数理解析研究所講究録
第32巻 1967年 27-37

Nonlinear semi-groups について

早大 理工　髙村幸男

無限次元ベクトル空間上の線形作用素の作る one-parameter semi-group の理論は，現在ほゞ満足すべき結果が得られていると言えよう。（Banach 空間上の半群については Hille-Phillips [A1]，局所凸線形空間上の同等連続な半群については Yosida [A2]，局所凸線形空間上の局所同等連続な半群については Kōmura [A3]，Banach 空間上の distribution 半群については Lions [A4] をそれぞれ参照のこと）。そこで，こゝでは Hilbert 空間上の非線形縮小作用素の作る半群を論ずることを試みる。（Kōmura [C1]，Kato [C2] 参照）。これは Hilbert 空間 H における発展方程式

$$\frac{d}{dt}u(t) = A\,u(t) \quad ,\left(A \text{ はある種の非線形不連続作用素}\right)$$

の解を調べることになる。従来研究されていた（Hilbert空間又はBanach空間における）非線形発展方程式は，主として，半線形（Browder [B1]，Kato [B2]，Segal [B3] 参照）

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)\,u(t) + f(t,u) \qquad \begin{pmatrix} A(t) \text{ は線形非有界作用素,} \\ f(t,u) \text{ は perturbation} \end{pmatrix}$$

又は，準線形（Lions [B4]，Sobolevskii [B5] 参照）

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t, u(t))\, u(t) + f(t, u) \qquad \left(\begin{array}{l} A(t, v) \text{ は } t, v \text{ を固定し} \\ \text{たとき線形，} f \text{ は同上} \end{array}\right)$$

の形のものであった。

§1. 半群の定義と例

Hilbert 空間 H 上の nonlinear continuous operator の family $\{T_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ が次の条件を満たすとき nonlinear contraction semi-group という：

1) 各 x $(\in H)$ に対し $T_t x$ は t について強連続。

2) $t, s \geq 0$ のとき $T_{t+s} = T_t T_s$，且つ $T_0 = I$ (= 恒等作用素)

3) $\|T_t x - T_t y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H$.

以下このような $\{T_t\}$ を単に半群ということにしよう。

半群 $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 は線形の場合と同様に次式で定義される：

$$A_0 x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h x - x}{h} \qquad (\lim \text{ は強位相の意味})$$

補題 1. 半群の生成作用素 A_0 は dissipative ($-A_0$ が monotone) である。即ち

$$\mathrm{Re}\, \langle A_0 x - A_0 y,\ x - y \rangle \leq 0 \qquad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_0).$$

例 1.
$$f(t) = \begin{cases} \text{到る所微分不可能なある連続函数}, & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

とする。平面 R^2 における contraction でない (即ち 3) を満たさない)

半群 $\{T_t\}$ を次の如く定める：

$$T_t(x, y) = (x+t,\ y + f(x+t) - f(x)),$$
$$(x,y) \in R^2, \quad t \geq 0.$$

この場合 $A_0(x, y) = (1, f'(x))$ であるから $\mathfrak{D}(A_0) = \{(x, y) \mid x < 0\}$. よって

$$(x, y) \in \mathfrak{D}(A_0) \not\Rightarrow T_t(x, y) \in \mathfrak{D}(A_0).$$

この例は，contraction でない半群を考察することの困難さを示す。

例 2.　直線 R^1 上の半群を

$$T_t x = \begin{cases} \max(0, x-t), & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

によって定める。すると生成作用素は

$$A_0 x = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

従って $I - A_0$ の値域は

$$\mathcal{R}(I - A_0) = (-\infty, 0] \cup (1, \infty) \neq R^1.$$

例 3.　複素平面 C^1 における単位円内 $\{re^{i\theta} \mid r \leq 1\}$ で半群を

$$T_t re^{i\theta} = \varphi(\varphi(r) + t)\, e^{i\theta}$$

$$\text{但し}\quad \varphi(r) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-(1-t)^2} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

と定義する。生成作用素は

$$A_0 re^{i\theta} = \varphi'(\varphi(r))\, e^{i\theta} = \frac{\varphi(r) - 1}{1 - r}\, e^{i\theta}$$

よって $\mathcal{D}(A_0) = \{ re^{i\theta} \mid r < 1 \}$ であって

$$\mathcal{R}(I - A_0) = C^1$$

この半群は, contraction の条件を要求する限り, これ以上拡張することは出来ない。即ち, 半群の存在領域が本質的に空間の一部に限定されている。

§2. Minty の monotone sets

$H \times H$ の部分集合 M が次の条件を満足するとき monotone という:

$$\mathcal{R}e \langle x - x', y - y' \rangle \geq 0, \quad \forall (x, y), \forall (x', y') \in M.$$

Zorn の補題から, 任意の monotone 集合に対し, それを含む極大 monotone 集合が存在する。

補題 2. (Minty) 集合 M は monotone

$\Longleftrightarrow$ 写像 $M^* : x + y \to x - y$, $(x, y) \in M$

は係数 1 の Lipschitz 連続写像

$\left(\text{即ち } \| x - y - (x' - y') \| \leq \| x + y - (x' + y') \| \quad \forall (x, y), \forall (x', y') \in M \right)$

補題 3. (Minty) monotone 集合 M は極大

$\Longleftrightarrow$ Lipschitz 連続写像 M^* は H 全体で定義されている

一般に写像 A_0 が dissipative であることは, 集合 $\{ (x, -A_0 x) \mid x \in \mathcal{D}(A_0) \}$ が monotone を意味する。従ってこの集合を含む極大 monotone 集合 M をとり $Ax = \{ -y \mid (x, y) \in M \}$ とおけば A は A_0 の拡大であって極大 dissipative 多価写像である。補題 3 より

$$\mathcal{R}(I - \lambda A) = H \qquad {}^\forall\lambda > 0$$

が得られる.

注意. §1, 例2の場合, A_0の極大dissipative 拡大 A は唯一つ存在して

$$A x = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ [-1, 0] & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} .$$

このことから一般に多価写像を考察する必要性が分る.

補題 4. A を極大 dissipative 多価写像とする. A を $[a, b]$ 上の H-valued L^2-函数の作る空間 $L^2_{[a,b]}(H)$ に拡張したものを $\widetilde{A}$ と記す. 即ち $\widetilde{A} f = \{ g \in L^2_{[a,b]}(H) \mid g(t) \in A f(t) \quad a.e.\ t \in [a, b] \}$, $f \in L^2_{[a,b]}(H)$. すると $\widetilde{A}$ は $L^2_{[a,b]}(H)$ において極大 dissipative 多価写像である.

$\widetilde{A}$ が $L^2_{[a,b]}(H)$ において dissipative であることは, $f, g \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, $f' \in \widetilde{A} f$, $g' \in \widetilde{A} g$ に対し

$$\mathcal{R}e\langle f' - g', f - g \rangle = \int_a^b \mathcal{R}e\langle f'(t) - g'(t), f(t) - g(t) \rangle dt \leq 0$$

であるから明白. 極大であることは Lusin の條件より得られる.

§3 生成作用素と半群の一意性

非線形の場合 $A_0 T_t \supset T_t A_0$ は必ずしも成立しないから $x \in \mathcal{D}(A_0)$

から $T_t x \in \mathfrak{D}(A_0)$ は直接には得られない。

補題 5. 回帰的 Banach 空間 E の値をとる（ノルムに関する）絶対連続函数 $f(t)$ は殆んどいたる所微係数 $\frac{d}{dt}f(t)$ を持ち

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} f(s)\, ds \qquad \text{a.e. } t$$

である。

ある $x \in H$ に対し $\overline{\lim_{h \downarrow 0}} \| \frac{1}{h}(T_h x - x) \| < \infty$ ならば $\| T_{t+h} x - T_t x \| \leq \| T_h x - x \|$ より $T_t x$ は（ノルムに関して）絶対連続である。従って補題 5 によって次の定理が得られる。

定理 1. $x \in \mathfrak{D}(A_0)$ ならば

$$T_t x \in \mathfrak{D}(A_0) \quad \text{a.e. } t, \quad \| A_0 T_t x \| \leq \| A_0 x \|,$$

$$T_t x = x + \int_0^t A_0 T_s x \, ds .$$

即ち $u(t) = T_t x$ は発展方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t) = A_0 u(t) \\ u(0) = x \quad (\in \mathfrak{D}(A_0)) \end{cases}$$

の解である。この発展方程式の解の一意性に関しては、もっと一般に

定理 2. A を dissipative 多価写像、$\tilde{A}$ を A の $L^2_{[0,t_0]}(H)$ への拡張とすると、発展方程式

$$\frac{d}{dt} u(t) \in \tilde{A} u(t)$$

の解 u, v について

$$\| u(t) - v(t) \| \le \| u(0) - v(0) \| \qquad 0 \le t \le t_0$$

が成立する。

証) $\| u(t) - v(t) \|^2 - \| u(0) - v(0) \|^2$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \| u(s) - v(s) \|^2 ds$$

$$= \int_0^t \mathrm{Re} \left\langle \frac{d}{ds} u(s) - \frac{d}{ds} v(s),\ u(s) - v(s) \right\rangle ds$$

ここで $\frac{d}{ds} u(s) \in A u(s)$, $\frac{d}{ds} v(s) \in A v(s)$ a.e. s であるから

$$\mathrm{Re} \left\langle \frac{d}{ds} u(s) - \frac{d}{ds} v(s),\ u(s) - v(s) \right\rangle \le 0 \qquad \text{a.e. } s$$

よって上の積分は ≤ 0.

§4. 半群の生成

A を H における極大 dissipative 多価写像, $\tilde{A}$ を A の $L^2_{[0,t_0]}(H)$ への拡張とする。我々の目標は次の Cauchy 問題の連続な解を求める事である。

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t) \in \tilde{A} u(t) \\ u(0) = x \quad (\in \mathcal{D}(A)) \end{cases}$$

A に対し A_n を次のように定める. $x \in \mathcal{D}(A)$, $x' \in A x$ に対し

$$A_n : \quad x - \frac{1}{n} x' \longrightarrow x' .$$

この写像は1価, dissipative, 且つ Lipschitz 連続: $\| A_n x - A_n y \| \le n \| x - y \|$. A が1価ならば明らかに

$$A_n = A \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1}$$

である。逐次近似により次の補題が得られる。

補題 5. $x_n = x - \frac{1}{n}x'$ $(x \in \mathfrak{D}(A),\ x' \in Ax)$ に対し

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_n(t) = A_n u_n(t) \\ u_n(0) = x_n \end{cases}$$

は唯一つの解を持つ。 また $\|A_n u_n(t)\| \leq \|A_n u_n(0)\|$ が成立する。

上述の x, x' を固定したとき $\{u_n(t)\}$ は $n \to \infty$ につれて任意の有限区間 $[0, t_0]$ 上で一様にある連続函数 $u(t)$ に強収束する。 また $\{\widetilde{A_n u_n}\}$ が $L^2_{[0,t_0]}(H)$ の中で有界であるから弱収束する部分列を選び出すことが出来、その極限を v とすると、補題 4 を用いて $v \in \widetilde{A}u$ が得られ、u が $(*)$ の解となることが証明される。特に A が 1 価ならば、各 t について $A_n u_n(t)$ が $Au(t)$ に弱収束する。 結果として

定理 3. 1) 発展方程式 $(*)$ は唯一つ解を持つ。 2) (Kato) 特に A が 1 価ならば、この解 $u(t)$ について、すべての t に対し

$u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)$, $Au(t)$ は弱連続,

が成立する。

この解 $u(t)$ は定理 2 より $u(0) \to x$ ならば一様にある連続函数に強収束するから、その極限を $T_t x$ とおけば半群が得られる。即ち

定理 4. 極大 dissipative 多価写像 A は、その定義域の閉包 $\overline{\mathfrak{D}(A)}$ において一意に半群 $\{T_t\}$ を生成する。$\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 は

$$A_0 \subset A, \qquad \overline{\mathfrak{D}(A_0)} = \overline{\mathfrak{D}(A)}$$

を満足する。 逆に 半群 $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 の定義域が $\{T_t\}$ の定義域

で dense ならば，A_0 の極大 dissipative 拡大 A の生成する半群 $\{\tilde{T}_t\}$ は $\{T_t\}$ の拡大（即ち $T_t \subset \tilde{T}_t$）である。

§5. 補遺

生成作用素 A_0 が densely defined であるような半群を「正則」であるということにしよう。定理4は正則な半群に関する Hille-Yosida の定理を与えるものである。正則な半群 $\{T_t\}$ の正則な拡大 $\{\tilde{T}_t\}$ が存在すれば，それぞれの生成作用素を A_0，$\tilde{A}_0$ とすれば，$\overline{\mathfrak{D}(A_0)} \subsetneqq \overline{\mathfrak{D}(\tilde{A}_0)}$ であるから次の定理を得る。

定理 5. 正則な半群 $\{T_t\}$ が極大である（即ち正則な拡大をもたない）ための必要且つ十分な条件は，生成作用素 A_0 の極大 dissipative 拡大 A が常に $\overline{\mathfrak{D}(A_0)} = \overline{\mathfrak{D}(A)}$ を満たすことである。

A を極大 dissipative 写像とすれば $\overline{\mathfrak{D}(A)}$ は convex であることが証明される。逆に Ω を内点を持つ closed convex 集合とすれば，例3から分るように，Ω を定義域とする極大な正則半群が存在するから，$\overline{\mathfrak{D}(A)} = \Omega$ となる極大 dissipative 写像 A が存在する。

問題　内点を含む凸閉集合で定義された半群は常に正則（即ちその生成作用素は densely defined）であろうか。

その他の結果。半群 $\{T_t\}$ が contraction の条件 3) の代りに

3)′　$\|T_t x - T_t y\| \leq e^{\lambda t}\|x - y\|$

を満足する場合も全く同様である。 写像 B が Lipschitz 連続で H 全体で定義されていれば、このような半群を生成する。 更に、写像 A がこのような半群の生成作用素であれば、A + B も同様である（perturbation の理論）。

また生成作用素が t に依存する場合の発展方程式：

$$\frac{d}{dt} u(t) = A(t)\, u(t)$$

を論ずること、さらに理論を *Banach* 空間に拡張することについて *Kato* [C2] を参照されたい。

参考文献

A. 線形作用素の半群に関するもの

[1] Hille, E. and Phillips, R. S. Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, 1957

[2] Yosida, K. Functional analysis, Springer 1965

[3] Kōmura, T. Semi-groups of operators in locally convex spaces, to appear.

[4] Lions, J. Les semi-groupes distributions, Portugal. Math. 19 (1960), 141 – 164.

B. 非線形発展方程式に関するもの

[1] Browder, F. E. Nonlinear equations of evolution, Ann. of Math. 80 (1964) 485 - 523.

[2] Kato, T. Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Sympos. Appl. Math. XVII, 50 – 67.

Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1965.

[3] Segal, I. E. Nonlinear semi-groups, Ann. of Math. 78 (1963) 339 – 364.

[4] Lions, J. Équations différentielles opérationelles, Springer, 1961

[5] Sobolevskii, P. E. On the use of fractional powers of self-adjoint operators for the investigation of some nonlinear differential equations in Hilbert space (russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 130, No. 2 (1960) 272 - 275

C. 非線形半群及び monotone 集合に関するもの

[1] Kōmura, Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[2] Kato, T. Nonlinear semigroups and evolution equations, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[3] Neuberger, J. W. An exponential formula for one-parameter semi-groups of nonlinear transformations, J. Math. Soc. Japan 18 (1966) 154 – 157.

[4] Minty, G. J. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. J. 29 (1962) 541 – 546.