_t 上での型 $(n-2, n)$ の調和微分形式の基底の族をなす．（ここに $n = \dim_{\mathbb{C}} V_t$）

与えられた複素直線バンドル $B_0 \to V_0$ の Chern Class を代表する実閉微分形式 Φ をとる．Φ は複素構造 V_0 に対しては，型 $(1, 1)$ である．[34, I] Prop. 13・1 によって，B_0 が V_t 上に延長できるためには，"Φ のきめるコホモロジー類が構造 V_t に関して型 $(1, 1)$ である" ことが，必要十分である．Φ は実微分形式だから，この条件は

(2) $\quad u_\varrho(t) \doteq \int_X \omega(t)^{n-2} \wedge \Phi^{(\varrho)}(t) \wedge \Phi$

が，$\varrho = 1, \cdots, p$ に対して，0 であることに他ならない．

4. M の点 s において，$(\partial u_\varrho / \partial t^\lambda)_{t=s}$ を計算しよう．そのため式 (1) において $t = s$ とおく．$\zeta_\alpha^j = z_\alpha^j(\zeta_\alpha, s)$ は V_s 上の正則局所座標である．V_t 上の正則局所座標 $z_\alpha^j = z_\alpha^j(\zeta_\alpha, t)$ を，ζ と t とで表わして

$$z_\alpha^j = z_\alpha^j(\zeta, t; s)$$

とかく．これは (ζ, t) に関し C^∞，t に関しては正則である．（以下の計算中 s は fix する．）

t が s に十分近ければ $\det(\partial z_\alpha^j / \partial \zeta_\alpha^k) \neq 0$ である．

それで $\partial z^j_\alpha / \partial \bar{\zeta}^k_\alpha = \sum_k (\partial z^j_\alpha / \partial \zeta^k_\alpha) \cdot \varphi^k_{\alpha \bar{l}}$ と書ける.

$\varphi_\alpha(t) = (\sum_l \varphi^1_{\alpha \bar{l}} d\bar{z}^l, \cdots, \sum \varphi^n_{\alpha \bar{l}} d\bar{z}^l)$ は V_s 上での型 $(0,1)$ の vector 値微分形式を定め, V_t の構造をあらわす量である. 特に $\varphi_\alpha(s) = 0$.

$\omega(t)^{n-2} \wedge \Psi_\gamma(t)$ を $d\zeta$, $d\bar{\zeta}$ で表わそうとすると,

$d z^j = \sum_k (\partial z^j / \partial \zeta^k) \{ d\zeta^k + \sum_l \varphi^k_{\bar{l}} d\bar{\zeta}^l \}$

と書き直される. (簡単のため添字 α を省く.)

$\partial / \partial t^\lambda$ を行うのに, 区別のため (z, t) を独立変数とする偏微分を $\delta / \delta z$, $\delta / \delta t$ であらわし, (ζ, t) を独立変数とするものを $\partial / \partial \zeta$, $\partial / \partial t$ であらわすことにすると, (添字 λ を略して書くと.)

$$\left(\partial u_\gamma / \partial t \right)_{t=s} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_X \omega(t)^{n-2} \wedge \Psi^{(\gamma)}(t) \wedge \bar{\Psi} \right]_{t=s}$$

において, 右辺の integrand の導函数は, つぎのような項から成りたつ:

(a) $\omega(t)^{n-2} \wedge \Psi^{(\gamma)}(t)$ の各係数に $\delta / \delta t$ を行ってえられる表式.

(b) $\omega(t)^{n-2} \wedge \Psi^{(\gamma)}(t)$ の係数に $\delta / \delta z^j$ を行い, $\partial z^j / \partial t$ をかけて加えて, えられる表式.

(c) $\omega(t)^{n-2} \wedge \Psi^{(\gamma)}(t)$ の係数に $\delta / \delta \bar{z}^j$ を行い, $\partial \bar{z}_j / \partial t$ をかけて加えて, えられる表式.

(d) $\omega(t)^{n-2}\,\Psi^{(q)}(t)$ にあらわれる各の

$dz^j = \sum_k (\partial z^j/\partial \xi^k)\{d\xi^k + \sum \varphi^k{}_l\, d\xi^l\}$ に、$\partial/\partial t$ を行ってえられる表式。

[$dz^j = \sum_k (\partial z^j/\partial \xi^k)\{d\xi^k + \sum \varphi^k{}_l\, d\xi^l\}$ からの寄与は、$t = s$ とおくとき、0 となる。]　　(a)〜(d) の各項が別々に V_s 上の大域的微分形式を与えるわけではないが、全体の和は局所座標系の変換に対して不変な微分形式になる。

$\varphi^k{}_l(s) = 0$ に注意して現れる項の型を考えると型 $(n, n-2)$ の項だけしかないことが判る。[(d) で $\sum(\partial\varphi^k{}_l/\partial t)\, d\xi^l$ から来る項がありそうだが、$\omega^{n-2} \wedge \Psi^{(q)}$ はもともと型 $(n, n-2)$ だったのだから、この項は型 $(n+1, n-3)$ を与えるべきことになって、0 を寄与するだけである。]

そこで $[\partial/\partial t(\omega(t)^{n-2} \wedge \Psi^{(q)}(t))]_{t=s}$ の、Kähler 構造 V_s に関する調和部分を考えると、これは $\omega(s)^{n-2} \wedge \Psi^{(r)}(s)$ の一次結合

$$\sum a_{qr}(s) \cdot \omega(s)^{n-2} \wedge \Psi^{(r)}(s)$$

でなければならぬ。従って（λ を復活すると、）

$$\left(\frac{\partial u_q}{\partial t_\lambda}\right)_{t=s} = \sum_{r=1}^{p} a_{\lambda;qr}(s) \cdot u_r(s).$$

5. s を変数 t に書きかえると

(3) $$\frac{\partial u_q(t)}{\partial t^\lambda} = \sum a_{\lambda,\,qr}(t)\,u_r(t)$$

$$(r=1,\cdots,p,\quad \lambda=1,\cdots,\ m=\dim_{\mathbb{C}} M)$$

ここに $a_{\lambda,\,qr}(t)$ は t に関し実解析函数である．

<u>命題 3.</u> 函数 $b_{qr}(t)\ (1\leqq qr\leqq p)$ があって，

$$\begin{cases} b_{qr}(0)=\delta_{qr} \\ \sum_r b_{qr}(t)\,u_r(t) & \text{は } t \text{ につき正則．}\end{cases}$$

となる．

これができれば，S 即ち $u_1,\cdots,u_r$ の共通零点は $v_1,\cdots,v_r$ の共通零点に他ならないから，定理がいえたことになる．この命題の証明のため．

<u>補題.</u> 複素変数 $t,\ s_1,\cdots,s_\ell$，実変数 $\sigma_1,\cdots\sigma_\ell$ の函数 a_{qr} を成分とする $p\times p$ 行列 A があって，$|t|,\ |s|,\ |\sigma|<\alpha$ で a_{qr} は実解析的，特に (s) に関しては正則だとする．このとき $\beta>0$ を十分小さくとれば，$|t|,\ |s|,\ |\sigma|<\beta$ で実解析的，特に s については正則な函数 C_{qr} があって，

$$C_{qr}(0,s,\sigma)=\delta_{qr},\qquad \frac{\partial C_{qr}}{\partial \bar{t}}+\sum_\rho C_{q\rho}\,a_{\rho r}=0.$$

この補題は [3+II，§19 の Lemma 1 ～ 4 として証明さ

れている．（実解析性は，関係する実変数を複素の領域まで少しふくらまして考えれば認められる．）

方程式(3)において $\lambda=1$ の所をとり上げ，$t^2,\cdots,t^m$（の実部・虚部）を σ とみて補題を用いれば，実解析的な $b^{(1)}_{\xi\gamma}$ があって，$b^{(1)}_{\xi\gamma}(0,t^2,\cdots,t^m)=\delta_{\xi\gamma}$，$v_\xi(t)=\sum_\gamma b^{(1)}_{\xi\gamma}(t)u_\gamma(t)$ が t^1 について正則 となる．$(v_\xi(t))$ は (3) と同様な形の方程式

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial t^\lambda}=\sum a^{(1)}_{\lambda,\xi\gamma}(t)\cdot v_\gamma(t) \qquad (\lambda=2,\cdots,m)$$

を満す．$a^{(1)}_{\lambda,\xi\gamma}$ は t^1 について実解析的だが，v_γ は t^1 に関し正則だから，$a^{(1)}_{\lambda,\xi\gamma}(t)$ を t^1 に関し正則なものでおきかえて，同型の方程式がなりたつようにできる．新しい方程式に関し，$t^2=t$，$t^1=s$，t^3以下の実部・虚部を σ とみて補題を使う．以下これを繰返して命題3が成り立つことを知る．

以上の手続き中，独立変数の変域は再三とり直して小さくするのだが，それは了解ずみのことであった．

Bibliography

[1]. A. Andreotti; On the complex structures of a class of.simply - connected manifolds, Algebraic Geometry and Topology, a symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton, (1957), 53 - 77.

[2]. A. Andreotti - W. Stoll; Extensions of holomorphic mappings, Ann. of Math. 72, (1960), 313 -349.

[3]. A. Andreotti - E. Vesentini; On the pseudo - rigidity of Stein manifolds, Annali della Scoula, Norm. Sup. di Pisa, 16, (1962), 213 - 223.

[4]. A. Andreotti - E. Vesentini; On deformations of discrete subgroups of Lie groups, Acta Math. 114, (1964), 249 - 298.

[5]. A. Andreotti - E. Vesentini; A remark on non - compact quotients of bounded symmetric domains, Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis, Springer, (1964), 175 - 181.

[6]. R. Bott; Homogeneous vector bundles, Ann. of Math. 66, (1957), 203 - 248.

[7]. L. Bers; Spaces of Riemann surfaces, Proc. Int. Congress. Math. (1958), 349 - 361.

[8]. A. Borel - F. Hirzebruch; Characteristic classes and homogeneous spaces I, Amer. J. Math. 80, (1958), 459 - 538.

[9]. E. Brieskorn; Ein Satz über die komplexen Quadviken, Math. Ann. 155, (1964), 184 - 193.

[10]. E. Brieskorn; Über holomorphe P_n - Bündel über P_1, Math. Ann. 157, (1965), 343 - 357.

[11]. E. Calabi; The space of Kähler metrics, Proc. Int. Congr. at Amesterdam, (1954). 206 - 208.

[12]. E. Calabi - E. Vesentini; On compact, locally symmetric Kählerian manifolds, Ann. of Math. 71, (1960), 472 - 507.

[13]. E. Calabi; On deformations of riemannian manifolds of constant curvature, Proc. Symp. in Pure Math. 3, Providence, (1961), 155 - 180.

[14]. S. H. Cartan; Familles d'espaces complexes et fondements de la gèometrie analytiques: École Norm. Sup. 1960/61.

[15]. A. Douady; Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964/65, N° 277.

[16]. A. Frölicher - A. Nijenhuis; Some new cohomology invariants for complex manifolds, I, II, Koninkl, Nederl, Akad, Wetensch, 59, (1956), 540 - 564.

[17]. A. Frölicher - A. Nijenhuis; A theorem of stability of complex structures, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 43, (1957), 239 - 241.

[18]. H. Grauert; Ein Theorem der analytischen Garben theorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Inst. Hautes Études Scientifiques, Publication Math. 5, (1960), 233 - 292.

[19]. H. Grauert; On the number of moduli of complex structures, Contributions to Function Theory, Tata Inst. of Fund. Researches, (1961), 63 - 78.

[20]. H. Grauert; Über Modifikation und exzeptionelle Analytische Mengen, Math. Ann. 146, (1962), 331 - 368.

[21]. H. Grauert - H. Kerner; Deformation von Singularitäten Komplexer Räume, Math. Ann 153, (1964), 236 - 260.

[22]. J. W. Gray; Some global properties of contact structures, Ann. of Math. 69, (1959), 421 - 450.

[23]. P. A. Griffiths; Deformations of holomorphic mappings, Illinois J. Math. 8, (1964), 139 - 151.

[24]. P. A. Griffiths; The extension problem for compact submanifolds of complex manifolds, I, Proc. of Conf. of Complex Analysis at Minneapolis, Springer, (1964), 113 - 142.

[25]. V. W. Guillemin - S. Sternberg; Deformation theory of pseudo - groups structures, Memoire of Amer. Math. Soc. (to appear).

[26]. H. Hironaka; An example of non - Kählerian complex analytic deformations of Kählerian complex structures, Ann. of Math. 75, (1962), 190 - 208.

[27]. F. Hirzebruch; Über eine Klasse von einfach -zussammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 124, (1951), 77 - 86.

[28]. F. Hirzebruch - K. Kodaira; On the complex projective spaces, J. Math. pur. appl.36, (1957), 201 - 216.

[29]. M. Ise; Some properties of complex analytic vector bundles over compact, complex homogeneous spaces, Osaka Math. J. 12, (1960), 217 - 252.

[30]. M. Ise; On the geometry of Hopf manifolds, Osaka Math. J. 12, (1960), 382 - 402.

[31]. H. Kerner; Familien Kompakter und holomorph vollständiger komplexer Räume. Math. Zeit. 92, (1966), 225 - 233.

[32]. K. Kodaira; Characteristic linear systems of complete continuous systems, Amer. J. Math. 78, (1956), 716 - 744.

[33]. K. Kodaira - D. C. Spencer; On the variations of almost complex structures, Algebraic Geometry and Topology, Princeton (1957), 139 - 150.

[34]. K. Kodaira - D. C. Spencer; On deformations of complex analytic structures, I, II, III, Ann. of Math. 67, (1958), 328 - 466: ibid. 71, (1960), 43 - 76.

[35]. K. Kodaira - D. C. Spencer; A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces, Acta Math. 100, (1958), 281 - 294.

[36]. K. Kodaira - D. C. Spencer - L. Nirenberg; On the existence of deformations of complex analytic structures, Ann. of Math. 68, (1958), 450 - 459.

[37]. K. Kodaira - D. C. Spencer; Existence of complex structures on a differentiable family of deformations of compact complex manifolds, Ann. of Math. 70, (1959), 145 - 166.

[38]. 小平邦彦 ; ある種の準群構造の微分幾何について. 数学. 11. (1960), 183 - 187.

[39]. K. Kodaira - D. C. Spencer; Multifoliate structures, Ann. of Math. 74, (1961), 52 - 100.

[40]. K. Kodaira; A theorem of completeness of characteristic system for analytic families of compact submanifolds at complex manifolds, Ann. of Math. 75, (1962), 146 - 162.

[41]. K. Kodaira; On stability of compact submanifolds of complex manifolds, Amer. J. Math. 85, (1963), 79 - 94.

[42]. M. Kuranishi; On a type of families of complex analytic structures, Ann. of Math. 74, (1961), 262 - 328.

[43]. M. Kuranishi; On the locally complete families of complex analytic structures, Ann. of Math. 75, (1962), 537 - 577.

[44]. M. Kuranishi; New proof for the existence of locally complete families of complex structures, Proc. Conf. of Complex Analysis at Minneapolis, Springer, (1964), 142 - 154.

[45]. Y. Matsushima - S. Murakami; On vector - bundle valued harmonic forms and automorphic forms over symmetric riemannian manifolds, Ann. of Math. 78, (1963), 365 - 416.

[46]. S. Nakano; An example of deformations of complex analytic bundles, Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto (A), 31, (1958), 181 - 190.

[47]. S. Nakano; Parametrization of a family of bundles, Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto, (A), 33, (1961), 353 - 366.

[48]. S. Nakano; A condition for the extension of a complex line bundles for a family of Kähler surfaces, J. Math. of Kyoto Univ. 2, (1963), 183 - 191.

[49]. S. Nakano; Extension problem of complex line bundles for Kähler surfaces, Publications of the R. I. for Math. Sciences. Kyoto Univ. 1, (1966), 253 - 256.

[50]. 中野茂男： 代数曲線に附随する二、三の複素構造について.

[51]. M. S. Narashmhan; Variations of complex structures on an open Riemann Surface, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 9, (1961), 493 - 514.

[52]. M. S. Narasimhan - C. S. Seshadri; Holomorphic vector bundles on a compact Riemann Surfaces, Math. Ann. 155, (1964), 69 - 80.

[53]. M. S. Narasimhan - C. S. Seshadri; Stable bundles and unitary bundles on a compact Riemann surface, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. A. 52, (1964), 207 - 210.

[54]. M. S. Narasimhan - C. S. Seshadri; Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. of Math 82, (1965), 540 - 567.

[55]. M. S. Raghunathan; Deformations of linear connections and Riemannian metrics, Differential Analysis, Tata Inst. Fund. Researches, (1965), 243 - 247.

[56]. D. C. Spencer; A spectral resolution of complex structures; Symp. Int. de Top. Alg., Mexico, (1958), 68 - 76.

[57]. D. C. Spencer; Some remarks on perturbations of structures, Analytic Functions, Princeton Univ. Press, (1960), 67 - 88.

[58]. D. C. Spencer; Deformations of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudo groups, I, II, Ann. of Math. 76, (1962), 306 - 445. III, ibid, 81, (1965), 389 -450.

[59]. D. C. Spencer; Existence of local coordinates for structures defined by elliptic pseudo groups, Tata Inst. of Fund. Researches, (1964), 135 - 162.

[60]. K. Srinivasacharyulu; Sur les structures differentiables et les variationes de structures complexes, Seminaire Ehresmann, (1962).

[61]. K. Srinivasacharyulu; Deformations of riemannian structures, Bull. Amer. Math. Soc. 70, (1964), 178 - 180.

[62]. N. Tanaka; On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces, J. Math. Soc. Japan, 17, (1965), 103 - 139.

[63]. H. c. Wang; On deformations of lattices of a Lie group; Amer. J. Math. 85, (1963), 189 - 212.

[64]. A. Weil; On discrete subgroups of Lie groups. I, II, Ann. of Math. 72, (1960), 369 - 383:, 75, (1962), 578 - 602.

[65]. A. Weil; Remarks on the cohomology of groups, Ann. of Math. 80, (1964), 149 - 157.

[66]. van de Ven; Analytic conpactifications of complex homology cells, Math. Ann. 147, (1962), 189 - 204.

[a] H. Cartan; Journal London Math. Soc, 41 (1966), 70 - 78.

[b] H. Cartan; Quotients of complex analytic spaces International coll. on Function Theory. Tata Inst. 1960.

[c] S. S. Chern; Complex manifolds, Chicago University, 1955 - 1956.

[d] J. Dieudonné; Foundations of modern analysis. Academy Préss, 1960.

[e] A. Douady; Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 1 (1965), 1 - 95.

[f] A. Douady; Séminaire Leray, Collége de France, 1965.

[g] Grauert and Remmert; Espaces analytiquement Complete, C. R. Acad. Sci. Paris, 245 (1956), 882 - 885.

[h] Grauert and Remmert; Bilder und urbilder analytischer Garben, Ann. of Math. 68 (1958), 393 - 443.

[i] A. Grothendieck; Séminaire Bourbaki, 13e année, 1960/61, n°, 221.

[j] K. Kodaira; On Kähler varieties of restricted type, Ann. of Math. vol. 60 (1954), 28 - 48.

[k] K. Kodaira - D. C. Spencer; A theorem of completeness of characteristic linear systems of complete continuous systems. American Journal of Math. vol. 81 (1959), 477 - 500.

[ℓ] S. Lang; Introduction to differentiable manifolds. N. Y. Interscience Publ. 1966.

[m] R. Remmert; Holomorphe und meromorphe Abbilldungen Romplexer Fäume, Math. Ann. 133 (1957), 328 - 370.

[n] Safarevich; Algebraic Surfaces.

[o] C. L. Siegel, Analytic functions of several complex variables, 1948 - 1949, Lecture note.

[p] W. Thimm; Untersuchungen über Deformationen Math. Ann. 123 (1952), 19 - 31.

[q] W. Thimm; Über ausgeartete meromorphe Abbildungen, I, Math. Ann. 125 (1952), 145 - 164.