数理解析研究所講究録
第 32 巻 1967 年 39-60



# Well posedness と Stability

京大. 工　　山 口 昌哉

## §0. はしがき

元来. 偏微分方程式の初期値問題の数値解法は. 1928年の Courant Friedrichs Lewy の仕事をのぞいては、具体的な方程式を解こうとする物理学者の実際上の要求をみたそうとするために、いくつかの具体的な差分法の研究から出発しているので. case-study 的な面がいつまでものこっている。しかし. 最近のこの方面の基礎理論は. 2つのいちじるしい傾向を示している. それは.

1° 定数係数にかぎれば. 偏微分方程式の初期値問題の. 近代的な理論との関係がきわめてあざやかについたこと。

2° 一つの偏微分方程式に限っても、それを近似する差分法のとり方の自由度はきわめて多いが、その中で取扱いやすく. しかも efficient にも用いられる一つの category が見出されたこと。( これをのちに、primary type となずける.) である。

この小文は. 1° については最近の Aronson Kreiss Wendroff 等の研究の紹介. 2° については primary type と言うカテゴリーを意識的にとり上げて変数係数の方程式にまで 1° の理論の一部を拡張しようとする著者の提案である。

## §1. 初期値問題の Well posedness についての Petrowsky, Garding,

Kreissの理論の簡単な復習.

連立方程式

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}u = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

を考えよう。ここで $u$ は $N$ componentのベクトルであり,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\alpha|\leq p} P_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n) \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_n.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$P_\alpha$ は, $N\times N$ の定数行列である。$u(x,t) = u(x_1\cdots x_n, t)$ は、初期条件

(2) $$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x_i < \infty \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

を満すべきものを求めることにする。

<u>空間の設定</u>

$\mathcal{D}^k_{L^2}$ ; 函数 $f(x)$ がその $k$ 階までの distribution derivativeまで含めて,
$L^2$-summable であるものの全体

$$\|f\|_k^2 = \int \sum_{|\alpha|\leq k} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f\right|^2 dx < +\infty.$$

これは勿論のこと、Fourier transformにより、$\hat{f}$ を $f$ のFourier変換とすると、

$$\|\hat{f}\|_k^2 = \int (1+|\xi|^2)^k\, |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi < \infty$$

なるものの全体と一致する。

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(x) e^{i\xi\cdot x} dx \qquad \xi = (\xi_1 \cdots \xi_n) \quad \xi\cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$$

(1)を Fourier transform すると,

(3) $$\hat{u}(\xi, t) = e^{P(i\xi)t} \hat{f}(\xi)$$
$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$$

という形でフーリエ変換の方は解ける。つまり, $f(x) \in \mathcal{S}'_x$ ならば,
$u(x, t) \in \mathcal{S}'_x$.

<u>定義</u>

もし任意の $k_2 \geqq 0$ に対し, $k_1 \geqq 0$ が存在して, (3) の mapping $f(x) \to u(x, t)$ が $\mathcal{D}^{k_1}_{L^2}$ から $\mathcal{D}^{k_2}_{L^2}$ への bounded mapping をあたえるなら, weakly well-posed という。また, $k_1 = k_2$ ととれるとき, strongly well posed とよぶ。この二つの Well posedness を $e^{P(i\xi)t}$ を用いて書くと,

(4) weakly well-posed $\quad {}^{\exists} c_1, c_2 \quad |e^{P(i\xi)t}| \leqq c_1 (1 + |\xi|)^{\frac{M}{2}} e^{c_2 t}$

for some $M \qquad k_2 = k_1 + M$

(5) strong well-posed $\quad |e^{P(i\xi)t}| \leqq c_1 e^{c_2 t}$

であり, 更に, (4)であるための条件は,

<u>定理 1.</u> (Petrowsky Garding)

任意の $P(i\xi)$ の固有値 $\mu_j(\xi)$ $(j = 1, \cdots, N)$ の, 実部がすべての $\xi$ に対して bounded であることが (4) のための必十条件である。また, (5) については,

<u>定理 2.</u> (Kreiss [2])

次の三つの条件は, strongly well-posed と同値である。

a) ${}^{\exists}$ matrix $H(\xi)$ s.t. $HP_1 + P_1^* H \leqq 0 \qquad H \geqq I$.

b) $^{\exists}$nonsingular matrix $S(\xi)$

$$(SP_1S^{-1})^* + (SP_1S^{-1}) \leq 0 \quad |S(\xi)|, |S^{-1}(\xi)| \leq 1.$$

c) $|(zI - P_1^{-1})v| \leq \dfrac{c(v)}{\mathrm{Re}\,z}$ , $\qquad c(v) = (Hv, v)^{\frac{1}{2}}$

但し，$P_1 = P - c_2 I$ .$(\exists c_2)$

## §2. Finite Difference Scheme の convergence, accuracy, stability.

(1)(2) の初期値問題に対してその数値解法には，次のような Finite Difference Scheme を考える。

$$(6) \qquad v(x, t+k) = Q(T)\, v(x, t)$$

但し，ここで，$Q(T) = \sum_{|\alpha| \leq q} Q_\alpha T^\alpha$ $\qquad Q_\alpha : N \times N$ $h$, 及び $k$ の polynomial とする。

$$T^\alpha = T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n}$$

$$T_i v(x) = v(x_1, \cdots, x_i + h_i, \cdots, x_n)$$

Space mesh $h_i = r_i h$ $\; r_i$ は constant としておく。更に $k = \lambda h^p$ で $p > 0$ は，$P(\frac{\partial}{\partial x})$ の order に関係して決められる有理数である。

(6) に Fourier 変換を施して，

$$(7) \qquad \hat{v}(\xi, t) = [\hat{Q}(\xi)]^M \hat{f}(\xi)$$

$t = Mk$ を得る。但し，

$$\hat{Q}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq q} Q_\alpha \exp[i\alpha \cdot \xi r h]$$

$$\xi r = (\xi_1 r_1, \xi_2 r_2, \cdots, \xi_n r_n).$$

ここで convergence, accuracy, stability 等を定義しよう。

<u>Convergence</u>. 任意の $k_3 \geqq 0$ に対し，$k_1 \geqq 0$ があって，次のことが成立するとき，$Q(T)$ は，<u>weakly convergent</u> と呼ぶ．$k_j$ と $N_j$ を，

$$\lim_{j\to\infty} N_j k_j = t, \quad N_j k_j = t_j \leqq \tau$$
$$\lim_{j\to\infty} k_j = 0$$

となる任意の sequence とするとき，すべての $f \in \mathcal{D}_{L^2}^{k_1}$ に対し，

$$\lim \|(\exp(P(i\xi)t) - Q(\xi)^{N_j})\hat{f}(\xi)\|_{k_3} = 0$$

が $0 \leqq t \leqq T$ なる $t$ に関して一様に成立する。

また，特に $k_1 = k_3$ ととれるときは，<u>strongly convergent</u> と呼ぶ。勿論 convergence といったとき，$(\exp(P(i\xi)t) - Q(\xi)^{N_j})\hat{f}(\xi) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}_{L^2}^{k_3})$ であることは含まれている。

<u>Accuracy</u>. $Q(T)$ は次の条件がみたされるとき，accuracy の degree は $\nu$ であると呼ぶ。(1) のすべての smooth な solution に対して，

(8) $$u(x, t+k) = Q(T)u(x,t) + O(k^{\nu+1}).$$

また，$\nu > 0$ のとき，$Q(T)$ は $P(\frac{\partial}{\partial x})$ と <u>consistent</u> であると呼ぶ。

$\boxed{\text{Remark}}$

$Q(T)$ が，$P(\frac{\partial}{\partial x})$ に対して accuracy $\nu$ であれば，

$$\hat{Q}(\xi) = \exp[P(i\xi)k] + R(\xi, h) \qquad {}^{\exists}C > 0$$
$$|R| \leqq C h^{m(\nu+1)}[1 + |\xi|^{m(\nu+1)}].$$

ここで，$|\xi_i h_i| \leqq \pi$，$h \leqq h_0$，$\lambda = k h^{-m} = \text{const.} \leqq \lambda_0$。

<u>安定性</u>. もし，ある $k \geqq 0$ に対し，$D_1, D_2$ という定数があって，

$$(9) \qquad |\hat{Q}(\xi)^N| \leq D_1 (1+|\xi|^2)^{k/2} e^{D_2 t}$$

ならば、weakly stable (Forsyth - Wasow) また、$k=0$ のとき、strongly stable (Lax - Richtmyer) と呼ぶ。この二通りの stability に関しては、丁度、well-posedness についてあったような、次の二つの定理がある。

<u>定理 3.</u> (Kreiss [3])

weakly stability が成り立つための必十条件は、次のことである。$\hat{Q}(\xi)$ の固有値を $K_j(\xi)$ とするとき、$(j=1,\cdots,N)$、Von Neumann の条件、

$$(10) \qquad |K_j(\xi)| \leq 1 + ck \quad (j=1,\cdots,N)$$

$c$ ; in dep of $\xi$
depends $m, h_0, \lambda$
$h \leq h_0$

が成立することである。ここで、$\lambda = k h^{-m} = \text{const.} \leq \lambda_0$.

<u>定理 4.</u> (Kreiss [3])

Strongly stability が成立つための条件は、次の三つの条件と同値である。

(a) $\exists H > I$, $Q^* H Q \leq H$, $(Hv, v)^{\frac{1}{2}} = C(v)$, $|v| = 1$.

(b) $\exists S$, $|SQS^{-1}| \leq 1$ があり、$|S|, |S^{-1}| < 1$, $|Sv| = C(v)$
$|v| = 1$.

(c) $|(zI - Q)^{-1} v| \leq \dfrac{c(v)}{|z|-1}$ for $\forall |z| > 1$, $\forall |v| = 1$.

## §3. Well-posedness と stability に関する Aronson-Wendroff の理論.

<u>定理 5.</u>

Cauchy problem (1) (2) に対して Finite Difference Scheme (6) が、consistent であって、weakly stable ならば (1) (2) は well-posed である。strongly stable ならば、strongly well-posed である。Aronson [1]

証明. 定理3によって, $Q(T)$が weakly stable であることは (10) で示される。結局, (10) から consistency を用いて, 定理1の条件を出せばよい。

先ず, accuracy $\nu > 0$ であるから (consistency), accuracy の後で述べた remark により,

$$\hat{Q}(\xi) = \exp\,[P(i\xi)k] + R(\xi, h)$$
$$|R| \leqslant C h^{m(\nu+1)}\,[\,1 + |\xi|^{m(\nu+1)}\,]$$

for $|\xi_i h_i| \leqslant \pi$, $h \leqslant h_0$ $\lambda = k h^{-m} = \text{const.} < \lambda_0$。そこで,

$$\frac{\hat{Q}(\xi) - I}{k} = P_{\lambda,h}(\xi)$$

とおくと,

$$\hat{Q}(\xi) = I + P(i\xi)k + S(\xi, h) + R(\xi, h).$$

今, $\xi$: fixed として考えると, 上の式から

$$\lim_{h\to 0} P_{\lambda,h}(\xi) = P(i\xi) \qquad \begin{matrix}\lambda \leqslant \lambda_0\\ h \leqslant h_0\end{matrix}$$

従って, $\mu_{\lambda h j}$ を $P_{\lambda,h}(\xi)$ の固有値としたとき, 明らかに,

$$\text{Real part}\,(\mu_{\lambda h j}(\xi)) \leqslant {}^{\exists}B \;(\text{in dep of } \xi)$$

を出せば十分である.

ところで, $\hat{Q}(\xi)$ の固有値 $K_j(\xi)$ は,

$$K_j(\xi) = 1 + k\mu_{\lambda h j}(\xi)$$
$$|K_j(\xi)|^2 = 1 + 2k\,\mathrm{Re}\,\mu_{\lambda h j}(\xi) + k^2|\mu_{\lambda h j}(\xi)|^2$$

(10)より,

$$\leqq 1 + 2ck + c^2k^2 \qquad (C : \text{in dep of } \xi)$$

$$\mathrm{Re}\,\mu_{\lambda kj}(\xi) \leqq C\left(1 + \frac{Ch_0\lambda_0}{2}\right) \longrightarrow \text{weakly well-posedness}$$

次に. $Q(T)$ strongly stable と仮定する.* 勿論. weakly stable であるから. weakly well-posed が成り立つ。その時は, Equivalent theorem により. weak convergence がおこる。つまり. $l$ があって(任意の $k>0$ に対し一定の $l$ があって.) $f \in \mathcal{D}_{L^2}^{k+l}$ であれば. $\hat{u} = \exp[P(i\xi)t]\hat{f}$, $u \in \mathcal{D}_{L^2}^{k}$ であり. $\hat{v} = [\hat{Q}(\xi)]^N\hat{f}$. $Nk = t$, $\lim_{h\to 0}\|\hat{u}-\hat{v}\|_k = 0$ が成立する。ところが. strongly stable から $\|\hat{v}\|_k \leqq \text{const}\,\|\hat{f}\|_k$.
従って. $^\forall\varepsilon > 0$,

$$\|\hat{u}\|_k \leqq \|\hat{u}-\hat{v}\|_k + \|\hat{v}\|_k$$

$$\leqq \varepsilon + \text{const.}\ \|\hat{f}\|_k \Rightarrow \text{strongly well-posedness.}$$

$(\mathcal{D}_{L^2}^{k+l}$ は dense in $\mathcal{D}_{L^2}^{k}.)$

(* ここ以下は Wendroff [5] によった。)

## §4. Finite Difference scheme of Primary type.

オ一の出発点は. Aronson による定理5の逆定理である。

<u>定理6.</u>

(1)(2) が weakly well-posed であるならば, 必らず. 少くとも一つ. consistent な weakly stable な scheme (6) が<u>存在する</u>。Aronson [1], Wendroff [5.].

証明. (1)において. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を $\dfrac{v(x,t+k)-v(x,t)}{k}$ でおきかえる。更に, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ を. $\dfrac{v(x+h_i,t)-v(x-h_i,t)}{2h_i}$ でおきかえる。後の方はむしろ. $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ を $\dfrac{\delta_j}{2h}\,(\delta_j = T_j - T_j^{-1})$ でおきかえるというべきであろう。

我々は、以下で $h_i = h$ としておこう。$(i=1,\cdots,n)$

$$v(x, t+k) = v(x,t) + k P\left(\frac{\delta}{2h}\right) v(x,t)$$
(11)
$$= \left(I + k P\left(\frac{\delta}{2h}\right)\right) v(x,t)$$

というような scheme を得る。明らかに、consistent である。

今、$P(i,\xi)$ の固有多項式 $|\mu I - P(i\xi)|$ の $\mu^{N-k}$ の項の係数（$\xi$ の多項式）の次数を $p_k$ として、

$$m_0 = \max_{1\le k\le N} (p_k/k) \quad \left(\begin{array}{lll} \text{例えば} & \text{heat equation} & m_0 = 2. \\ & \text{wave} & m_0 = 1. \\ & \text{Schrödinger} & m_0 = 2 \end{array}\right)$$

として、$\lambda = k h^{-2m_0} = \text{const}$ におく。

(12) $Q(T) = I + kP\left(\frac{\delta}{2h}\right)$ とかける。

$$\hat{Q}(\xi) = I + kP\left(i\frac{\sin h\xi}{h}\right) \qquad \sin h\xi = (\sin h\xi_1, \cdots, \sin h\xi_n)$$

$\hat{Q}(\xi)$ の固有値 $K_j(\xi)$ については、

$$|K_j(\xi)|^2 = 1 + k\left[2\,\mathrm{Re}\,\mu_j\left(\frac{\sin\xi h}{h}\right) + k\left|\mu_j\left(\frac{\sin\xi h}{h}\right)\right|^2\right].$$

一方、$\max_j |\mu_j(\xi)| \le {}^{\exists}C_1 (1+|\xi|)^{m_0}$ と Well-posedness 定理1 より、よって、

$$|K_j(\xi)|^2 \le 1 + k\left\{2\,{}^{\exists}K + C_1^2 k\cdot h^{-2m_0}(h+\sqrt{n})^{2m_0}\right\}.$$

Von Neumann 定理3 により、weakly stable である。

今 (11) 及び (12) の式を注目すると、これは、$\hat{Q}(\xi)$ が、実は、行列 $P(i \sin h\xi)$ の多項式の行列であることに気がつく。これは、結局、我々が最も naive に時間微分を 前進差分で、空間微分を 中心差分でおきかえ

たことによる。そこで、次の定義をあたえよう。勿論 $\lambda = kh^{-\alpha}$ $\alpha$のとり方は、必らずしも $m_0$ と限らず、もし、我々が、difference scheme $Q(T)$ について、$\hat{Q}(\xi) = F(P(i \sin h\xi))$ $F$: 多項式 の形の差分法が得られたとき、これを、"Primary type" と呼ぶ。

§5. Primary type の例. (ここから、話を hyperbolic に限る。)

i) Friedrichs の Scheme.

(1)の systemが、前の講究録であつかったような一階 system.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{13}$$

であったとする。 $P(i\xi) = \sum_{j=1}^{n} i A_j \xi_j$ 、このときのFriedrichsの scheme は、$\lambda = \frac{k}{h}$ として、Amplification matrixは、

$$I \frac{\sum_{j=1}^{n} \cos h\xi_j}{n} + i\lambda \sum_{j=1}^{n} A_j \sin h\xi_j \tag{14}$$

であって、primary type である。つまり、$I \cdot c(h) + \lambda P(i \sin h\xi)$、この scheme は consistent で、(13)が well-posed のとき、$\lambda$を十分小にすれば、stable である。( 山口、講究録 18. )

ii) Modified Lax-Wendroff

その前に、前回の研究集会で述べたように、普通の Lax-Wendroff は accuracy 2であって、$A_j$ symmetric のとき、$\lambda$を十分小にすると、stable であるけれども、$A_j$ が nonsymmetric である場合には、(13)(2)が strongly well-posed であっても、( regularly hyperbolic 講究録 18 参照) weakly stable にもならないことが示されている。( 山口 YAMAGUTI [8]、講究録 18. )

その普通の Lax-Wendroff を $n=2$ のとき書いてみると、Amplification matrix は、$\left(\lambda = \frac{k}{h}\right.$ として.$\left.\right)$

$$(*)\qquad I + i\lambda(A_1 \sin h\xi_1 + A_2 \sin h\xi_2)$$
$$-\frac{\lambda^2}{2}(A_1 \sin h\xi_1 + A_2 \sin h\xi_2)^2 - 2\lambda^2\left(A_1^2 \sin^4\frac{h\xi_1}{2} + A_2^2 \sin^4\frac{h\xi_2}{2}\right)$$

であって、明らかに Primary type でない.(最後の項!)そこで、最近 Richtmyer によって考案された modified Lax-Wendroff の Amplification matrix を見ると、それは上と同じように書けば、(常に $\lambda = \frac{k}{h}$ である.)

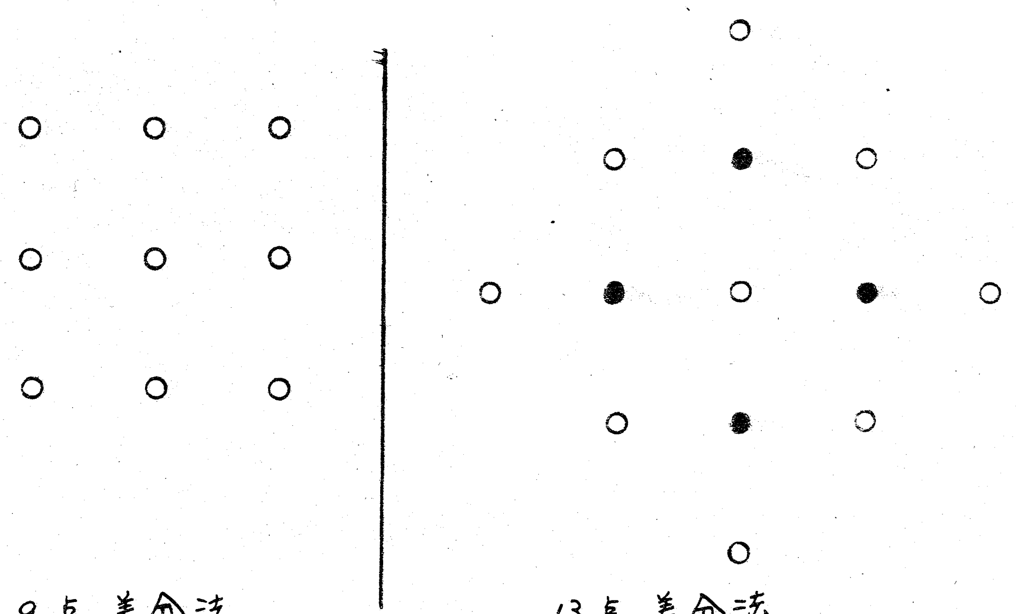
$$(15)\qquad I + i\lambda(A_1 \sin h\xi_1 + A_2 \sin h\xi_2)$$
$$\left[\sum_{j=1}^{2}\frac{\cos h\xi_j}{2} + \frac{i\lambda}{2}(A_1 \sin h\xi_1 + A_2 \sin h\xi_2)\right].$$

これは、正に

$$I + \lambda P(i \sin h\xi)\left[\sum_{j=1}^{2}\frac{\cos h\xi_j}{2} + \frac{\lambda}{2}P(i \sin h\xi)\right]$$

であって. accuracy 2 であるとともに、primary type である。これも実は、(13) が strongly well-posed であるとき、strongly stable であることがただちに示される。また、これは $(*)$ の代用として殆んど欠点はない。

L-W Scheme　　　　L-W Modified scheme



9点 差分法　　　　13点 差分法

但し ● の 4点を用いない.

実用的である。試みに、(15)の strong stability を示そう。

(13) (2) が strongly well-posed のための必十条件は、Kreiss, Yamaguti-Kasahara, Strang により次のことである。

$$\exists S(\xi) \quad |S(\xi)|,\ |S(\xi)^{-1}| < c$$

$$S(\xi)P(i\xi)S(\xi)^{-1} = D(i\xi) \quad \text{diagonal}$$

$P(i\xi)$の固有値はすべて pure imaginary である。今 (15) に $S(\sin h\xi)$ を用いて transform すると、$P(i\sin h\xi)$ の固有値を $\mu_j(i\sin h\xi)$ として、

$$(16) \qquad I + \lambda\mu_j(i\sin h\xi)\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\cos h\xi_l}{2} + \frac{\lambda}{2}\mu_j(i\sin h\xi)\Big)$$
$$= K_j(\xi)$$

である。ここで、$\alpha_l = \cos\xi_l h$, $\beta_l = \sin\xi_l h$, $\mu_j(i\sin h\xi) = i\mu_j'(\beta)$ と書くと、

$$K_j = 1 + i\lambda\mu_j'(\beta)\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\alpha_l}{2} + \frac{i\lambda}{2}\mu_j'(\beta)\Big)$$

と書ける。

$$|K_j|^2 = \Big(1 - \frac{\lambda^2}{2}\mu_j'^2(\beta)\Big)^2 + (\lambda\mu_j'(\beta))^2\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\alpha_l}{2}\Big)^2$$

一方、

$$\Big(\sum_{l=1}^{2}\frac{\alpha_l}{2}\Big)^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}(1-\beta_l^2)$$

$$|K_j|^2 \leq 1 - \lambda^2\mu_j'^2(\beta) + \frac{\lambda^4}{4}\mu_j'^4(\beta) + \frac{\lambda^2\mu_j'(\beta)^2}{2}\sum_{l=1}^{2}(1-\beta_l^2)$$
$$= 1 - \lambda^2\mu_j'^2(\beta)\Big[\frac{\sum_{l=1}^{2}\beta_l^2}{2} - \frac{\lambda^2}{4}\mu_j'^2(\beta)\Big]$$

$\lambda$を十分小にすれば $\underline{|K_j| \leq 1}$ $\Longrightarrow$ stability.

## §6. 変数係数の scheme のための準備, pseudo difference operator.

§4. の定理6に対応する変数係数の場合の定理は Kreiss [4] によって解かれている。しかし、その場合、得られる scheme はごく理論的なもので、実際に用いられるのには程遠い。しからば、定数係数の時実用的であった

scheme はすべて変数係数についてもそのまま係数を変係数の時用いられるのであろうか？ その scheme が primary type であれば この答は肯定的であると思われる。ここでは そのための1つの資料として §5 で述べた Friedrichs の scheme について、方程式(13) 及びそれに対応する scheme が、変係数の場合にも $\lambda$ 十分小として安定であることを示そう。

まず、変数係数の scheme とは何かということから考えよう。今、次のような parameter $h>0$ に depend した operator の family $P_h$ を考えよう。

$$(17)\qquad P_h=\sum_{|\alpha|\le q}p_\alpha(x)T^\alpha$$

但し、$T^\alpha$ は前に述べた translation operator である。$h_i=h$ とこの場合はとっておく。これに対しては常に下に述べる form (これを $P_h$ の symbol と呼ぶ。)

$$(18)\qquad P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\le q}p_\alpha(x)e^{i\alpha\xi}$$

を対応させる。一方、$p_\alpha(x)$ は $C^\infty$ で、十分大きな $R$ に対しては $p_\alpha(x)\equiv p_\alpha$ なる常数行列であると仮定しよう。このような operator の family についてのよく知られた rule がある。( Lax-Nirenberg [7].)

Lemma 1.

$A_h$, $B_h$ がそれぞれ、$a(x,\xi)$, $b(x,\xi)$ を symbol とする difference operator の family とする。$C_h$ を $a(x,\xi)b(x,\xi)$ を symbol とする difference operator の family とすれば、次のことが成立する。

$$\|A_h\|\le|a|_{00}$$
$$\|A_hB_h-C_h\|\le h|a|_{0,1}|b|_{1,0}$$

$$\| A_h^* - A_h^\# \| \leqq h\, |a|_{1,1}$$

ここで、$A_h^*$ は $A_h$ の $L^2$-adjoint で、$A_h^\#$ は $a^*(x,\xi)$ を symbol とする difference operator である。また、$|a|_{k,l}$ は、

$$|p|_{k,l} = \sum_\alpha |p_\alpha|_k (1+|\alpha|)^l \qquad |\alpha|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$
$$|p|_k = \sup_{x} \sum_{|\beta| \leqq k} \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} p_\alpha(x) \right| .$$

上のような calculus を実は (17) のような $T$ の polynomial のみでなくて、$T$ のある意味での代数函数にまで拡張しようというわけである。上の lemma の証明は、$a(x)$ が derivative bounded のとき $\|a(x)T - Ta(x)\| \leqq h\,|a(x)|_1$ であることにもとずいて証明が行われる。これと同様に、まず次のことを見よう。$\Lambda_h$ という新しい (pseudo-difference operator!) を次のように define する。

$$(19) \qquad \Lambda_h = \mathcal{F}^{-1} |\sin h\xi| \mathcal{F} .$$

これは明らかに $L^2 \to L^2$ の bounded operator であるが、$a(x)$ を再び上のような smooth な coefficient とするとき、$a(x)\Lambda_h - \Lambda_h a(x)$ は、次の式をみたすことが証明できる。

$$(20) \qquad \| a(x)\Lambda_h - \Lambda_h a(x) \| \leqq h \, \| |\hat{a}(\xi)| |\xi| \|_{L_1}$$

証明. $u \in \mathcal{D}$ として、

$$\mathcal{F}[a(x)\Lambda_h - \Lambda_h a(x)]u$$
$$= \int \hat{a}(\xi-\eta)\, |\sin h\eta|\, \hat{u}(\eta)\, d\eta - \int \hat{a}(\xi-\eta) |\sin h\xi| \hat{u}(\eta) d\eta$$

$$= \int \hat{a}(\xi-\eta)\,[\,|\sin h\eta| - |\sin h\xi|\,]\,\hat{u}(\eta)\,d\eta.$$

$$\|[a(x)\Lambda_h - \Lambda_h a(x)]u\|$$

$$\leq \| \int |\hat{a}(\xi-\eta)|\,|\sin h\eta - \sin h\xi|\,|\hat{u}(\eta)|\,d\eta \|$$

$$= \| \int |\hat{a}(\xi-\eta)|\,|2\sin h\frac{(\xi-\eta)}{2}|\,|\cos\frac{h(\xi+\eta)}{2}|\,\hat{u}(\eta)\,d\eta \|$$

$$\leq h \| \int |\hat{a}(\xi-\eta)|\,|\xi-\eta|\,|\hat{u}(\eta)|\,d\eta \|$$

(Housdorf - Young)

$$\leq h \,\| |\hat{a}(\xi)|\cdot|\xi| \|_{L_1}\cdot \|u\|. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

## §7. An algebra of one parameter families of bounded operators.

$\mathbb{K}$を $N\times N$ matrix valued function $k(x,\xi)$で次の性質をもつものの全体としよう。 $R$を一定数 $>0$として,

i) $k(x,\xi)$は, $\xi$に関して homogenous degree zero.
$\xi \neq 0$においては, $C^m$ function.

ii) $k(x,\xi)$は, $|x| \geq R$で $x$に無関係.

iii) $k(x,\xi) \in C_x^m$ for $x \in R_x^n$, $\xi \in S_\xi^{n-1}$.

Lemma 2. (P.D. Lax)

$K$の element $k$は, 次のような series に expand できる。

(21) $$k(x,\xi) = \sum_j a_j(x) \exp\left(ij\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

$j$は multi index を動き, この級数は $^\forall k \in K$に対して normally convergent で, しかも, 項別微分した級数も一様収束である。この分解定理を用いることにして, 次のように $K$の各 element $k(x,\xi)$に一つの family of bounded operator $K_h$を associate する。特別な二つ

合から始める。

(I) $k(x,\xi) = k(x)$ のとき $K_h$ は $k(x)$ の multiplication.

(II) $k(x,\xi) = k(\xi)$ のとき $K_h$ は下のように define される。

$$K_h = \mathcal{F}^{-1} k(\sin h\xi)\, \mathcal{F}. \tag{22}$$

また $k(x,\xi) = \sum a_j(x)\, k_j(\xi)$ の形のときは、それぞれ、$a_j(x)$、$k_j(\xi)$ で (I) (II) に従ってassociateされた operator を $A_{jh} \cdot K_{jh}$ とすると、$\sum_j A_{jh} K_{jh}$ を associate する。上のような形の $k(x,\xi)$ は $K$ の中に dense にあり、また、$k \to K_h$ への mapping は、$C^m(R^n_x)$, $C^m(R^n_\xi - 0)$ の norm で continous であるので、各 $k(x,\xi) \in K$ に対して $K_h$ が define される。

以上のように定義された $K_h$ に対しては、次のような calculus が lemma 1と同様に成り立つ。

ここで、$L^2$-bounded operator の family の中で norm が $h$ で押えられるものを $\delta$-family と呼ぶ。そして、$\mathcal{C}$ とかく。

Lemma 3.

$K_h$ が $K$ の element $k(x,\xi)$ で define された operator とすると、$K_h \Lambda_h - \Lambda_h K_h \in \mathcal{C}$.

Lemma 4.

$A$ は、$a(x) \in K$, $K_h$ は $k(x,\xi) \in K$ で define された operator とすると、$(AK_h - K_h A)\Lambda_h$, $\Lambda_h(AK_h - K_h A) \in \mathcal{C}$.

定理 7.

$h$ と $k \in K$ としたとき、それぞれ対応する operator を $H_h$, $K_h$ とし、$h \cdot k$ に対応する operator を $H_h \circ K_h$ と書くと、$(H_h K_h - H_h \circ K_h)$

$A_h,\ A_h(H_hK_h - H_h\cdot K_h) \in \mathcal{C}$.

定理 8.

$p(x,\xi) \in K$ で $p(x,\xi)$ positive definite であるとする。対応する operator $P_h$ について次のことが成り立つ。

(23) $$\mathrm{Re}\langle P_h A_h^2 u, u\rangle \geqq -O(h)\|u\|^2 \qquad {}^\forall u \in L^2.$$

§8. Friedrichs の Scheme の安定性.
(変数係数の場合)

次のような一階変係数の連立微分方程式系を考えよう。

(24) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

ここで、$A_j(x)$ は、$C^\infty(R_x^n)$ で、$|x|>R$ では定数であるような $N\times N$ matrix. これが regularly hyperbolic であるとしょう。つまり.

(25) $$\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\xi_j = A(x,\xi)$$

が、real distinct root を持つ。この場合、次のような matrix $N(x,\xi)$ が存在することはよく知られている。$D(x,\xi)$ を $A(x,\xi)$ の固有値を対角要素とする対角行列、$N(x,\xi) \in C^\infty(R_x^n)$, $N(x,\xi) \in C^\infty(R_\xi^n - 0)$ で $\xi$ に関し homogenous zero. $|N(x,\xi)|$, $|N(x,\xi)^{-1}| \leqq C$ で、

(26) $$D(x,\xi) = N(x,\xi)A(x,\xi)N(x,\xi)^{-1}.$$

この連立方程式の初期値問題をとく scheme として、§5 で考えた Friedrichs

の scheme の変数係数のものを考えよう。

$$(27)\qquad u(x, t+k) = S_h\, u(x, t)$$

$$(28)\qquad S_h = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{T_j + T_j^{-1}}{2n} + \lambda A_j(x) \frac{T_j - T_j^{-1}}{2} \right\}$$

但し、$\lambda = \dfrac{k}{h}$ である。

定理 9.

もし、$0 < \lambda < \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\mu_0}$ ならば (27), (28) の scheme は strongly stable である。但し、$\mu_0 = \max\limits_{\substack{p=1,\cdots,N \\ |\xi| \leq 1 \\ x \in R^n}} |\mu_p(x, \xi)|$、$\mu_p(x, \xi)$ は $A(x, \xi)$ の固有値である。

証明. ${}^{\forall}u \in L^2$ に対して $C$ があって、

$$\| S_h^m u \| \leq C \| u \| \qquad (mk \leq T)$$

が示されれば、それが $L^2$-stability - Strong stability である。

i) 新しい Norm の構成

式 (26) で用いられた $N(x, \xi)$ について、今 $h(x, \xi) = N^*(x, \xi) N(x, \xi)$ とすると、$h \in K$ ( $\S$ の意味の) であるので、この $h$ によって define される pseudo-difference operator $H_h$ が存在する。$\langle R H_h u, u \rangle$ は $u$ の support が十分小のときは positive definite であることを示す。

$$(29)\qquad \langle H_h u, u \rangle \doteq \langle H_{0h} u, u \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle (x^j - x_0^j) H_{jh} u, u \rangle$$

と書けるので、$x_0$ を $u$ の support の一点とするとき、十分 support をしぼれば $\langle H_h u, u \rangle \geq d_1 \| u \|^2$ で positive definite である。

(30) $\quad \mathcal{R}e \langle H_h u, u \rangle \geqq \alpha_1 \|u\|^2.$

次に、$A_i(x)$ に対する仮定から finite partion of unity $\{\varphi_p\}$ が存在して、$\sum_p \varphi_p^2 = 1$. $\varphi_p$ の support は (30) が成り立つ程小さいとする。そこで新しい norm を、

(31) $\quad \|u\|_H^2 = \sum_j \mathcal{R}e \langle H_h \varphi_j u, H_h \varphi_j u \rangle$

でつけると、これは $L^2$- Norm と equivalent である。

ii) 安定性の証明.

次のことを示せば十分である。

(32) $\quad \|S_h u\|_H \leqq (1 + O(h)) \|u\|_H.$

そのためには、次のことを示せば十分である。

(33) $\quad \mathcal{R}e \langle H_h S_h \varphi_j u, S_h \varphi_j u \rangle \leqq (1 + O(h)) \mathcal{R}e \langle H_h \varphi_j u, \varphi_j u \rangle$

何故なら、(33)の左辺と $\mathcal{R}e \langle H_h \varphi_j S_h u, \varphi_j S_h u \rangle$ の差は、

$$\begin{aligned} &| \langle H_h \varphi_j S_h u, \varphi_j S_h u \rangle - \langle H_h S_h \varphi_j u, S_h \varphi_j u \rangle | \\ &= | \langle H_h (\varphi_j S_h - S_h \varphi_j) u, \varphi_j S_h u \rangle \\ &\qquad + \langle H_h S_h \varphi_j u, (\varphi_j S_h - S_h \varphi_j) u \rangle | \\ &\leqq O(h) \|u\|^2. \end{aligned}$$

さて、(33)を $\varphi_j u = v$ とおいて示すことにしよう。それは、

(34) $\quad \mathcal{R}e \langle (H_h - S_h^* H_h S_h) v, v \rangle \geqq -O(h) \|v\|^2.$

$S_h$ 及び $S_h^*$ は次のように書ける。

(25) $$S_h = E_h + i Q_h \Lambda_h, \quad S_h^* = E_h^* - i Q_h^* \Lambda_h .$$

但し、$E_h = \mathcal{F}^{-1}\left[I\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\cos h\xi_j}{n}\right]\mathcal{F}$ であり、$Q_h$ は $\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\frac{\xi_j}{|\xi|}\in K$ に対応する family である。

$$P_h = H_h - S_h^* H_h S_h .$$

$$P_h = P_h^{(0)} + i P_h^{(1)} + P_h^{(2)}$$

$$P_h^{(0)} = H_h - E_h^* H_h E_h$$

$$P_h^{(1)} = Q_h^* \Lambda_h H_h E_h - E_h^* H_h Q_h \Lambda_h$$

$$P_h^{(2)} = Q_h^* \Lambda_h H_h Q_h \Lambda_h .$$

先ず、$P_h^{(1)} = 0 \pmod{\mathcal{C}}$ を示す。

$$Q_h^{\#}\circ H_h = H_h \circ Q_h \quad (N(x,\xi)\text{ の定義より。})$$

と lemma 5, lemma 3 を用いて、

$$\begin{aligned} Q_h^* \Lambda_h H_h E_h &\equiv Q_h^{\#} \Lambda_h H_h E_h \equiv Q_h^{\#} H_h \Lambda_h E_h \\ &\equiv Q_h^{\#}\circ H_h \Lambda_h E_h \equiv H_h \circ Q_h \Lambda_h E_h \\ &\equiv H_h Q_h \Lambda_h E_h \equiv H_h Q_h E_h \Lambda_h \\ &\equiv H_h E_h Q_h \Lambda_h \equiv E_h^* H_h Q_h \Lambda_h . \end{aligned}$$

更に、

$$\begin{aligned} P_h^{(2)} &\equiv Q_h^{\#} \Lambda_h H_h Q_h \Lambda_h \equiv Q_h^{\#} H_h \Lambda_h Q_h \Lambda_h \\ &\equiv Q_h^{\#}\circ H_h \Lambda_h Q_h \Lambda_h \equiv Q_h^{\#}\circ H_h Q_h \Lambda_h^2 \end{aligned}$$

$$= Q_h^{\#} \circ H_h \circ Q_h \Delta_h^2 .$$

また、$P_h^{(0)} = H_h(I - E_h^* E_h)$、

従って $P_h = H_h(I - E_h^* E_h) - Q_h^{\#} \circ H_h \circ Q_h \Delta_h^2$ を得る。

$I - E_h^* E_h$ の Fourier 変換は、

$$I\left(1 - \left(\frac{\sum \cos h\xi_j}{n}\right)^2\right) \quad \text{であり、}$$

$$1 - \left(\frac{\sum \cos h\xi_j}{n}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{\sum \cos^2 h\xi_j}{n} + \frac{\sum_{j>k} (\cos h\xi_j - \cos h\xi_k)^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n} |\sin h\xi|^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{j>k} (\cos h\xi_j - \cos h\xi_k)^2 .$$

そこで、$T_{jk} = T_j + T_j^{-1} - T_k - T_k^{-1}$ とおくと、

$$P_h = \frac{1}{n^2} \sum_{j>k} H_h T_{jk}^2 + \left(\frac{1}{n} H_h - \lambda^2 Q_h^{\#} \circ H_h \circ Q_h\right) \Delta_h^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{j>k} T_{jk} H_h T_{jk} + \left(\frac{1}{n} H_h - \lambda^2 Q_h^{\#} \circ H_h \circ Q_h\right) \Delta_h^2 .$$

また、

$$\frac{1}{n} H_h - Q_h^{\#} \circ H_h \circ Q_h = N_h^{\#} \circ \left(\frac{1}{n} - \lambda^2 D_h^{\#} \circ D_h\right) \circ N_h$$

とかけて、定理Aにより（$N_h^{\#} \circ \left(\frac{1}{n} - \lambda^2 D_h^{\#} \circ D_h\right) \circ N_h$ は、$\lambda$ が定理の条件をみたすとき、positive であり。） $T_{jk}^* = T_{jk}$ を考慮して、

$$Re(P_h v, v) = Re \frac{1}{n^2} \sum_{j>k} (H T_{jk} v, T_{jk} v)$$

$$+ Re\left(N_h^{\#} \circ \left(\frac{1}{n} - \lambda^2 D_h^{\#} \circ D_h\right) \circ N_h v, v\right)$$

$$\geq \frac{1}{n^2} d_1 \|T_{jk} v\|^2 - O(h)\ \|v\|^2$$

$$\geq -O(h) \|v\|^2$$

$$\geq -O(h)\ \mathrm{Re} \langle H_h v, v \rangle.$$

c.q.f.d.

References

[1] Aronson, D.G. On the correctness of partial differential operators and the von Neumann condition for stability of finite difference operators. P.A.M.S. 1963, 14, 948-955.

[2] Kreiss, H.O. Über Matrizen die beschränkte Halbgruppen erzengen. Math. Scand. 1959, 7, 71-80.

[3] Kreiss, H.O. Über die Stabilitätsdefinition für Differenzen-gleichungen die partielle Differential gleichungen approximieren. BIT 1962, 2, 153-181.

[4] Kreiss, H.O. Über die Lösung des Cauchy problems für linearen partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzenglei-chungen. 1. Acta Math. 1959, 101, 179-199.

[5] Wendroff, B. Well posed problems and stable difference operators. (Manuscript)

[6] Lax, P.D. The $L_2$ operator calculus of Mikhlin, Calderon, and Zygmund. (Mimeograph lecture note)

[7] Lax, P. D. and L. Nirenberg On stability for difference Schemes: a sharp form of Gårding's Inequality. C.P.A.M. 1966, 19, 4, 473-492.

[8] Yamaguti, M. Some remarks on Lax-Wendroff scheme. (To appear in Math. of Computation (1967, Oct.)

[9] 山口昌哉 双曲型偏微分方程式の初期値問題を解く Scheme について. 数理解析研究録 第18巻 p.1-17.