数理解析研究所講究録
第 33 巻 1967 年 1-55

非線型制御の絶対安定性について

東北大 理学部　加藤順二

§1 序　攪乱された運動の方程式が

(1) $$x = Ax$$

で与えられている場合に、自動制御系

$$\dot{x} = Ax + b\xi$$

(2)　(a)　$\xi = f(\sigma)$,　$\sigma = {}^{T}cx$

(b)　$\dot{\xi} = f(\sigma)$,　$\sigma = {}^{T}cx - \rho\xi$

の絶対安定性の問題について紹介をこころみたい。ここで、Aは定数行列、b, c は定数ベクトル，左肩のTは転置をあらわしており、技術的には

(1)は *state system*

c, b は *control parameters*

σ は *control signal*

f(σ) は *characteristic function*

として一般に(a)は直接制御、(b)は間接制御と呼ばれており、(2)における非線型性はfのみに由来している。これは

一見してわかるように様々な理想化のもとで得られたもので、特性函数 f に対しても次のような制限が課せられているものとする。すなわち、

(i) $f(\sigma)$ は $\sigma \in (-\infty, \infty)$ で連続.

(ii) ある定数 $0 \leqq h_1 \leqq h_2 \leqq \infty$ に対して

$$h_1\sigma^2 \underset{(=)}{<} \sigma f(\sigma) \underset{(=)}{<} h_2\sigma^2 \quad (\sigma \neq 0), \quad f(0) = 0$$

が常に成り立っている.

(iii) $$\int^{\sigma} f(\sigma)\,d\sigma \longrightarrow +\infty \quad (|\sigma| \longrightarrow \infty).$$

上の条件をみたす函数の族を (ii) における不等式において等号のあるなしに応じて $\mathfrak{A}([h_1, h_2])$, $\mathfrak{A}((h_1, h_2])$ 等で表わすことにする。特性函数の族としては、連続性の失なわれている場合や $\sigma = 0$ の近傍で恒等的に零となっている場合なども取り扱われている。このような式の理想化あるいは特性函数に対する制限によって実際の問題がどの程度 cover されているか、あるいは、今後特にどの方向での研究が望まれているかということは技術関係の方の説明に任って、ここでは、(2) あるいは そこで σ がベクトルの場合、あるいは、遅れ時間を持つ場合について、数学的な立場から考えてみたい。

絶対安定性 (absolute stability) のことばは Letov が初めて用いた言葉 (1955) だと思いますが、1944年に Lurie と Postnikov によって提起された問題で、ある族に属する特性

函数fの如何にかゝわらず(2)のすべての解がtの増加と共に零に近ずくこと、すなわち、零解が大域的漸近安定であることを表わしている。したがって、これはいわゆる全安定(total stability)(注1)と呼ばれているものの一種だと考えられるが、こゝでは摂動項、すなわち、特性函数をある特定の族に制限して考えることから、よりexactな評価が可能となっている。

§2. 直接制御と間接制御. この二つはfeedbackの操作のやり方の違いから起るもので、技術的には本質的な違いをもっていると考えられており、数学的にもその取り扱いの上でかなりの違いを示している。しかし、その違いはstate matrix Aの特性根の状態に由来していると云った方がより本質的だと云える。

すなわち、(2a)は

(3) $$\dot{x} = Ax + bf({}^{T}cx)$$

と書けて、この零解の大域的漸近安定性を示すことが問題となる。この(3)は自励系であり定点は零だからこの結果が成り立つためには、まず定点は$x=0$に限ることが示されなくてはならない。今後を通じて、特性函数は§1で述べた族で制限されているものとすれば、適当な正の定数kに対して

$f(\sigma)=h\sigma$ はこの族に属している．したがって，上に述べたことから

$$Ax + hb^{T}cx = 0$$

は $x=0$ のみを解に持つこと、すなわち、行列 $D=A+hb^{T}c$ が正則であることが成り立たねばならない。

今、A の特性根の一つが零であると仮定すれば，適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A^{*} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0\delta & 0 \end{pmatrix}$$

とすることが出来る。したがって，

$$\det D = \det[P^{-1}AP + h(P^{-1}b)^{T}({}^{T}Pc)]。$$

したがって，$P^{-1}b = (b_1, \cdots, b_n) = (b^{*}, b_n)$, ${}^{T}Pc = (c_1, \cdots, c_n) = (c^{*}, c_n)$ と置けば,

(4) $$\det D = hc_n \cdot \det \begin{pmatrix} A^{*} & b^{*} \\ 0 \cdots 0\delta & b_n \end{pmatrix} \neq 0$$

が求める条件となる。さて，変換 $x = P\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, y は $(n-1)$ ベクトル，z はスカラー，によって (3) は

$$\dot{y} = A^{*}y + b^{*}f({}^{T}c^{*}y + c_n z)$$

$$\dot{z} = \delta y_{n-1} + b_n f({}^{T}c^{*}y + c_n z),$$

すなわち，

(5) $$\dot{y} = A^{*}y + b^{*}f(\sigma), \quad \dot{z} = \delta y_{n-1} + b_n f(\sigma)$$

$$\sigma = {}^{T}C^{*}y + c_n z$$

に移される。$c_n \neq 0$ に注意して変換

$$(y, z) \longrightarrow (y, \sigma) : \quad y = y, \quad \sigma = {}^{T}C^{*}y + c_n z$$

を施こせば、これは正則で (5) は

$$\dot{y} = A^{*}y + b^{*}f(\sigma), \qquad \dot{\sigma} = {}^{T}dy - \rho f(\sigma)$$

(6)

$$d = {}^{T}\begin{pmatrix} A^{*} \\ 0 \cdots 0\,\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{*} \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad \rho = -{}^{T}C^{*}b^{*} - c_n b_n$$

に変換される。更に、変換

$$(y, \sigma) \longrightarrow (u, \xi) : \quad y = A^{*}u + b^{*}\xi, \qquad \sigma = {}^{T}du - \rho\xi$$

を考える。この変換の係数のなす行列式を求めると、d、ρ は (6) で与えられているから、

$$\det\begin{pmatrix} A^{*} & b^{*} \\ {}^{T}d & -\rho \end{pmatrix} = \det\left[\begin{pmatrix} E & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ {}^{T}C^{*} & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{*} & b^{*} \\ 0 \cdots 0\,\delta & b_n \end{pmatrix}\right]$$

$$= c_n \det\begin{pmatrix} A^{*} & b^{*} \\ 0 \cdots 0\,\delta & b_n \end{pmatrix}$$

となって、これは (4) より零ではない。したがって、この変換は正則で、これによって (6) は

$$\dot{u} = A^{*}u + b^{*}\xi, \qquad \dot{\xi} = f(\sigma)$$

(7)

$$\sigma = {}^{T}du - \rho\xi$$

に移される。これは (2b)、すなわち、間接制御の系を表わしている。すなわち、A の特性根の一つが零であるとき、(2)

が絶対安定であるためには条件(α)が成り立たねばならない。かつ、この条件のもとで、系(7)が絶対安定であることが必要かつ充分である。なお、条件(α)において、$\delta=0$すなわち、Aが零を単因子が一次の特性根としてもつ場合はA^*は正則。すなわち、Aは零を特性根として只一つだけ持つことは明かである。

逆に、(2b)を考える。この絶対安定性とは$(x,\xi)\to 0$となることである。今、変数変換

$$(x,\xi) \longrightarrow y: \quad y=\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

を考えて、

$$A^*=\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^*=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \quad c^*=\begin{pmatrix} c \\ -\rho \end{pmatrix}$$

とおけば、(2b)は直ちに、

$$\dot{y}=A^*y+b^*f(\sigma), \quad \sigma={}^Tc^*y.$$

となって、これは(2a)すなわち、直接制御の形をしている。これに対して、直接制御の場合に述べたのと同様にある定数hに対して$D^*=A^*+hb^*{}^Tc^*$が正則であること、

$$\det D^*=\det\begin{pmatrix} A & b \\ h{}^Tc & -\rho h \end{pmatrix}=h\det\begin{pmatrix} A & b \\ {}^Tc & -\rho \end{pmatrix}\neq 0$$

であることが絶対安定性のための必要条件となる。したがって、特に、特性函数の族として$\sigma\neq 0$に対して、$f(\sigma)=0$とな

り得る場合は除外されていなくてはならない。また、このとき、変換

$$(x,\xi)\longrightarrow(u,\sigma):\quad u=Ax+b\xi,\ \sigma={}^{T}cx-\rho\xi$$

は正則で、これによって

$$\dot{u}=Au+bf(\sigma),\quad \dot{\sigma}={}^{T}cu-\rho f(\sigma)$$

すなわち，(6) の形をしている。上にのべたことをまとめてのべれば，(2a) の state matrix A が 0 を特性根とする場合が間接制御だと述べてもよいことを示している。

特性函数の族が $\mathfrak{A}([h_1,h_2])$ であるときには $f(\sigma)\in\mathfrak{A}([h_1,h_2])$ に対して $f^*(\sigma)=f(\sigma)-h_1\sigma$ とおけば，$f^*(\sigma)\in\mathfrak{A}([0,h_2-h_1])$ となっていて(こゝでは条件(iii)は無視して考える)，(2a)，すなわち，

(8) $$\dot{x}=Ax+bf(\sigma),\quad \sigma={}^{T}cx$$

は，$A^*=A+h_1b{}^{T}c$ とおいて

$$\dot{x}=A^*x+bf^*(\sigma),\quad \sigma={}^{T}cx$$

に変換される。したがって，特性函数の族において $h_1=0$ の場合だけを考えてよい。A^* の特性根は h_1 が充分小さければ A の特性根の充分小さな近傍にとどまっている。ゆえに，A の特性根がすべて負の実部を持つとき(このとき簡単に A は安定であると云う) h_1 を充分小さくとれば $A^*=A-h_1b{}^{T}c$ も安定である。したがって，逆に，特性函数の族が $\mathfrak{A}((0,h_2])$ あるいは $\mathfrak{A}((0,h_2])$ で与えられているとき，A が安定ならば，充分小

さなk_1に対して、A^*が安定であるという性質を保存しながら、特性函数の族が$\mathfrak{A}([k_1, k_2])$あるいは$\mathfrak{A}([k_1, k_2+k_1])$であって$0<k_1<k_2\leqq\infty$としてよい。

$k_1=0$と仮定すれば、いくらでも小さな定数$k>0$に対して$f(\sigma)=k\sigma$はこの族に属している。したがって、(8)が絶対安定であるためには、このような$f(\sigma)$に対して(8)の零解が漸近安定でなくてはならない。すなわち、行列$A+kb^Tc$は安定でなくてはならない。したがって、Aが正の実部をもった特性根をもつことはできない。

かくして、$k_1=0$のとき、制御系(8)はAizermanとGantmacherに従ってAが安定であるか否かによって分類することが出来る。

さて、上述に於いて、必要条件をもとめるのに、$f(\sigma)=k\sigma$を代入して考えた。この逆の問題がAizermanのconjectureと呼ばれるもので、

"特性函数の族を$\mathfrak{A}(I)$(Iはある区間)としたとき、すべての$k\in I$に対して、$f(\sigma)=k\sigma$としたとき(8)の零解が漸近安定ならば(8)は絶対安定か"

という問題が考えられるが、これは必ずしも成り立たないことが示されている。

絶対安定性を調べる上で、現在までに知られている一般的

な方法は Liapunov の直接法と Popov の方法につきるように思われる。そこでこの二つの方法について述べていきたい。

§3. Liapunov の直接法。 前節において、直接制御と間接制御との違いについて考えたが、(2b) と A を正則としたときの (2a) との間には取り扱い上、差があるので今後も区別して考えることにする。

これまでに知られている結果の多くは multiple feedback の場合に対しても成り立っているのでこの節では主としてこの場合を考えることにする。multiple feedback の場合とは、(2a), (2b) における σ がベクトルで与えられている場合であって、今、各量の次元を

x : n ベクトル,

σ, ξ : m ベクトル,

A : (n, n) 行列,

b, c : (n, m) 行列,

ρ : (m, m) 行列

と置く。このとき、特性函数の族に関する条件は

(i) 各 $f(\sigma)$ に対して次の条件をみたすスカラー函数 $U(\sigma)$ が存在する,

(a) $U(\sigma)$ は連続的微分可能,

(b) $i \neq j$ に対して $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}$ が存在して連続である,

(c) $\|\sigma\| \to \infty$ のとき $U(\sigma) \longrightarrow +\infty$, $U(0)=0$,

(d) $f(\sigma) = \mathrm{grad}\, U(\sigma) = \dfrac{\partial U}{\partial \sigma}$

(ii) ある定数 $0 \leqq k_1 < k_2 \leqq \infty$ に対して

$$f(0)=0, \quad {}^T f(\sigma)\sigma \geqq k_1 \|\sigma\|^2, \quad \|f(\sigma)\| \leqq k_2 \|\sigma\|, \quad (\sigma \neq 0).$$

この場合にも、前と同様にこれらの族を $\mathfrak{A}((k_1, k_2])$, $\mathfrak{A}((k_1, k_2])$ などで表わすことにしよう。(i) の仮定をとって容易にわかるように、線積分

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} {}^T f(\sigma)\, d\sigma$$

は σ_1 と σ_2 とを結ぶ道に無関係に定まってそれは $U(\sigma_2) - U(\sigma_1)$ で与えられ、λ をスカラーとすれば

$$U(\sigma) = \int_0^{\sigma} {}^T f(\sigma) d\sigma = \int_0^1 {}^T f(\lambda\sigma)(\lambda\sigma) \frac{1}{\lambda} d\lambda$$
$$\geqq k_1 \|\sigma\|^2 \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} k_1 \|\sigma\|^2$$

が得られる。同様に、$U(\sigma) \leqq \dfrac{k_2}{2} \|\sigma\|^2$ もわかる。特に、$f_i(\sigma)$ が σ_i だけに依存しているときは、$f \in \mathfrak{A}([k_1, k_2])$ ならば $f_i \in \mathfrak{A}([k_1, k_2])$, また逆に k_2 に対して k_2' を適当にえらべば、$f_i \in \mathfrak{A}([k_1, k_2])$ より $f \in \mathfrak{A}([k_1, k_2'])$ が得られる。更に、H を対称 (m, m) 行列でその特性根は $[k_1, k_2]$ に属しているとすれば函数 $f(\sigma) = H\sigma$ は $\mathfrak{A}([k_1, k_2])$ に属することも容易にわかる。

先ず、特性函数の族を $\mathfrak{A}((0, k^*])$ として $(k^* < \infty)$ 間接制御系 (2b) について考える。(2b) が絶対安定であるとすれば、(x, ξ)

平面において危点は原点に限る。$h\in(0,h^*]$ に対して $f(\sigma)=h\sigma$ は $\mathfrak{N}((0,h^*])$ に属していることに注意して、その条件を $f(\sigma)=h\sigma$ のときに求めると前と同様に

$$\det\begin{pmatrix} A & b \\ h\,{}^{T}c & -h\rho \end{pmatrix} = h^{m}\det\begin{pmatrix} A & b \\ {}^{T}c & -\rho \end{pmatrix} \neq 0$$

が得られる(p.6参照)。このとき、変換

$$(x,\xi)\longrightarrow(y,\sigma):\quad y=Ax+b\xi,\quad \sigma={}^{T}cx-\rho\xi$$

は正則で、これによって(2b)より

(10) $$\dot{y}=Ay+bf(\sigma),\qquad \dot{\sigma}={}^{T}cy-\rho f(\sigma)$$

が得られる。すなわち(2b)が絶対安定であるためには条件

(11) $$\det\begin{pmatrix} A & b \\ {}^{T}c & -\rho \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つことが必要であり、この条件のもとで、系(10)が絶対安定であることゝ同値である。

今、Aを安定として、Liapunov 函数

(12) $$V(y,\sigma)={}^{T}yBy+U(\sigma)$$

を考える。こゝで、Bは適当に与えられた正定値対称行列 C(これを $C>0$ で表わす)に対して次の定理で定められた正値対称行列である。

定理1 (Liapunov) Aが安定な行列ならば任意な対称行列 C に対して

$$ {}^{T}AB + BA = -C $$

をみたす対称行列Bが一意的に定まる。更に、$C>0$ならば$B>0$である。

Liapunovの直接法で基本的な役割りを果すのは次の定理である。

$\boxed{\text{定理 2}}$ (Barbashin-Krasovski)。方程式

$$ \dot{x} = F(x), \quad F(0) = 0 $$

において$F(x)$は連続とする。このときこの零解が大域的に漸近安定であるためには連続的微分可能なスカラー函数$V(x)$が存在して条件

1°) $V(x) \geqq 0$, $x=0$かつそのときに限り$V(x)=0$,

2°) $\|x\| \longrightarrow \infty$ ならば $V(x) \longrightarrow +\infty$,

3°) $\dot{V}(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot F(x) \leqq -c(\|x\|)$, こゝで$c(r)$は正定値,

をみたすことが充分な条件である。

さて、(12)で定められたVが(x, σ)に関して定理2における条件(1°), (2°)をみたしていることは明らかである。したがって(3°)をみたすように出来れば定理2によって(10)したがって(2b)の絶対安定性が示されることになる。すなわち、(3°)が成り立つための条件を見出すことが問題となる。(10)によってVの微係数を求めると

$$ \dot{V} = {}^{T}y({}^{T}AB + BA)y + 2\,{}^{T}f({}^{T}bB + \frac{1}{2}{}^{T}c)y - {}^{T}f\rho f $$

$$= -{}^T y C y + 2{}^T f {}^T d y - {}^T f \rho f,$$

$$d = Bb + \frac{1}{2}c。$$

これは (y, f) に関する二次型式とみることが出来るから、これが負定値であることを示せばよい。その条件は

$$(13) \qquad P = \begin{pmatrix} C & -d \\ -{}^T d & \frac{1}{2}(\rho + {}^T\rho) \end{pmatrix} > 0$$

が成り立つことである。

さて、こゝで不等式 (11) と (13) との関係について考えてみよう。

$$-C = {}^T AB + BA, \qquad d = Bb + \frac{1}{2}c$$

であるから、P は

$$P = \begin{pmatrix} -{}^T AB - BA & -Bb - \frac{1}{2}c \\ -{}^T bB - \frac{1}{2}{}^T c & \frac{1}{2}(\rho + {}^T\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -{}^T AB & -\frac{1}{2}c \\ -{}^T bB & \frac{1}{2}{}^T\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -BA & -Bb \\ -\frac{1}{2}{}^T c & \frac{1}{2}\rho \end{pmatrix}$$

と書ける。すなわち、

$$P = {}^T Q + Q \quad , \qquad Q = \begin{pmatrix} -BA & -Bb \\ -\frac{1}{2}{}^T c & \frac{1}{2}\rho \end{pmatrix}$$

$(n+m)$ ベクトル u に対して

$${}^T u P u = 2{}^T u Q u$$

であるから、$P > 0$ ならば Q は正則となる。一方、

$$Q = -\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ {}^T c & -\rho \end{pmatrix}$$

であるから(13)したがって $\det Q \neq 0$ より(11)が得られる。(注2)

以上をまとめると、

$\boxed{\text{定理3}}$。Aが安定で、特性函数の族を$\mathfrak{A}((0,k^*])$としたとき、(2b)が絶対安定であるための充分条件は(13)が成り立つことである。

一般に、Lを正則な正方行列、Rを正方行列としたとき正方行列Pが

$$P = \begin{pmatrix} L & M \\ N & R \end{pmatrix}$$

で与えられていれば、その行列式は

$$\det P = \det L \cdot \det(R - NL^{-1}M) \tag{14}$$

で与えられる。また、対称行列Pが正定値であるためにはその主小行列式のすべてが正となることが必要かつ充分な条件(Silvester)である。(13)において最初のn個の主小行列式はCに由来するもので仮定によってこれは正となっている。したがって(13)は残りのm個の主小行列式が正となる条件と同値である。特に$m=1$のときは(14)によって

$$\rho - {}^T(Bb+\tfrac{1}{2}c)C^{-1}(Bb+\tfrac{1}{2}c) > 0 \tag{13*}$$

が(2b)の絶対安定性のための充分条件となる。

更に、E_n, E_mをそれぞれ、n, m次元の単位行列とすれば$P>0$なることから

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\rho + {}^T\rho) & -{}^Td \\ -d & C \end{pmatrix}$$

も又正定値でなくてはならない。したがって

$$R = \frac{1}{2}(\rho + {}^T\rho) > 0$$

でなくてはならない。特に，Rは正則である。さて，

$$\dot{V} = -{}^TyCy + 2{}^Tf{}^Tdy - {}^TfRf$$
$$= -{}^Ty(C - dR^{-1}{}^Td)y - {}^T(f + R^{-1}dy)R(f + R^{-1}{}^Tdy).$$

したがって

(15) $$R > 0, \quad C - dR^{-1}{}^Td > 0$$

であれば$\dot{V}$は負定値となる，これはいわゆる Yakubovič の結果に対応するものである。同様に，

$$\dot{V} = -{}^T(y + C^{-1}df)C(y + C^{-1}df) + {}^Tf{}^TdC^{-1}df - {}^TfRf$$
$$= -{}^T(y + C^{-1}df)C(y + C^{-1}df) - {}^Tf(R - {}^TdC^{-1}d)f.$$

したがって，$\dot{V}$が負定値となるための条件として

(16) $$R - {}^TdC^{-1}d > 0$$

が得られる。

$$Q = C - dR^{-1}{}^Td$$

とおけば(15)は$Q > 0$であることを示している。$R > 0$より$R^{-1} > 0$が得られるから，$C = Q + dR^{-1}{}^Td$によって，逆に$Q > 0$より$C > 0$が得られる。

上の条件はいずれも(13)（あるいは(15)，(16)）をみたす$C > 0$が存在するか否かということであるが，上に述べたことを用い

て、これを$Q>0$が存在するか否かという問題に変換することが出来る。すなわち、B, M, Nを

$$^TAB+BA=-C,\quad {}^TAM+MA=-Q,\quad {}^TAN+NA=-dR^{-1T}d$$

をみたす対称行列とする。これらは定理1によって存在しかつ、$B>0$, $M>0$であることがわかる。$C=Q+dR^{-1T}d$によって直ちに$B=M+N$となる。一方$d=Bd+\frac{1}{2}c$だから

$$d=Mb+Nb+\frac{1}{2}c。$$

したがって、問題はこれをみたすdが存在するように、$Q>0$をえらべるか否かという問題になる。これはいわゆるLurieのresolving equationと呼ばれているものゝ一般的な表現である。こゝで、もっとLurieのresolving equationと呼ばれているものに形を合わせようとすれば次のようにすればよい。$R>0$だから、ある正則な正方行列Sがあって$R={}^TSS$が成り立っている。$d=uS$とおけば上式から

$$uS=Mb+Nb+\frac{1}{2}c$$

が得られる。

条件(13), (15), (16)はいずれも$\dot{V}$が負定値となるための必要かつ充分な条件である。したがって、これらは同値でなくてはならない

なお、$m=1$の場合には、特性函数の族に関する条件(ii)の(c)はみたされなくてもよいことがLaSalleによって示されている。

このときは(12)で定められたVは定理2における条件(2°)をみたしていない。しかしながら、この条件は条件(3°)と共に(10)の解が有界であることを証明するためにだけ必要とされているので、何らかの方法によって解の有界性が証明されればなくともよい条件である。

さて、解が有界であることは次のようにして証明される。まず、LaSalleによって、条件(13)すなわち(13*)から

$$(17) \qquad \rho + {}^{T}cA^{-1}b > 0$$

であることが示されている。(注1) このことを認める。次に、

$$V(y, \sigma) \geqq {}^{T}yBy$$

かつ、$\|y\| \to \infty$ ならば ${}^{T}yBy \to \infty$ であるから、条件(13*)のもとで$\dot{V}$が負定値であることとあわせて、(10)の解$(y(t), \sigma(t))$は$\sigma(t)$が存在する限り、初期値のみに依存したある定数によってそのy座標は押えられていることがわかる。もし解がすべてのtに対して存在するものとすれば、函数$V(y(t), \sigma(t))$は単調減少だから

$$\lim_{t\to\infty} V(y(t), \sigma(t)) = l$$

が存在する。今、$(y(t), \sigma(t))$の極限集合をΩとすれば明らかに、Ω上で$V(y, \sigma) \equiv l$でなくてはならない。またΩは不変集合だから、このことゝ合わせて、Ω上では$\dot{V} = 0$である。一方$\dot{V}$は負定値だからΩが空集合でないとすれば$\Omega = \{(0, 0)\}$で

なくてはならない。このことから $(y(t), \sigma(t)) \longrightarrow (0, 0)$ であることがわかる。したがって、Ωが空集合の場合を考えればよい。このときは、明らかに $\lim_{t\to\infty}|\sigma(t)|=\infty$ でなくてはならない。また、ある $t<\infty$ を越えて解が延長出来ないとすれば、

$\lim_{t\to\tau-0}|\sigma(t)|=\infty$ でなくてはならない。したがって、解が有界でない、あるいは、すべての t に対して存在しない場合にはいずれも、ある $\tau\leqq\infty$ に対して $\lim_{t\to\tau}|\sigma(t)|=\infty$ となっている。ゆえに、これが成り立たないことを証明すれば充分である。今 $\lim_{t\to\tau}|\sigma(t)|=\infty$ であると仮定する。このときは、ある $T<\tau$ があって $T\leqq t<\tau$ では $\sigma(t)$ は定符号をもっていると仮定してよい。

(10)によって

$$\dot{\sigma} - {}^T cA^{-1}\dot{y} = -(\rho + {}^T cA^{-1}b)f(\sigma) .$$

ゆえに、(17)および、$\sigma f(\sigma)\geqq 0$ であることによって

$$\operatorname{sign}\sigma\cdot(\dot{\sigma} - {}^T cA^{-1}\dot{y}) \geqq 0$$

すなわち、

$$\operatorname{sign}\sigma\cdot\dot{\sigma} \leqq \operatorname{sign}\sigma\cdot {}^T cA^{-1}\dot{y}$$

でなくてはならない。$T\leqq t<\tau$ において積分すれば、

$$|\sigma(t)| - |\sigma(T)| \leqq \operatorname{sign}\sigma\cdot {}^T cA^{-1}(y(t) - y(T))$$

であることがわかる。すでに述べたように、$y(t)$ は一様に有界だからこれは矛盾である。すなわち、$\sigma(t)$ は有界。

state matrix A を安定とし、特性函数の族を $\mathfrak{A}((0,\infty))$ とし

て直接制御系(2a)を考える。この場合には間接制御系の場合に比してLiapunovの直接法を用いる上で困難さがある。(2a)は一応

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma), \quad \dot{\sigma} = {}^{T}cAx + {}^{T}cbf(\sigma)$$

と書ける。そこで(12)の形のLiapunov函数$V(x,\sigma)$を考えると

(18) $$\dot{V} = {}^{T}(2Bx + cf(\sigma))(Ax + bf(\sigma))$$

となって、これは(x, f)に関して定値二次型式とはなり得ない。

(2a)は方程式

(19) $$\dot{x} = Ax + bf({}^{T}cx)$$

と同値である。したがって、(2a)が絶対安定であるためには任意な$f \in \mathfrak{A}((0,\infty))$に対して(19)が$x=0$のみを危点とすることが必要である。さて、すでに述べたように、Hを任意な正定値対称(m,m)行列とするとき、$f(\sigma) = H\sigma$は$\mathfrak{A}((0,\infty))$に属しているから、このような$f(\sigma)$に対しても$x=0$が(19)の唯一つの危点でなくてはならない。すなわち、

(20) $$\det(A + bH{}^{T}c) \neq 0$$

がすべての$H>0$に対して成り立たねばならない。しかしながら、これは任意な$f \in \mathfrak{A}((0,\infty))$に対して(19)が唯一つの危点として$x=0$を持つための充分条件でもある。それは次のようにして証明される。

今、ある $f \in \mathfrak{N}((0,\infty))$ とある $x \neq 0$ に対して

$$Ax + bf({}^T c x) = 0$$

となったものと仮定する。$\sigma = {}^T c x$ とおいて、もし $\sigma = 0$ ならば $f(\sigma) = 0$ だから $Ax = 0$ が成り立たねばならない。これは A が安定、したがって、正則であることに反する。ゆえに $\sigma \neq 0$ となる。このとき、適当な $H > 0$ をえらんで

$$f(\sigma) = H\sigma$$

となることを証明できれば

$$Ax + bf({}^T c x) = (A + bH{}^T c)x = 0$$

となって、(20) から $x = 0$ でなくてはならないことがわかる。

さて、

$${}^T\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_m), \quad {}^T f(\sigma) = (f_1, \cdots, f_m), \quad {}^T\sigma f(\sigma) = s$$

とおくと仮定から、$s > 0$ である。こゝで、適当な対称なユニタリ変換をほどこしたと考えて、$\sigma \neq 0$ から $\sigma_m \neq 0$ と仮定してよい。今、δ をある正の数として、対称行列

$$H = \begin{pmatrix} \delta & & 0 & h_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \delta & h_{m-1} \\ h_1 & \cdots & h_{m-1} & h_m \end{pmatrix}$$

を考えると、これが正定値であるためには、$\det H > 0$ であることが必要かつ充分な条件である。今、

$$f(\sigma) = H\sigma$$

を $h_1, \cdots, h_m$ に関する連立一次方程式と考える。

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \sigma_1 & \cdots & \sigma_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば、この連立方程式は

$$(\sigma_m E + Z)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - \sigma_1\delta \\ \vdots \\ f_{m-1} - \sigma_{m-1}\delta \\ f_m \end{pmatrix}$$

で与えられる。

$$(\sigma_m E + Z)^{-1} = \frac{1}{\sigma_m^2}(\sigma_m E - Z)$$

だから、これを解いて、

$$h_i = \frac{1}{\sigma_m}(f_i - \delta\sigma_i) \quad (i = 1, \cdots, m-1)$$

$$h_m = \frac{1}{\sigma_m^2}(2\sigma_m f_m - s + \delta\sum_{i=1}^{m-1}\sigma_i^2)$$

が得られる。一方、

$$\det H = \delta^{m-2}(\delta h_m - \sum_{i=1}^{m-1} h_i^2)$$

だから、これに代入して、

$$\det H = \frac{\delta^{m-2}}{\sigma_m^2}(\delta s - \sum_{i=1}^{m-1} f_i^2).$$

したがって、$s > 0$ に注意して、δ を

$$\delta > \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{m-1} f_i^2$$

をみたすようにえらべば $H > 0$ であることがわかる。

特に、$m = 1$ の場合には条件(20)は条件

(20*) $\qquad {}^T c A^{-1} b \geqq 0$

と同値になる。なぜならば、A は正則だから、

$$A + bH^Tc = (E + bH^TcA^{-1})A。$$

さらに、Hはスカラーだから、このとき $E+Hb^{T}cA^{-1}$ がすべての $H>0$ に対して正則であることを示せばよい。さて、

$$\det(\lambda E+Hb^{T}cA^{-1})$$

を考えるとこれは行列 $Hb^{T}cA^{-1}$ の特性多項式となっている。一般に、ベクトル p, q に対して行列 $P=p^{T}q$ を考えるとこれは

$$P=(p_i q_j)$$

であるから、この行列の階数は高々1である。したがって、

$$\det(\lambda E-P)=0$$

の根は高々一つをのぞいて零となる。一方、この根の和は $\mathrm{trace}\,P={}^{T}qp$ で表わされるから、残った根は ${}^{T}qp$ に等しい。したがって、

$$\det(\lambda E-P)=\lambda^{n-1}(\lambda-{}^{T}qp)。$$

したがって、

$$\det(\lambda E+Hb^{T}cA^{-1})=\lambda^{n-1}(\lambda+H^{T}cA^{-1}b)。$$

これは恒等式だから、$\lambda=1$ とおいて

$$\det(E+Hb^{T}cA^{-1})=1+H^{T}cA^{-1}b$$

が得られる。仮定から、これは任意の $H>0$ に対して零ではないから、(20*)が成り立たなくてはならない。

そこで、(18)にもどって考える。これは、すでに述べたように、(x, f) したがって、(x, σ) に関して負定値ではない。しかし、考えている方程式は(19)であって、(19)が絶対安定

であることを示せばよいのであるから、$\sigma = {}^T c x$ とおいて (18) が x に関して負定値となればよい。そのための条件を見出す方法を考える。

(I)　まず、間接制御の場合と同様に考えて、$\dot{V}$ に対して平方を完成する。すなわち、

$$\dot{V} = -{}^T x C x + 2\,{}^T f({}^T b B + \tfrac{1}{2}\,{}^T c A)x + {}^T f\,{}^T c b f$$

$$= -{}^T(x + C^{-1} d f)\,C\,(x + C^{-1} d f) - {}^T f R f;$$

$$d = Bb + \tfrac{1}{2}\,{}^T A c, \quad R = -\tfrac{1}{2}({}^T c b + {}^T b c) - {}^T d C^{-1} d.$$

ここで、もし $R > 0$ ならば、$\dot{V}$ は (x, f) に関して負定値となるから、これは有り得ない。したがって、可能な条件は $R \geqq 0$ すなわち、R が負の特性根をもたないことである。この条件のもとでは、$\dot{V} = 0$ となり得るのは

(21)　　$x + C^{-1} d f = 0, \quad {}^T f R f = 0$

とき、かつ、このときに限る。一方、(18) から、任意な f に対して

$$x = -A^{-1} b f$$

とおけば、この (x, f) に対して $\dot{V} = 0$ となる。したがって、このとき (21) が成り立たなくてはならない。f は任意だから、$R = 0$ でなくてはならない。したがって、可能な条件は

(22)　　$R = 0.$

である。同時に、任意な f に対して、(21) から、$-x = A^{-1} b f$ は

$$x + C^{-1}df = 0$$

をみたさなくてはならない。すなわち、

$$C^{-1}d - A^{-1}b = 0$$

が得られて、条件(21)は

$$Ax + bf = 0$$

と同値になる。すでに述べたように、条件(20)のもとで $Ax + bf({}^{T}cx) = 0$ をみたすものは $x = 0$ に限るから、$\dot{V}$ は x に関して負定値となる。したがって、

$\boxed{\text{定理4}}$. (2a) において、A を安定、特性函数の族を $\mathfrak{A}((0,\infty))$ としたとき、これが絶対安定であるための充分条件は、任意の $H > 0$ に対して条件(20)が成り立ち、かつ、条件(22)をみたす $c > 0$ が存在することである。

なお、明らかに

$$2Bx + cf = 0$$

をみたす (x, f) に対しても $\dot{V} = 0$ となるが、上と同様に

$$C^{-1}d = A^{-1}b = \frac{1}{2}B^{-1}c$$

が得られる。すなわち、(x, σ) の張る $(n+m)$ 次元空間において、

$$x + C^{-1}df(\sigma) = 0,\ Ax + bf(\sigma) = 0,\ 2Bx + cf(\sigma) = 0$$

をみたす (x, σ) の張る部分空間は条件(20)および(22)のもとで任意な函数 f に対して一致している。これを M で表わすこ

とにする。

LaSalle によって次の定理が知られている。

$\boxed{\text{定理5}}$. 定理2における条件(3')は次の条件でおきかえることが出来る。すなわち、

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot F(x)\leqq 0$$

かつ、領域$V=0$にとどまる解は$x\equiv 0$しかない。

なお、明らかなように、ある解の族を考えて、この族の中で上の領域にとどまるものは高々$x\equiv 0$のみであるとすれば、この解の族に関して$x=0$は大域的漸近安定である。

さて、方程式として、

$$\dot{x}=Ax+bf(\sigma),\quad \dot{\sigma}={}^{T}cAx+{}^{T}cbf(\sigma)$$

を考え、解の族として初期時間において$\sigma={}^{T}cx$となるものに限るものとする。このとき、(12)の形で与えられたLiapunov函数$V(x,\sigma)$を考えると、条件(22)のもとで$\dot{V}\leqq 0$となり、かつ、$\dot{V}=0$なる領域は上に述べたMであることがわかる。非線性函数の族を$\mathfrak{a}((0,\infty))$としているから、Vが定理2の条件(1')(2')をみたしている。さて、解を上に述べた族に限って考えれば、条件(20)のもとで、Mにとどまる解は$x=0$, $\sigma=0$のみである。したがって、定理5によって定理4の結論が得られる。

(II) 次に、いわゆるS-Methodと呼ばれているものに触れた

い。Liapunov 函数としては、前と同様に、(12) で与えられた $V(x,\sigma)$ を考える。すでに述べたように、$\dot{V}$ は (x,f) の二次型式としては負定値ではない。そこで、特性函数の族に対する制限から、${}^T\sigma f(\sigma) \geqq 0$ すなわち、$\sigma = {}^T c x$ とすれば ${}^T({}^T c x) f(\sigma) \geqq 0$ であることに注目して、

(23) $\qquad \dot{V} + \alpha\, {}^T x c f, \quad (\alpha > 0:$ スカラー$)$

が (x, f) の二次型式として負定値となるための条件を見出そうという方法である。このときは、上述のように、

$${}^T x c f({}^T c x) \geqq 0$$

であるから、x の函数として、$\dot{V}$ が負定値となっている。(23) が負定値二次型式となるための条件は間接制御の場合の条件 (13) 等に対応して見出すことが出来る。

特性函数の族を $\mathfrak{A}((0,k])$ $(0 < k < \infty)$ に制限した場合について考える。今、その特性根が $(0, k]$ に属する対称 (m, m) 行列 H を簡単に $H \in (0, k]$ で表わすことにすれば、明らかに、$f(\sigma) = H\sigma$ で定められた特性函数は $H \in (0,k]$ ならば $\mathfrak{A}((0,k])$ に属している。したがって、このような特性函数のみ考えれば、この場合、条件 (20) は $H \in (0,k]$ に対してのみ成り立てば充分である。更に、このときはあるユニタリ行列 P によって

$$H^* = {}^T P H P = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_m), \quad 0 < h_i \leqq h$$

であるから

$$ {}^T\!\left(\sigma - \frac{1}{k} f(\sigma)\right) f(\sigma) = {}^T\sigma\left(E - \frac{1}{k}H\right)H\sigma $$
$$ = {}^T\sigma P\left(E - \frac{1}{k}H^*\right)H^* \, {}^TP\sigma \geqq 0 $$

であることが、

$$ \left(E - \frac{1}{k}H^*\right)H^* = \mathrm{diag}\left(\left(1-\frac{h_1}{k}\right)h_1, \cdots, \left(1-\frac{h_m}{k}\right)h_m\right) \geqq 0 $$

によってわかる。したがって、S-Methodにおいて(23)のかわりに

$$ (24) \qquad \dot{V} + \alpha^T\!\left({}^Tcx - \frac{1}{k} f(\sigma)\right) f(\sigma), \qquad \alpha > 0 $$

が(x, σ)に関して負定値となる条件を求めることによって、(2a)の絶対安定性のための条件をゆるめることが出来る。すでに述べたように(p21)任意な$f \in \mathfrak{A}((0,\infty))$に対して、ある固定した$\sigma$に対してある$H>0$が存在して$f(\sigma) = H\sigma$が成り立っている。この$H$が$(0,k]$に属することがわかれば、条件(20)および(24)を負定値にするための条件は個々の(x,σ)において成り立てばよいのであるから、条件(20)が$H \in (0,k]$に対して成り立つことが充分であることがわかる。しかしながら、$f \in \mathfrak{A}((0,k])$ならば、任意な$\sigma$において、$f(\sigma) = H\sigma$をみたす$H \in (0,k]$が存在するか否かは一般には不明である。$m=1, 2$の場合にはこのことは証明できて、特に$m=1$のときは、条件$(20^*)$は条件

$$ {}^TcA^{-1}b \geqq -\frac{1}{k} $$

にゆるめることが出来る。

なお、特性函数の族を$\mathfrak{A}([k_1, k_2])$ $(0<k_1<k_2<\infty)$とすれば、$k>k_2^2/k_1$に対して

$$(25)\qquad {}^T\left(\sigma-\frac{1}{k}f(\sigma)\right)f(\sigma) \geqq k_3\|\sigma\|^2,\quad k_3=\frac{k_1k-k_2^2}{k},$$

が成り立つことは容易に証明される。

さて、(19)に対して、全安定に関する一般的なLiapunovの直接法を用いて考えてみる。(注1) このとき、(19)におけるfを摂動項と考えて条件

$$\|f\| \leqq k\|\sigma\|$$

を仮定してLiapunov函数として

$$V = {}^Tx B x$$

を考える。ここで、Bはある$C>0$に対して定理1で定められた行列である（Aは安定とする）。このとき、

$$\dot V = -{}^Tx C x + 2\,{}^Tx B b f({}^Tc x)$$

を得る。したがって、一般的に求め得る条件は、Cの最小の特性根をαとしたとき

$$\alpha > 2k\|Bb\|\cdot\|c\|$$

である。例えば、$m=n=1$のときは$B=-\dfrac{\alpha}{2A}$であるから、

$$\alpha > 2k\left|\frac{\alpha}{2A}b\right|\cdot|c|$$

すなわち、

$$|A| > k|bc|$$

であるから、$k\to\infty$の場合には$bc=0$でなくてはならない。

一方、条件(22)は

$$bc + \left(-\frac{\alpha}{2A}b + \frac{1}{2}Ac\right)^2\frac{1}{\alpha} = 0.$$

すなわち、$\left(\alpha + \frac{A^2}{b}c\right)^2 = 0$ となって、求める条件は $bc \leqq 0$ となる。

しかしながら、state system が一般的な非線型性をもつ場合には、特性函数の族の性質によって与えられた条件を効果的に利用できずこの一般的な方法が用いられている。

§4. Popov の方法。 state system が線型函数微分方程式で与えられている場合には、常微分方程式の場合の二次型式に対応するような explicit な形で与えられた Liapunov 函数の存在が知られていない。したがって、この場合には Liapunov の方法はかなり制約されたものになる。しかしながら、次にのべる Popov の方法はそのまゝ線型函数微分方程式の場合に拡張することが出来る。こゝでは、Popov の方法を函数微分方程式に対して説明しよう。

まず、$r>0$ を定数として、区間 $[-r, 0]$ から Euclid 空間 R^n への連続函数全体を $\mathcal{C}$ で表わし、そこにおけるノルムを $\varphi \in \mathcal{C}$ に対して

$$\|\varphi\|_r = \{\|\varphi(\theta)\| : \theta \in [-r, 0]\}$$

で与える。R^n を値域とする任意な連続函数 $x(u)$ に対して x_t に

よって、$x_t(\vartheta)=x(t+\vartheta)$ となる $\mathcal{C}$ の元を表わすことにする。$F(\varphi)$ を $\mathcal{C}$ から R^p への連続な線型函数とすれば、Stieltjes 積分

$$F(\varphi)=\int_{-r}^{0}[dv_F(\vartheta)]\varphi(\vartheta)$$

をみたす $[-r,0]$ 上の (p,n) 行列函数 $v_F(\vartheta)$ で各要素が有界変動であるものが存在する。(Riesz-Nagy)

x, σ を n, m ベクトル、b を (n,m) 行列として、さらに、$F(\varphi)$, $G(\varphi)$ を $\mathcal{C}$ から R^n, R^m への連続な線型作用素として、直接制御系

(26) $\dot{x}(t)=F(x_t)+bf(\sigma(t))$, $\sigma(t)=G(x_t)$

を考える。(注α) こゝで、$\dot{x}(t)$ は $x(t)$ の右側微係数を表わし、特性函数 f の族としては $\mathfrak{A}([k_1,k_2])$, $0<k_1<k_2<\infty$ を考える。

今、$\varphi\in\mathcal{C}$ に対して、$x(t;\varphi)$ で $t=0$ のとき φ を通る (26) の解を表わし、$y(t;\varphi)$ で同じ初期値をもつ

(27) $\dot{y}(t)=F(y_t)$

の解を表わせば、

(28) $x(t;\varphi)=y(t;\varphi)+\int_0^t X(t-\tau)bf(\sigma(\tau))d\tau$

が成り立つことが知られている (Hale)。こゝで $X(t)$ は (n,n) 行列函数で

$$X(0)=E,\quad X(\vartheta)=0\quad(\vartheta\in[-r,0))$$

及び、(27) すなわち

$$\dot{X}(t)=\int_{-r}^{0}[dv_F(\vartheta)]X(t+\vartheta)$$

をみたしている。したがって、

$$\sigma(t)=G(y_t(\varphi))+\int_0^t G(X_{t-\tau}b)f(\sigma(\tau))d\tau$$

が得られる。

また、仮定

(C_1)　$F(\varphi)$ の特性根、すなわち、

$$\det\left[\int_{-r}^{0}\{d\nu_F(\vartheta)\}e^{\lambda\vartheta}-\lambda E\right]=0$$

の根がすべて負の実数をもつ

のもとで、(27) の解 $y(t;\varphi)$、$X(t)$ はある定数 $M>0$、$\alpha>0$ に対して、条件

(29)　$\|y(t;\varphi)\|\leq Me^{-\alpha t}\|\varphi\|_r$,　$\|X(t)\|\leq Me^{-\alpha t}$

が成り立つことが知られている。したがって、条件 (C_1) のもとで、$\sigma(t)\longrightarrow 0\ (t\rightarrow\infty)$ であることがわかれば、(28) によって、$x(t;\varphi)\longrightarrow 0\ (t\rightarrow\infty)$ であることがわかる。また、定数 K_1, K_2 が存在して、$\|\sigma(t)\|\leqq\sigma_0$ ならば、$\|x(t;\varphi)\|\leq K_1\|\varphi\|_r+K_2\sigma_0$ であることもわかる。ゆえに、(26) の絶対安定性を証明するためには、$\sigma(t)\longrightarrow 0\ (t\rightarrow\infty)$ かつ、$\|\sigma(t)\|$ は有界でその上界として $\|\varphi\|_r$ と共に零になるものがえらべることを示せば充分である。したがって、このことが成り立つための条件を見出そう。そのまえに、いくつかの注意をする。

まず、$F(\varphi)$ と $G(\varphi)$ の線型性と特性函数の族が $\mathfrak{A}([h_1,h_2])$ であるということによって、

$$\| F(\varphi) + bf(G(\varphi)) \| \leqq L\|\varphi\|_r$$

がある定数Lに対して成り立っている。したがって、$(0, \varphi)$を通る$(\varphi \in \mathcal{E})$ (26)の解$x(t;\varphi)$は$[0, \infty)$において存在して

$$\| x(t;\varphi) \| \leqq e^{Lt} \|\varphi\|_r$$

をみたし、かつ、そこで連続的微分可能である。今、

$$\mathcal{E}^* = \{ x_r(\varphi) \ ; \ \varphi \in \mathcal{E} \}$$

を考えると、$\mathcal{E}^*$の元は$[-r, 0]$において連続的微分可能である。明らかに、$t=r$のとき、$\mathcal{E}^*$の元を通る解の族に関して、解$x=0$の安定性がわかれば、$t=0$のとき$\mathcal{E}$の元を通る解全体に関する$x=0$の安定性が示される。(26)が自励系であることに注意して、φは$[-r, 0]$において連続的微分可能であると仮定してもよい。あるいはもっと一般に

(C_2) φは$[-r, 0]$において Lipschitz の条件をみたしている

と仮定しておいてもかまわない。したがって$x(t;\varphi)$および$y(t;\varphi)$は$[-r, \infty)$で定義された函数として$[-r, \infty)$の任意な有界閉区間において Lipschitz の条件をみたしている。したがって$\sigma(t) = G(x_t(\varphi))$ および$G(y_t(\varphi))$は$[0, \infty)$において同様に Lipschitz の条件をみたしている。特に$x(t;\varphi)$, $y(t;\varphi)$は$[0, \infty)$において連続的微分可能であるから$\sigma(t)$, $G(y_t(\varphi))$も$[r, \infty)$において連続的微分可能であることがわかる。

一方 $X(t)$ は $(-r, \infty)$ における函数として $[0, \infty)$ では任意な有界閉区間において Lipschitz の条件をみたしており、したがって $G(X_t b)$ は (r, ∞) においては同様に Lipschitz の条件をみたしている。さらに $X(t)$ は (r, ∞) では連続的微分可能であるから $G(X_t b)$ は $(2r, \infty)$ で連続的微分可能となっている。しかしながら、区間 $(-r, 0)$ においては $X(t)$ は恒等的に零となっているが $t=0$ においては不連続となっていて $[0, r]$ においては連続性すら疑わしい。

$t \in [0, r]$ に対して

$$G(X_t b) = \int_{-t}^{0} [dv_G(\vartheta)] X(t+\vartheta) b$$

であるから、$G(X_t b)$ は有界変動で $v_G(-t)$ が連続、不連続となる点では同様に連続あるいは不連続となっている。

また

$$\frac{1}{\delta}\{G(X_{t+\delta} b) - G(X_t b)\}$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_{-t-\delta}^{-t} [dv_G(\vartheta)] X(t+\delta+\vartheta) b$$

$$+ \int_{-t}^{0} [dv_G(\vartheta)] \frac{1}{\delta}\{X(t+\delta+\vartheta) - X(t+\vartheta)\} b$$

が成り立っているから、

$$(30) \qquad \overline{\lim_{\delta\to -0}} \left\| \frac{1}{\delta}\{V_G(\vartheta+\delta)-V_G(\vartheta-0)\}\right\|$$

が有界な各点 $t=-\vartheta$ においては、

$$\overline{\lim_{\delta\to +0}} \left\| \frac{1}{\delta}\{G(X_{t+\delta}b)-G(X_{t+0}b)\}\right\|$$

もまた有界であることがわかる。そこで、仮定

(C_3)　$[-r,0]$ における $V_G(\vartheta)$ の不連続点は高々有限個ですべての $\vartheta\in[-r,0]$ に対して (30) で与えられた極限値は一様に有界である(注5)

のもとで、任意な区分連続な函数 $\sigma(t)$ に対して

$$\int_0^t G(X_{t-\tau}b)f(\sigma(\tau))d\tau$$

は絶対連続であることがわかる。もしも、$\sigma(t)$ が区分的に絶対連続ならば、条件 (C_2) は条件

(C_4)　特性函数の族を Lipschitz 条件をみたすものに制限する

によっておきかえてもよいことは明らかである。

仮定 (C_1) のもとで、(29) が成り立っているから、G の線型性によって、ある定数 M_1^* に対し、すべての $t\geq 0$ で

$$\|G(y_t(\varphi))\|\leq M^*e^{-\alpha t}\|\varphi\|_r,\quad \|G(X_tb)\|\leq M^*e^{-\alpha t}。$$

また、ほとんどすべての $t\geq 0$ で

$$\|\dot{G}(y_t(\varphi))\| \leqq M^* e^{-\alpha t}\|\varphi\|_r, \quad \|\dot{G}(X_t b)\| \leqq M^* e^{-\alpha t}$$

($\dot{G}$はtの函数と考えての右側微係数)が成り立っている。

そこで、φを固定して

$$z(t) = G(y_t(\varphi)), \quad k(t) = G(X_t b)$$

とおけば既に得られた如く

(31) $$\sigma(t) = z(t) + \int_0^t k(t-\tau) f(\sigma(\tau)) d\tau$$

が得られる。そして、条件(C_1), (C_2)および(C_3)あるいは(C_4)のもとで$[0, \infty)$において(31)をみたす$\sigma(t)$が$\sigma(t) \to 0$ $(t \to \infty)$および$\|\varphi\|_r$と共に零となるboundをもって有界となるための条件を求めよう。

まず、$\sigma(t)$は絶対連続だから$\dot{\sigma}(t)$は殆んどいたるところで存在して

$$\int_0^t f(\sigma(\tau)) \dot{\sigma}(\tau) d\tau = U(\sigma(t))$$

が成り立っている。任意にえらんだ$s > 0$に対して

$$f_s(t) = \begin{cases} f(\sigma(t)) & 0 \leqq t \leqq s \\ 0 & t > s,\ t < 0, \end{cases}$$

$$w_s(t) = \begin{cases} +\int_0^t k(t-\tau) f_s(\tau) d\tau & t \geqq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

とおくと明らかに、$w_s(t)$は絶対連続かつ$f_s, w_s \in L^1 \wedge L^2$である。また、$t \geqq s$に対しては

$$w_s(t) = +\int_0^s k(t-\tau) f_s(\tau) d\tau,$$

かつ、(r, ∞) では $k(t)$ は連続的微分可能であるから、

$$\dot{w}_s(t) = + \int_0^s \dot{k}(t-\tau) f_s(\tau) d\tau$$

が $t \geqq s+r$ において成り立っている。したがって $\dot{w}_s$ もまた $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ に属している。

ここで、$k > k_2^2/h$, および、q を定数として、

$$p(s) = \int_0^s {}^T\{\sigma(t) - z(t) - \frac{1}{k} f(\sigma(t)) + q(\dot{\sigma}(t) - \dot{z}(t))\} f(\sigma(t)) dt$$

を考えると、$t \in (0, s)$ では $w_s(t) = \sigma(t) - z(t)$ だから、

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} {}^T\{w_s(t) - \frac{1}{k} f_s(t) + q\dot{w}_s(t)\} f_s(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Re\, {}^T\{\tilde{w}_s(i\omega) - \frac{1}{k} \tilde{f}_s(i\omega) + q\tilde{\dot{w}}_s(i\omega)\} \overline{\tilde{f}}_s(i\omega) d\omega$$

を得る。ここで、$\tilde{w}_s, \cdots$ は $w_s, \cdots$ の Fourier 変換

$$\tilde{w}_s(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} w_s(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} w_s(t) dt$$

を表わしている、また $\overline{\tilde{f}}_s$ は $\tilde{f}_s$ の複素共役である。$w_s(t)$ は絶対連続かつ $w_s(0) = 0$ だから

$$\tilde{\dot{w}}_s(i\omega) = i\omega \tilde{w}_s(i\omega)$$

が成り立ち、また、$k \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ だから、

$$\tilde{w}_s(i\omega) = \tilde{k}(i\omega) \tilde{f}_s(i\omega)$$

が成り立つ（ここで、$t<0$ のとき $k=0$ とする）ことを用いて、

$$p(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Re\, [{}^T\tilde{f}_s \{(1 + i\omega q)\tilde{k}(i\omega) - \frac{1}{k} E\} \overline{\tilde{f}}_s(i\omega) d\omega$$

を得る。したがって、ここで、

(c_s)　ある定数 $q > 0$ に対して

$$Re\{{}^T\eta\{(1 + i\omega q)\tilde{k}(i\omega) - \frac{1}{k} E\}\bar{\eta}\} \leqq 0$$

がすべての m ベクトル η とすべての実数 ω に対して成立っている

と仮定すれば、$p(S) \leqq 0$ が得られる。(m, m) 行列

$$(1 + i\omega q)\tilde{k}(i\omega) - \frac{1}{k}E$$

の実数部分，虚数部分をそれぞれ P, Q とすれば、条件 (C_s) は条件

$$-\begin{pmatrix} {}^TP + P & {}^TQ - Q \\ Q - {}^TQ & {}^TP + P \end{pmatrix} \geqq 0$$

と同値である。さて、条件 (C_s) のもとで、$p(S) \leqq 0$、すなわち

$$(32) \qquad \int_0^S {}^T\{\sigma(t) - \frac{1}{k} f(\sigma(t)) + q\dot{\sigma}(t)\} f(\sigma(t))\,dt \leqq \int_0^S {}^T\{z(t) + q\dot{z}(t)\} f(\sigma(t))\,dt.$$

すでに述べた様に、

$$h_1 \|\sigma\|^2 \leqq U(\sigma) \leqq h_2 \|\sigma\|^2$$

かつ、(25) が成り立っているから、(32) によって、

$$h_3 \int_0^S \|\sigma(t)\|^2 dt + \frac{q h_1}{2} \|\sigma(S)\|^2 \leqq \frac{q h_2}{2} \|\sigma(0)\|^2 + \int_0^S {}^T\{z(t) + q\dot{z}(t)\} f(\sigma(t))\,dt。$$

したがって、

$$\left| \int_0^S {}^T\{z(t) + q\dot{z}(t)\} f(\sigma(t))\,dt \right| \leqq \frac{M^* k_2 (1+q)}{\alpha} \|\varphi\|_r \sup_{0 \leqq t \leqq S} \|\sigma(t)\|$$

であるから、

$$\frac{q h_1}{2} \|\sigma(S)\|^2 \leqq \frac{q h_2}{2} \|\sigma(0)\|^2 + \frac{M^* k_2 (1+q)}{\alpha} \|\varphi\|_r \sup_{0 \leqq t \leqq S} \|\sigma(t)\|$$

がすべての $S \geqq 0$ に対して成り立つことがわかる。$\sigma(0) = z(0)$ かつ、$\|z(0)\| \leqq M^* \|\varphi\|_r$ に注意すれば、このことから、

$$\|\sigma(t)\| \leqq \frac{h_2}{q h_1} \left[\frac{2(1+q)}{\alpha} + q \right] M^* \|\varphi\|_r = S(\|\varphi\|_r),\ t \geqq 0$$

を得る。したがって、$\|\sigma(t)\|$ は有界で、その bound は $\|\varphi\|_r$ と共に零となることがわかった。一方、

$$h_1\int_0^s \|\sigma(t)\|^2 dt \leq \frac{q h_2}{2}\|\sigma(0)\|^2 + \frac{M^* h_2(1+q)}{\lambda}\|\varphi\|_r \delta(\|\varphi\|_r)$$

だから、$\int_0^\infty \|\sigma(t)\|^2 dt < \infty$，したがって、

$$\int_0^\infty \|f(\sigma(t))\|^2 dt \leq h_2 \int_0^\infty \|\sigma(t)\|^2 dt < \infty$$

が成り立つ。そして、このことから、

$$\left\| \int_0^t k(t-\tau) f(\sigma(\tau)) d\tau \right\| \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$$

が導かれて、これと、$z(t) \longrightarrow 0 \ (t \longrightarrow \infty)$ をあわせて、

$$\sigma(t) \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

が得られる。すなわち、仮定 (C_1), (C_2), (C_3)（あるいは、(C_4)）のもとで、条件 (C_5) が (26) の絶対安定性のための充分条件となる。

Fourier 変換の知識を用いて、(31) をみたす $\sigma(t)$ の行動を調べて、(26) の絶対安定性のための条件を見出すこの方法が Popov の方法と呼ばれているもので、$\tilde{k}(i\omega)$ が (26) に対する transfer function と呼ばれているものである。(注6) こゝで、$\tilde{k}(i\omega)$ の explicit な表現を求めてみる。

$$\tilde{k}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}\left\{ \int_{-r}^0 (dv_q(\vartheta)) X(t+\vartheta) b \right\} dt$$

$$= \int_{-r}^0 [dv_q(\vartheta)] \left\{ \int_\vartheta^\infty e^{-i\omega t + i\omega\vartheta} X(t) b\, dt \right\}$$

$$= \int_{-r}^0 e^{i\omega\vartheta} [dv_q(\vartheta)] \cdot \int_0^\infty e^{-i\omega t} X(t) b\, dt.$$

したがって、

$$c(i\omega)=\int_{-r}^{0}e^{i\omega\vartheta}[d^{T}v_{G}(\vartheta)]$$

とおけば、

$$\tilde{k}(i\omega)={}^{T}c(i\omega)\tilde{X}(i\omega)b$$

が得られる。一方

$$\int_{0}^{\infty}e^{-i\omega t}\dot{X}(t)dt=\int_{0}^{\infty}e^{-i\omega t}\{\int_{-r}^{0}[dv_{F}(\vartheta)]X(t+\vartheta)\}dt,$$

かつ、$X(0)=E$ だから、

$$-E+i\omega\tilde{X}(i\omega)=\int_{-r}^{0}e^{i\omega\vartheta}[dv_{F}(\vartheta)]\cdot\tilde{X}(i\omega)。$$

ここで、

$$A(\lambda)=\int_{-r}^{0}e^{\lambda\vartheta}[dv_{F}(\vartheta)]-\lambda E$$

とおけば、

$$\tilde{X}(i\omega)=-A(i\omega)^{-1}$$

が得られる。ここで、仮定(C_1)によって $A(i\omega)$ はすべての実数 ω に対して正則であることに注意する。したがって、

$$\tilde{k}(i\omega)=-{}^{T}c(i\omega)A(i\omega)^{-1}b$$

が得られて、条件(C_5)は常微分方程式の場合における Popov の条件の一般化となっている(ただし、$m=1$ の場合には、k は $k>k_2^2/k_1$ ではなく、$k>k_2$ をみたせばよい)。

間接制御系

$$(32)\quad \begin{aligned}&\dot{x}(t)=F(x_t)+b\xi(t)\qquad \dot{\xi}(t)=f(\sigma(t))\\&\sigma(t)=G(x_t)-\rho\xi(t)\end{aligned}$$

の場合には、同様に

(34) $$\sigma(t) = z(t) + \int_0^t k(t-\tau)\xi(\tau)d\tau - \rho\xi(t)$$

が得られる。こゝで、すべての文字は、系(26)に対する場合と同一で、ρは(m, m)行列である。今度も、特性函数の族を$\mathfrak{N}([h_1, h_2])$ $(0<h_1<h_2<\infty)$として、条件(C_1), (C_2)のもとで考えることにする。このとき、

$$k_1(t) = -\int_t^\infty k(\tau)d\tau, \quad z_1(t) = z(t) + k_1(t)\xi(0), \quad \rho_1 = \rho + k_1(0)$$

とおけば、(34)より部分積分を行なって

(35) $$\sigma(t) = z_1(t) + \int_0^t k_1(t-\tau)f(\sigma(\tau))d\tau - \rho_1\xi(t)$$
$$\dot{\xi}(t) = f(\sigma(t))$$

が得られる。そして、問題は、$[0, \infty)$において(35)をみたす$(\sigma(t), \xi(t))$が有界で、そのboundは$(\|\varphi\|_r, \|\xi(0)\|)$と共に零となり、$t\to\infty$のとき、$(\sigma(t), \xi(t)) \to 0$となることを示すことにある。$(x(t), \xi(t))$は(33)の解として、$[0, \infty)$において存在して連続的微分可能であることが容易に示される。明らかに、$\sigma(t)$, $z_1(t)$, $k_1(t)$は$[0, \infty)$において、絶対連続かつ、$k_1(t)$は常に有界な微係数をもっている。しかも、すべての$t\geq 0$とある定数$M_1>0$に対して、

$$\|z_1(t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t}\{\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|\}, \quad \|k_1(t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t},$$

かつ、ほとんどいたるところで、

$$\|\dot{z}_1(t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t}\{\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|\}, \quad \|\dot{k}_1(t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t}$$

が成り立っている。

前と同様に、$s \geqq 0$ に対して、

$$f_s(t)=\begin{cases} f(\sigma(t)) & 0\leqq t\leqq s \\ 0 & t>s,\ t<0 \end{cases}$$

$$w_s(t)=\begin{cases} \int_0^t k_1(t-\tau)f_s(\tau)d\tau & t\geqq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

とおけば、明らかに、$f_s, w_s, \dot{w}_s \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ である。また、$w_s(t)$ は絶対連続、かつ、$w_s(0)=0$ であるから、

$$\tilde{\dot{w}}_s(i\omega)=i\omega\tilde{w}_s(i\omega),\quad \tilde{w}_s(i\omega)=\tilde{k}_1(i\omega)\tilde{f}_s(i\omega)$$

を得る。そこで、$h>k_2^2/k_1$ として

$$p(s)=\int_0^s {}^T\{w_s-\frac{1}{h}f_s+q(\dot{w}_s-\rho_1 f_s)\}f_s dt,$$

とすれば、

$$p(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re\{\bar{\tilde{f}}_s\{(1+i\omega q)\tilde{k}_1(i\omega)-\frac{1}{h}E-q\rho_1\}\tilde{f}_s(i\omega)d\omega$$

を得る。そこで、条件 (C_5) に対応して、条件

(C_6) ある $q>0$ と任意の m ベクトル η、及び、任意の実数 ω に対して

$$Re\{{}^T\bar{\eta}\{(1+i\omega q)\tilde{k}_1(i\omega)-\frac{1}{h}E-q\rho_1\}\eta\}\leqq 0$$

が成り立つ

と仮定しておくと、$p(s)\leqq 0$ すなわち、

$$\int_0^s {}^Tf(\sigma)\{\sigma-\frac{1}{h}f(\sigma)\}dt+\int_0^s {}^Tf(\sigma)\rho_1\xi dt+q\int_0^s {}^Tf(\sigma)\dot{\sigma}dt$$
$$\leqq\int_0^s {}^Tf(\sigma)(z_1+q\dot{z}_1)dt$$

が成り立っている。ここで、$0 \leq t \leq s$ においては、

$$\omega_\xi(t) = \sigma(t) + \mathcal{P}_1 \xi(t) - z_1(t)$$

であることを用いている。さて、$\mathcal{P}_1$が対称ならば

$$\int_0^s {}^T f(\sigma) \mathcal{P}_1 \xi \, dt = \int_0^s {}^T \dot{\xi} \mathcal{P}_1 \xi \, dt = \frac{1}{2} {}^T \xi(s) \mathcal{P}_1 \xi(s) - \frac{1}{2} {}^T \xi(0) \mathcal{P}_1 \xi(0)$$

が成り立っている。そこで、仮定

(C_7) $\mathcal{P}_1$は正定値対称行列

をおけば、ある正数μがあって

$${}^T \xi \mathcal{P}_1 \xi \geqq 2\mu \|\xi\|^2$$

が成り立ち、かつ、前と同様に(25)、及び、

$$\int_0^s {}^T f(\sigma) \dot{\sigma} \, dt = U(\sigma(s)) - U(\sigma(0)) \geqq \frac{k_1}{2} \|\sigma(s)\|^2 - \frac{k_2}{2} \|\sigma(0)\|^2,$$

$$\left| \int_0^s {}^T f(\sigma)(\dot{z}_1 + q z_1) \, dt \right| \leqq \frac{k_2 M_1 (1+q)}{\alpha} (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|) \sup_{0 \leq t \leq s} \|\sigma(t)\|$$

であることを用いると、

$$(36) \quad k_3 \int_0^s \|\sigma(t)\|^2 dt + \mu \|\xi(s)\|^2 + \frac{k_1 q}{2} \|\sigma(s)\|^2$$
$$\leqq \frac{1}{2} {}^T \xi(0) \mathcal{P}_1 \xi(0) + \frac{k_2 q}{2} \|\sigma(0)\|^2 + \frac{k_2 M_1 (1+q)}{\alpha} (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|) \sup_{0 \leq t \leq s} \|\sigma(t)\|$$

を得る。まず、この不等式の左辺の第三項が右辺によって、すべての$s \geqq 0$に対して押さえられていることから、

$$\|\sigma(t)\| \leqq S_1(\|\varphi\|_r, \|\xi(0)\|), \quad S_1(0,0) = 0$$

をみたすS_1が存在することがわかる。ここで、

$$\|\sigma(0)\| \leqq \|z_1(0)\| + \|\mathcal{P}_1\| \cdot \|\xi(0)\| \leqq M_1 \{\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|\} + \|\mathcal{P}_1\| \|\xi(0)\|$$

であることを用いる。したがって、不等式(36)の右辺はある$S_2(\|\varphi\|_r, \|\xi(0)\|)$で押さえられることが、$\sup_{0 \leq t \leq s} \|\sigma(t)\|$を$S_1$でおきか

えることによって直ちにわかる。かつ、$S_2(0,0)=0$ である。

したがって、$\mu\|\xi(t)\|$ はこの $S_2(\|\varphi\|_T, \|\xi(0)\|)$ で押えられ、同時に

$$(37)\qquad \int_0^\infty \|\sigma(t)\|^2 dt < \frac{1}{k_3} S_2(\|\varphi\|_T, \|\xi(0)\|)$$

が成り立っている。したがって、$\sigma(t)\to 0\ (t\to\infty)$ であることを証明することだけが残っている。これは次のように証明される。まず、(35) の第一式の両辺を微分すると $k_1(t)$ は常に微分可能で微係数が有界であることによって、

$$(38)\qquad \dot\sigma(t) = \dot z_1(t) + \int_0^t \dot k_1(t-\tau) f(\sigma(\tau))d\tau + k_1(0) f(\sigma(t)) - \rho_1 \dot\xi(t)。$$

したがって、$\dot\xi = f(\sigma)$ を代入して、殆んど明らかに

$$\|\dot\sigma(t)\| \leqq M_1(\|\varphi\|_T + \|\xi(0)\|) + \frac{M_1 k_2 S}{\alpha} + M_1 k_2 S + \|\rho_1\| k_2 S_1$$

すなわち、有界であることがわかる。このことと、(37) とをあわせて、直ちに、$\sigma(t)\to 0\ (t\to\infty)$ が証明される。したがって、

$$\int_0^t k_1(t-\tau) f(\sigma(\tau))d\tau \longrightarrow 0 \quad (t\to\infty).$$

ゆえに、$z_1(t)\longrightarrow 0\ (t\to\infty)$ に注意して、また、(C_7) によって、ρ_1 は正則であることを注意して、$\xi(t)\to 0\ (t\to\infty)$ が得られる。

条件 (C_6)、(C_7) について考える。まず、

$$\tilde k_1(i\omega) = \frac{1}{i\omega}\{\tilde k(i\omega) + k_1(0)\},\quad k_1(0) = -\tilde k(0).$$

ゆえに、$\rho_1 = \rho + k_1(0)$ であるから、条件 (C_6) は

$$Re\left[\eta\{(q + \frac{1}{i\omega})\tilde k(i\omega) - (\frac{1}{\kappa}E + q\rho - \frac{1}{i\omega}\tilde k(0))\}\bar\eta\right] \leqq 0$$

が成り立つことに等しく、さらに、$\tilde k(0)$ が対称行列ならば、この不等式は

$$(39)\qquad \mathrm{Re}\left(\eta\left\{\left(q+\frac{1}{i\omega}\right)\tilde{k}(i\omega)-\left(\frac{1}{k}E+q\rho\right)\right\}\bar{\eta}\right]\leqq 0$$

に同値である。又、条件(C_7)は

$$\rho+{}^{T}c(0)A(0)^{-1}b={}^{T}\rho+{}^{T}b\,{}^{T}A(0)^{-1}c(0))>0$$

でおきかえられる。特に、$m=1$のときは、これらは、それぞれ、

$$\left(q+\frac{1}{i\omega}\right)\tilde{k}(i\omega)-\left(\frac{1}{k}+q\rho\right)\leqq 0,$$

$$\rho>-{}^{T}c(0)A(0)^{-1}b$$

となる。

以上をまとめると、

$\boxed{\text{定理 6.}}$ 仮定(C_1)のもとで、制御系(26)の絶対安定性のための充分条件は(C_3)あるいは(C_4)と(C_5)が成り立つことであり、制御系(33)が絶対安定となるための充分条件は(C_6)および(C_7)が成り立つことである。

特に、$z_1(t)$が連続的二回微分可能で

$$\|\ddot{z}_1(t)\|\leqq M_1e^{-\alpha t}\{\|\varphi\|_r+\|\xi(0)\|\}$$

をみたしている場合に、特性函数の族を$\mathfrak{A}((0,\infty))$として考える（以下、前述において、$k=\infty$として考える）。

$$\int_0^s {}^{T}f(\sigma)(z_1+q\dot{z}_1)dt=\int_0^s {}^{T}\dot{\xi}(t)(z_1+q\dot{z}_1)dt$$
$$={}^{T}\xi(t)(z_1(t)+q\dot{z}_1(t))\Big|_0^s-\int_0^s {}^{T}\xi(t)(\dot{z}_1+q\ddot{z}_1)dt$$

を得る。したがって、(36)式に対応して、

$$\mu\|\xi(s)\|^2+\int_0^s {}^{T}f(\sigma)\sigma dt+q\int_0^s {}^{T}f(\sigma)\dot{\sigma}dt$$

$$\leqq \frac{1}{2}{}^{T}\xi(0)P_{0}\xi(0)+\left(\frac{1}{\alpha}+2\right)M_{1}(1+q)(\|\varphi\|_{r}+\|\xi(0)\|)\sup_{0\leqq t\leqq s}\|\xi(t)\|$$

が得られて、$q\geqq 0$ ならば、$\|\xi(t)\|$ は有界で、かつ、その bound は $\|\varphi\|_{r}+\|\xi(0)\|$ と共に零になることがわかる。

$$x(t;\varphi)=y(t;\varphi)+\int_{0}^{t}X(t-\tau)b\xi(\tau)d\tau$$

に代入して、$x(t)$ したがって、$\sigma(t)$ もこの性質をもつことがわかる。かつ、(33) および (38) から、これらの微係数もまたこの性質をもっている。このことと、

$$\int_{0}^{s}{}^{T}f(\sigma)\sigma dt$$

が有界であることを用いて、直ちに $\sigma(t)\longrightarrow 0\ (t\longrightarrow\infty)$ がわかる。同時に $f(\sigma(t))\longrightarrow 0(t\longrightarrow\infty)$ も成り立つから、これを用いて (35) から $\xi(t)\longrightarrow 0(t\longrightarrow\infty)$ が示される。すなわち、この場合には、条件 (C_6) において、$q\geqq 0$ であればよい。

§5. Liapunov の直接法と Popov の方法の比較。 常微分方程式の場合 (2) にもどって、Liapunov の直接法と Popov の方法との比較について述べてみたい。

そのとき、A は安定として特性函数の族は $\mathfrak{A}((0,\infty))$ とする。

それについて述べる前に、系 (2b) に対して Lurie - Postnikov の型の Liapunov 函数 (12) に対して、より一般的な Popov の型の Liapunov 函数、すなわち、(x,σ) に関する二次型式に β をスカラーとして $\beta\sqcup(\sigma)$ を加えた形で与えられたものについて

考えてみたい。これは直ちに適当に対祢行列B, Mを選んで

$$V(x,\sigma) = {}^T x B x + {}^T(\sigma - {}^T c A^{-1} x) M (\sigma - {}^T c A^{-1} x) + \beta \square(\sigma) + {}^T\sigma N x$$

の形で表わされる。まず、このVが定理2の条件をみたすためには $N=0$，$\beta \geqq 0$，$M \geqq 0$ かつ、$\det M = 0$ ならば $\beta > 0$, $\beta = 0$ ならば $M > 0$ であることを証明しよう。これらは、いわゆるε−方法と呼ばれる方法で証明される。まず、$\dot{V}$ を(26)によって求めて

$$x \to \varepsilon x, \quad \sigma \to \sigma, \quad f(\sigma) \to \varepsilon^2 f(\sigma)$$

（εは正の定数）とおくことによって

$$\dot{V} = \varepsilon\, {}^T\sigma N A x + O(\varepsilon^2)$$

が得られる。これが、すべての (σ, x) に対して定符号であるためには、${}^T\sigma N A x = 0$ でなくてはならない。Aは安定したがって正則だから、$N=0$ でなくてはならない。

$$x \to \varepsilon x, \quad \sigma \to \sigma, \quad f \to \varepsilon^3 \varphi$$

とすると、

$$V = {}^T\sigma M \sigma + O(\varepsilon)$$

となり、これが正定値でなくてはならないから、$M \geqq 0$.

$$x \to \varepsilon^2 x, \quad \sigma \to \varepsilon^2 \sigma, \quad f(\sigma) \to f(\sigma)$$

とすると、

$$V = \varepsilon^2 \beta \square(\sigma) + O(\varepsilon^4)$$

となって、$\beta \geqq 0$ が示される。更に、$x=0$ とおくと

$$V = {}^T\sigma M\sigma + \beta U(\sigma)$$

が正定値だから、$\beta=0$ ならば $M>0$ でなくてはならない。また、$\det M=0$ ならば、ある $\sigma\neq 0$ に対して $M\sigma=0$ となるから、このとき $V=\beta U(\sigma)>0$、したがって $\beta>0$ でなくてはならない。

これらの条件のもとで、

(40) $$\dot{V} = 2^T(Ax+bf)Bx - 2^T(\sigma-{}^TcA^{-1}x)M(\rho+cA^{-1}b)f$$
$$+\beta^T({}^Tcx-\rho f)f$$

が、$H>0$ に対して、$f(\sigma)=H\sigma$ とおいたとき (x,σ) の負定値二次型式となるための条件をもとめる。

ところで、任意の実行列(対称でなくてもよい) P が、$P+{}^TP>0$ をみたすための必要かつ充分な条件は、任意の複素ベクトル u に対して、

$$Re\{{}^Tu P\bar{u}\} > 0 \quad (\|u\|\neq 0)$$

となることである。今、η を任意な m ベクトル、

$$A(i\omega) = A - i\omega E$$

として、

$$x=-A(i\omega)^{-1}b\eta, \quad \sigma = H^{-1}\eta$$

に対して、二次型式 $-\dot{V}$ が正定値となる条件は上のことによって、

$$Q = Re\{-2^T(Ax+bf)B\bar{x} + 2^T(\sigma-{}^TcA^{-1}x)M(\rho+cA^{-1}b)\bar{f}$$

$$-\beta^{T}({}^{T}cx-\rho f)\bar{f}\,] > 0 \quad (\|\eta\| \neq 0)$$

となることである。明らかに、上の x に対して、

$$i\omega x = Ax + b\eta, \quad f(\sigma) = \eta$$

であるから、

$$Q = Re\,(-2i\omega\,{}^{T}xB\bar{x} + 2\,{}^{T}\eta^{T}(H^{-1} + {}^{T}cA^{-1}A(i\omega)^{-1}b)M(\rho + {}^{T}cA^{-1}b)\bar{\eta}$$
$$+\beta^{T}\eta^{T}({}^{T}cA(i\omega)^{-1}b + \rho)\bar{\eta}\,]$$

を得る。ここで B は対称行列だから、${}^{T}xB\bar{x}$ は実数だから、

$$Q = Re\,{}^{T}\eta\,[\,2^{T}(H^{-1} + {}^{T}cA^{-1}A(i\omega)^{-1}b)M(\rho + {}^{T}cA^{-1}b) + \beta^{T}({}^{T}cA(i\omega)^{-1}b + \rho)\,]\,\bar{\eta}。$$

$$i\omega A^{-1}A(i\omega)^{-1} = A(i\omega)^{-1} - A^{-1}$$

を用いて書きかえると必要条件として、

$$Q = Re\,{}^{T}\eta\,[\,{}^{T}\{{}^{T}cA(i\omega)^{-1}b\}\{2M(\rho + {}^{T}cA^{-1}b)\frac{1}{i\omega} + \beta E\}$$
$$+2^{T}(H^{-1} - \frac{1}{i\omega}{}^{T}cA^{-1}b)M(\rho + {}^{T}cA^{-1}b) + \beta\rho\,]\,\bar{\eta} > 0 \quad (\|\eta\| \neq 0)$$

を得る。特に、$M \neq 0$、$m=1$ のときは $\rho + {}^{T}cA^{-1}b > 0$ に注意して、$q = \beta/2M(\rho + {}^{T}cA^{-1}b)$ とおけば仮定より $q \geq 0$ となって条件(39)と一致する。$M=0$ のときも $Re\,\frac{1}{i\omega}A(i\omega)^{-1}$ は下に有界であることが示され(注7)るので充分小さい M をえらんでこのことが成り立っている。いずれにしても $m=1$ のとき条件(C_6)は必要条件であることがわかる。

(2a)の場合には、もしも、S-method によって絶対安定性が示されるならば(C_5)は必要条件であることを示そう。このとき、Liapunov 函数として

$$V(x,\sigma) = {}^{T}xBx + \beta \sqcup(\sigma), \quad \beta > 0$$

を考える。特性函数の族を$\mathfrak{A}((k_1, k_2])$，Aを安定として，$\kappa > k_2^2/k_1$に対して

$$S = \dot{V} + \gamma^{T}({}^{T}cx - \tfrac{1}{\kappa}f)f$$
$$= {}^{T}(Ax + bf)(2Bx + \beta cf) + \gamma^{T}({}^{T}cx - f\tfrac{1}{\kappa})f, \gamma \geqq 0$$

を負定値にすることを考える。全く前と同様に，

$$x = -A(i\omega)^{-1}b\eta, \quad \sigma = H^{-1}\eta, \; f(\sigma) = \eta$$

とおいて，Sが負定値になるための必要条件として，

$$Q = Re\{-{}^{T}(Ax + bf)(2B\bar{x} + \beta c\bar{f}) - \gamma^{T}({}^{T}cx - \tfrac{1}{\kappa}f)\bar{f}\}$$
$$= Re\, {}^{T}\bar{\eta}\{(\gamma + i\omega\beta)^{T}cA(i\omega)^{-1}b + \tfrac{1}{\kappa}\gamma E\}\eta > 0 \; (\|\eta\| \neq 0)$$

を得る。明らかに，$\gamma \neq 0$だから，$\beta/\gamma = q$として条件(C_5)を得る。

§6. Critical case.　これまではいずれもAを安定としてきた。すなわち，state systemそれ自体がすでに安定である。制御の目的から考えればAが安定でないとした場合の絶対安定性を見出すことが望ましい。(勿論§2で述べたことから明らかな様にAの安定性は特性函数の族のえらび方に依存する。)特性函数の族を$\mathfrak{A}((0, k])$とした場合に(2a)において，Aが正の実数をもつ特性根，および，単因子が一次である零根を二つもつことが許されないことはすでに述べた。そこで，

実部が零の特性根を二つもてば、それは純虚数あるいは

(40) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の形の Jordan cell をもたなくてはならない。(2a)を書きかえて

(41) $$\dot{x} = Ax + bf(\sigma), \quad \dot{y} = b_1 f(\sigma), \quad \dot{z} = y + b_2 f(\sigma)$$
$$\sigma = {}^T c x + {}^T c_1 y + {}^T c_2 z.$$

で表わされた系を考える。こゝで、x, σ は従来と同じく、y, z は l ベクトルとする。かつ、$l \leqq m$ とする。これが絶対安定であるためには、明らかに c_2 の階数は l でなくてはならない。今 Liapunov 函数として、

$$V(x, y, z, \sigma) = {}^T x B x + {}^T y B_1 y + \Phi(\sigma)$$

を考える。$B > 0$, $B_1 > 0$ とすればこれは、(x, y, σ) したがって、(x, y, z) に関して正定値である。

$$\dot{V} = -{}^T x C x + 2 {}^T f {}^T d x + 2 {}^T f {}^T d_1 y + {}^T f {}^T \rho f$$
$$d = Bb + \frac{1}{2} {}^T A c, \quad d_1 = B_1 b_1 + \frac{1}{2} c_2, \quad \rho = {}^T c b + {}^T c_1 b_1 + {}^T c_2 b_2.$$

これを負定値((x, y, z, σ) に関して)とすることは出来ない。しかし、もし B_1 を $d_1 = 0$ となるようにえらぶことが出来たら、(注8) かつ、C を

(42) $$\begin{pmatrix} C & -d \\ -{}^T d & -\frac{1}{2}(\rho + {}^T \rho) \end{pmatrix} > 0$$

となるようにえらべば、これは (x, f) したがって (x, σ) に関して負定値となる。このときは、常に $\dot{V} \leqq 0$ であり $x = 0, \sigma = 0$ の

ときに限って $V=0$ となる。このとき (41) より $y=c$, $z=y$, ${}^Tc_1y+{}^Tc_2z=0$ がえられて、c_2 の階数が l であることから、これをみたす y, z は零しかない。従って、定理5によって絶対安定性がえられる。純虚数の組を持つ場合、

$$\dot x = Ax + bf(\sigma), \quad \dot y = wz + b_1 f(\sigma), \quad \dot z = -wy + b_2 f(\sigma)$$

$$\sigma = {}^Tcx + {}^Tc_1y + {}^Tc_2z, \quad w = \mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega)$$

のときは、Liapunov 函数

$$V(x, y, z, \sigma) = {}^TxBx + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j (y_j^2 + z_j^2) + \Phi(\sigma), \quad \alpha_j > 0$$

を考えて同様な結論が得られる。すなわち、今度は、b, c がなんであってもこの V は定理2の条件(1°)、(2°) をみたし、$\rho = {}^Tcb + {}^Tc_1b_1 + {}^Tc_2b_2$ としても、条件(42)のもとで $\dot V \leqq 0$ となる。したがって、$\dot V = 0$ における不変集合が原点のみからなるための条件を求めれば、(42)とあわせて充分条件が見出される。$\dot V = 0$ のときは $x=0$, $\sigma=0$ でなくてはならないから、その条件は系

$$\dot y = wz, \quad \dot z = -wy$$

の解に対して ${}^Tc_1y + {}^Tc_2z$ が恒等的に零となるのは $y=0$, $z=0$ に限るための条件と同値で、それは

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} c_1 & -wc_2 \\ c_2 & wc_1 \end{pmatrix} = 2l$$

である。

注1（p.3, p.28～29）全安定に関する定理としては Malkin の定理などが知られている。例えば、定理2もそこで述べた系 $\dot{x}=F(x)$ の零解が全安定となるための条件を与えている。このとき、$\|x\|\leqq\alpha$ における $\|\frac{\partial V}{\partial x}\|$ の上限を $L(\alpha)$ とすれば、攝動項 $p(x)$ の許容範囲は

$$\|p(x)\| < L(\|x\|)\, c(\|x\|)$$

で与えられる。

注2（p.14）これは次のようにしても求められる（古屋）。まず、定理1における逆、すなわち、行列の等式

$${}^{T}AB + BA = -C$$

において、$B>0$, $C>0$ ならば A は安定であることが知られている（証明は Lefschetz (3)）。今、$M=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} A & b \\ {}^{T}c & -\rho \end{pmatrix}$ とおけば、$MN+{}^{T}NM=-P$ が得られている。ここで、仮定より、$P>0$, $M>0$ したがって N は安定であることが上のことからわかる。ゆえに勿論、$N=\begin{pmatrix} A & b \\ {}^{T}c & -\rho \end{pmatrix}$ は正則である。

注3（p.17）。このことは、注2の結果を用いれば容易に示される。すなわち、$\begin{pmatrix} A & b \\ {}^{T}c & -\rho \end{pmatrix}$ は安定な実行列であるから、$\det\begin{pmatrix} -A & -b \\ -{}^{T}c & \rho \end{pmatrix}$ は正でなくてはならない。ゆえに、(14) 式を用いると

$$\det\begin{pmatrix} -A & -b \\ -{}^{T}c & \rho \end{pmatrix} = \det(-A)\cdot\det(\rho + {}^{T}cAb) > 0$$

が得られる。$\det(-A)>0$ および $m=1$ に注意すれば、直ちに

(17) がえられる。

注 4 (P. 30). 明らかに、これは $\tau_j \geq 0$, a_j を定数として

$$\dot{x}(t) = F(x_t) + bf\left(\sum_{j=1}^{\ell} a_j \sigma(t-\tau_j)\right), \quad \sigma(t) = {}^T c x(t)$$

の場合を含んでいる。

注 5 (P. 34). この条件は、たとえば、差分微分方程式の場合には明らかにみたされている。

注 6 (P. 38). *transfer function* ということばは、系 (2a)

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = {}^T c x \quad (\xi = f(\sigma))$$

等において、ξ を *input*, σ を *output* と考えて、記号的に $p = \frac{d}{dt}$ とおいた場合に

$$\sigma = -{}^T c A(p)^{-1} b \xi, \quad A(p) = A - pE$$

と表わされることに由来している。函数微分方程式の場合にはこれに対応する表現はない。また、正確には $k(p) = -{}^T c A(p)^{-1} b$ を *transfer function* とよび、それに対して $k(i\omega)$ は *frequency response* と呼ばれている。

注 7 (P. 48). このことは函数微分方程式の場合にも成り立つ。このとき、$A(\lambda)$ は一般には λ の多項式ではない。しかし、ω を実数としたとき、積分 $\int_{-r}^{0} e^{i\omega\theta}[dv_F(\theta)]$ は ω に無関係な上界をもっている。したがって、$A(i\omega)^{-1}$ は二つの函数の比として表わしたとき、分母は $\det A(i\omega)$ で与えられて ω の有界函数を係数とし n 次の係数は零でない定数とする ω の n

次の多項式で、分子はωの有界函数を係数とするωの高々$(n-1)$次の多項式を要素とする行列である。また分母は零となることはないから、$Re\,\frac{1}{i\omega}A(i\omega)^{-1}$が下に有界であることを示すには、$\omega \longrightarrow 0$における極限が存在して有界であることを示せば充分である。まず、

$$B(\lambda) = \int_{-r}^{0}\{e^{\lambda\vartheta}-1\}[dv_F(\vartheta)] - \lambda E$$

とおいて、$A(0) = \int_{-r}^{0}[dv_F(\vartheta)]$が正則であることに注意して

$$A(i\omega) = A(0) + B(i\omega) = A(0)\{E + A(0)^{-1}B(i\omega)\}$$

を得る。こゝで、

$$\frac{1}{\lambda}B(\lambda) = \int_{-r}^{0}\frac{e^{\lambda\vartheta}-1}{\lambda}[dv_F(\vartheta)] - E,$$

したがって、

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}B(\lambda) = \int_{-r}^{0}\vartheta[dv_F(\vartheta)] - E$$

を得る。このことから、λが充分小さければ$B(\lambda)$もまた小さいことがわかる。さて、一般に行列Xが充分小さいときに、

$$(E+X)^{-1} = E - X + X^2 - X^3 + \cdots$$

が成り立つことを用いて、かつ、

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}B(\lambda)^{\nu} = 0, \quad \nu = 2, 3, \cdots$$

に注意して、直ちに、実数ωを零に近づけたとき

$$Re\,\frac{1}{i\omega}A(i\omega)^{-1} \longrightarrow A(0)^{-1}\{E - \int_{-r}^{0}\vartheta[dv_F(\vartheta)]\}A(0)^{-1}$$

であることがわかる。特に、常微分方程式のときは

$$Re\ \frac{1}{i\omega}A(i\omega)^{-1} \longrightarrow (A^{-1})^2 \quad (\omega \to 0)$$

となる。

注8（P.50）このための条件は

$$^Tb_1B_1b_1 = -\frac{1}{2}\,^Tb_1c_1$$

かつ $B_1>0$ であることから、$^Tb_1c_1$ は対称 (l,l) 行列で、かつ、$b_1u \neq 0$ なる l ベクトル u に対して

$$-\,^Tu\,^Tb_1c_1u>0$$

であることが必要充分である，特に、$m=l=1$ のときはこの条件は、$b_1c_1<0$、あるいは、$b_1=c_1=0$ となる。

参考文献。

(1) M. A. Aizerman & F. R. Gantmacher, Absolute Stability of regulator systems, Holden-Day, 1964.

(2) A. Halanay, Differential Equations: Stability, oscillations, time lags, Academic Press, 1966.

(3) S. Lefschetz, Stability of nonlinear control systems, Academic Press, 1965。

絶対安定性に関しては、(1) は殆んど完全とも云える内容をもっている。Popov その他の論文については上の文献、特に、(1) において、up to date な意味で殆んど完全な list が見られる。