数理解析研究所講究録
第33巻 1967年 57-71

非線形制御系の可制御性について

京大工　　得丸英勝

1．はしがき

線形制御系に対する可制御性の概念は Kalman によって導入され，制御理論，特に最適制御理論において重要な役割を果すということが認められている[1~4]．非線形系に対する可制御性の研究は Roxin，Markus，Hermes などによってなされている．Roxin は特別な形をした非線形系について可制御性を考察し[5]，また，最適操作と到達可能な領域との関連について論じている[6]．Markus は非線形系の局所的可制御性について考察している[7,8]．Kalman の理論の非線形系への拡張は Hermes によって試みられている[9]．彼は可制御性という概念をあるパフ形式の積分可能性という概念に拡張して可制御性と最適問題における特異問題との関係について論じている．

この報告においては非線形系，主として，操作量に関しては線形であるような系の可制御性について考える．ある制御

系において操作量が線形に入っているならば，そのような系の可制御性は対応するある補助的な制御系の可制御性を考えることによって議論できることを示し，この結果を用いて可制御であるための十分条件を求める．最初に制御系の準可制御性という概念を導入し，準可制御なるための条件を求める．次に準可制御性と局所的可制御なるための条件を結びつけて可制御なるための条件を求める．

2. 定義

制御系の挙動は常微分方程式

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1}$$

によって記述されているものとする．ただし，xはn次元状態ベクトルでありuはr次元操作ベクトルである．関数

$$f_i(x, u),\ \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j},\ \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_k} \quad (i,j=1,2,\cdots n,\ k=1,2,\cdots r)$$

は $R^n \times R^r$ において連続であるとする．とくに(1)式の右辺が操作 u に関して線形である場合には制御方程式は

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{2}$$

となる．ここに $G(x)$ は要素 $g_{ij}(x)$ をもつ $n \times r$ 行列である．$G(x)$ の列ベクトル $g_1(x), \cdots, g_r(x)$ は全ての x に対して一次独立であると仮定する．簡単のため $D(x)$ を

$$D(x) \equiv \mathrm{Det.}(g_{ij}(x)) \quad (i,j=1,2,\cdots r) \tag{3}$$

と定義するとき全てのxに対して $D(x) \neq 0$ と仮定する。
操作 $u(t)$ は区分的に連続な関数のなかから選ばれるものとする。そのような操作を許容操作ということにする。ある許容操作 $u(t)$ が与えられたとすると(1)式の形は確定して

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \tag{4}$$

となる。(4)式の解 $x(t, u)$ が区間 $0 \leq t \leq T$ において存在し、条件 $x(0, u) = x^0$, $x(T, u) = x^1$ を満足する場合、操作 $u(t)$ は初期状態 x^0 を時刻 T に状態 x^1 に移すという。このことばを用いてつぎの定義を行う。

定義1. 状態x^0をある有限時間内に状態x^1に移すような許容操作が存在するとき、状態x^0は状態x^1に可制御であるという。全ての$x^0 \in R^n$がx^1に可制御のとき与えられた制御系は状態x^1に完全可制御であるという。とくに、x^1が原点の場合には単に、可制御、または、完全可制御という。

定義2. x^0がx^1の任意の近傍内のある状態に可制御のときx^0はx^1に準可制御であるという。定義1と同様にして全ての状態がx^1に準可制御のとき与えられた制御系はx^1に完全準可制御であるといわれる。またx^1が原点の場合にはそれぞれ、準可制御、完全準可制御ということにする。

定義3. もし原点の近傍Uが存在して全ての$x \in U$が可制御のときその制御系は局所的に完全可制御であるという。

局所的に完全可制御なるための十分条件はMarkus によって求められている。[7,8]

上の定義よりある制御系が完全準可制御でしかも局所的に完全可制御ならばその系は完全可制御であるといえる。

なお線形系の場合には制御方程式は

$$\dot{x} = Fx + Gu \qquad (5)$$

となり完全可制御のための必要十分条件は行列

$$(G,\ FG,\ \cdots,\ F^{n-1}G) \qquad (6)$$

の階数がnであることである[3,4]。ただしF, Gはそれぞれ$n \times n$, $n \times r$定数行列である。またこの場合には局所的完全可制御性と完全可制御性は一致する。しかし，可制御性と準可制御性は一致しない。

3. 準可制御性

最初に制御系の方程式が(1)式によって与えられている場合について考える。この系が準可制御なるための条件として次の結果を得る。

定理1.　つぎの条件を満足する正定な関数$V(x)$が存在するならば制御系(1)は完全準可制御である。

(i)　$V(x)$は連続な偏導関数をもつ。

(ii)　おのおのの固定された$x(\neq 0)$にたいして不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, u) < 0$$

を満足するベクトル u が存在する．

(iii) $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$

証明 x^0 を任意に与えられた初期状態とする．R_{x^0} を x^0 から有限時間で到達可能な点の集合とする．x^0 が原点に準可制御でないと仮定すると $\operatorname{Inf}_{x\in R_{x^0}} V(x) \neq 0$ である．したがって $V(x)$ の $x\in R_{x^0}$ に対する下限が 0 に等しいことを示せばよい．いま $\operatorname{Inf}_{x\in R_{x^0}} V(x) = \alpha > 0$ であると仮定すると

$$\lim_{i\to\infty} V(x^i) = \alpha$$

なるような点列 $S = (x^1, x^2, \cdots, x^i, \cdots)$，$x^j \in R_{x^0}$ $(j=1,2,\cdots)$ が存在する．集合 S の一つの集積点を x^α とする．x^0 は x^α に準可制御である．明らかに $V(x^\alpha)=\alpha$ である．定理の仮定によって x^α の近傍 O_α とベクトル u^α で任意の $x\in O_\alpha$ に対して不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(x, u^\alpha) < 0$$

を満足するものが存在する．ここで微分方程式

$$\dot{x} = f(x, u^\alpha)$$

を初期条件 $x(0) = x^\alpha$ のもとで考える．この解 $x(t, u^\alpha)$ はある有限区間上で存在して，また $V(x)$ のこの解に沿っての時間微分は $x(t, u^\alpha)\in O_\alpha$ なる t に対して，

$$\frac{dV(x(t,u^\alpha))}{dt}=\frac{\partial V(x(t,u^\alpha))}{\partial x}\cdot f(x(t,u^\alpha),u^\alpha)<0$$

であるから，ある $t=t_1>0$ に対して $V(x(t_1;u^\alpha))<\alpha$ となる．もし $x^\beta=x(t_1,u^\alpha)$ とおくと x^α は x^β に可制御でしかも $V(x^\alpha)>V(x^\beta)$ である．x^0 は x^α に準可制御で x^α は x^β に可制御であるから結局 x^0 は x^β に準可制御である．したがって x^β のある近傍に x^0 から到達可能でしかも $V(x^\gamma)$ の値が α よりも小なる点 x^γ が存在する．このことは始めの仮定

$$\operatorname*{Inf}_{x\in R_{x^0}} V(x)=\alpha>0$$

に反する．よって定理は証明された．

例題1．

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x)+x_1u\\ \dot{x}_2=f_2(x)+x_2u\end{cases}$$

いま $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ とすると

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(x)=x_1f_1(x)+x_2f_2(x)+(x_1^2+x_2^2)u.$$

となり，この関数は上の定理の条件を満足するからこの制御系は完全準可制御である．

この定理を適用できる制御系は限られており，(1) によって表わされる系の可制御性を一般的に論ずるのは困難なので以下においては (2) 式によって表わされる系について考える．

4. 線形操作項をもつ制御系の可制御性

最初に完全可制御のためのかんたんな必要条件について述べる．

定理2：　制御系(2)が完全可制御ならば連立線形偏微分方程式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x) = 0 \\
&\frac{\partial V}{\partial x_1} g_{1j}(x) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} g_{nj}(x) = 0
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

$$(j = 1, 2, \cdots, r)$$

は解をもたない．

証明　方程式(7)が m 個 ($m \leq n-(r+1)$) の原点において独立な解 $V_1(x), \cdots V_m(x)$ をもつと仮定する．仮定によって行列式

$$\left| \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right| \quad (i = 1, \cdots m, \ j = 1, \cdots m)$$

は原点において0でないとすることができる．したがって変換

$$
\begin{cases}
y_i = V_i(x) & (i = 1, \cdots, m) \\
y_i = x_i & (i = m+1, \cdots, n)
\end{cases}
\qquad (8)
$$

は原点において正則な変換である．この変換によって方程式(2)はある関数 $F(y, u)$ によって

$$\dot{y} = F(y, u) \qquad (9)$$

となるが $y_1, \dots, y_m$ の定義によって

$$\dot{y}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

であるから明らかに完全可制御でない．したがってもとの系(2)も完全可制御であり得ない．　　　　証明終り

定理2の条件はまた完全準可制御の必要条件でもあることは上の証明より明らかである．

例題2．方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 + x_2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - u \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_1 u \end{cases} \tag{10}$$

によって表わされる系を考える．

(10)式に対応する偏微分方程式を求めると

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(-x_1 x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_3} x_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_3} x_1 = 0$$

となる．この方程式は明らかに解として $V = 2x_1 + x_2^2$ をもつ．したがって制御系(10)は完全可制御でない．すなわち，操作 u をどのように変化させても x は $2x_1 + x_2^2 =$ 定数なる曲面上のみを動くのである．

つぎに制御系(2)が完全準可制なるための条件について考える．(2)式に対応してつぎの方程式によって表わされる系を

考える.

$$\dot{x} = G(x)u \tag{11}$$

このときつぎの結果が成立する.

補題1. 制御系(11)に関して状態 x^0 が x^1 に可制御ならば制御系(2)に関して x^0 は x^1 に準可制御である.

さて,(2)式の行列 $G(x)$ に対応してつぎの連立偏微分方程式を考える.

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} g_{1j}(x) + \cdots\cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} g_{nj}(x) = 0 \tag{12}$$

$$(j = 1, 2, \cdots r)$$

この方程式は一般に $(n-r)$ 個以下の独立な解をもつがここでは簡単のため(12)は完全系であり,したがって $(n-r)$ 個の独立な解 $V_{r+1}(x)$, $\cdots$ $V_n(x)$ をもつものとする.そこで,x から (y, z) への変換

$$\begin{cases} y_i = x_i & (i = 1, 2, \cdots, r) \\ z_i = V_i(x) & (i = r+1, \cdots, n) \end{cases} \tag{13}$$

を行うと方程式(2)は

$$\begin{cases} \dot{y} = \varphi(y, z) + H(y, z)u \\ \dot{z} = \psi(y, z) \end{cases} \tag{14}$$

となる.ただし,$y = (y_1, \cdots, y_r)$,$z = (z_{r+1} \cdots, z_n)$,$\varphi$,$\psi$ はそれぞれ $(f_1(x), \cdots, f_r(x))$,$(f_{r+1}(x), \cdots, f_n(x))$ を

(13)によって変換した関数を表わす．また，$H(y,z)$ は $r\times r$ 行列で最初の仮定によって全ての (y,z) にたいして $\mathrm{Det.}\,H(y,z)\neq 0$ である．このことと補題1を用いてただちにつぎの結果を得る．

定理3．初期状態 (y^0,z^0) は任意の $y^1\in R^r$ にたいして (y^1,z^0) なる状態に準可制御である．

証明　方程式(11)に対応する式は(14)式より

$$\begin{cases}\dot{y}=H(y,z)u\\ \dot{z}=0\end{cases}\tag{15}$$

となり $\mathrm{Det.}\,H(y,z)\neq 0$ なることより (y^0,z^0) は (y^1,z^0) に可制御である．したがって補題1より定理の結論を得る．

さて，(14)式に対応してつぎの $(n-r)$ 次元の制御系を考える．

$$\dot{z}=\Psi(v,z)\tag{16}$$

ここに z は $(n-r)$ 次元状態ベクトルであり，v は r 次元操作ベクトルである．このとき上の結果を利用してつぎの定理を得る．

定理4．　制御系(14)，したがって(2)が完全準可制御なるための必要十分条件は $(n-r)$ 次元の制御系(16)が完全準可制御なることである．

証明　必要条件は明らかなので，十分条件のみ証明する．

(16) が完全準可制御であるとする．Uを任意に与えられた R^{n-r} の原点の近傍とすると仮定によって任意の z^0 に対してある操作 $v^0(t)$ が存在して，対応する (16) の解 $z(t, v^0)$ が条件 $z(0, v^0) = z^0$，$z(T, v^0) \in U$ $(T > 0)$ を満足する．ここに $v^0(t)$ は微分可能として一般性を失なわない．$\mathrm{Det.}\, H(y, z) \neq 0$ だから (14) の操作として

$$u(t) = H^{-1}(v^0(t), z(t, v^0)) \left\{ \dot{v}^0(t) - \varphi(v^0(t), z(t, v^0)) \right\}$$

を選ぶとこの操作は状態 $\tilde{x}^0 \equiv (v^0(0), z^0)$ を時刻 T に $\tilde{x}^1 \equiv (v^0(T), z(T, v^0))$ に移す．$x^0 \equiv (y^0, z^0)$ を与えられた初期状態とすると定理3によって x^0 は $\tilde{x}^0$ に準可制御であり $\tilde{x}^1$ は $(0, z(T, v^0))$ に準可制御である．したがって微分方程式の解の初期値に関する連続性を用いると $x^0 = (y^0, z^0)$ は原点に準可制御なることを示すことができる．　証明終り

この定理によって最初に与えられた n 次元系について可制御性を考えるかわりに操作の個数だけ次元の低い系について考えればよいことになる．

最後に局所的完全可制御性について考える．

5. 局所的完全可制御性

定理 5 (L. Markus)[7,8] n 次元制御系

$$\dot{x} = f(x, u)$$

において $f(x,u)$, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$ は $R^n \times \Omega$ 上で連続とする．また操作 u にたいする拘束 $\Omega \subset R^r$ はその内部に原点を含むものとする．つぎの条件が満足されているなら与えられた制御系は局所的に完全可制御である．

(i) $f(0,0)=0$

(ii) $\mathrm{rank}\,(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n$

ただし，

$$A = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(0,0)}{\partial u}$$

である。

例題 3. 方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n x = u \qquad (17)$$

によって表わされている制御系を考える．ただし，

$x^i = d^i x/dt^i$ であり a^i は $x, \dot{x}, \cdots x^{n-1}$ の関数である．

ここで $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, $\cdots$ $x^{n-1} = x^n$ とおくと (17) はつぎのように表わされる．

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -(a_1(x)x_n + \cdots a_n(x)x_1) + u \end{aligned} \qquad (18)$$

定理4によれば準可制御性に関して (18) はつぎの線形系と

等価である．

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= v
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

ところで (19) は完全可制御あることは明らかである．したがって制御系 (17) は完全準可制御である．また定理5によれば (18) は局所的に完全可制御なることが分る．制御系 (17) は局所的に完全可制御でしかも完全準可制御であるから結局完全可制御である．

例題4．

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + u \\
\dot{x}_2 = f_2(x_2) + x_1
\end{cases}
\qquad (20)
$$

一次元の系　　$\dot{x}_2 = f_2(x_2) + v$

は明らかに可制御であり，したがって (20) は定理4によって完全準可制御である．

$$
\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} = a_{ij} \qquad (i = 1, 2, \; j = 1, 2)
$$

とおくと定理5の行列 A，B は

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & a_{21} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる．$\mathrm{rank}(B, AB) = 2$ だから (20) は局所的に完全可制御でありまた完全可制御となる．

References

1. R. E. Kalman : On the General Theory of Control Systems; Proc. 1st International Congress on Automatic Control, Vol. 1, Butterworths Scientific Publications, London England, pp. 481-492 (1961)

2. R. E. Kalman : Canonical Structure of Linear Dynamical Systems; Proc. Nat'l Acad. Sci. U. S., Vol. 48, pp. 596-600, April (1962)

3. R. E. Kalman, Y. C. Ho & K. S. Narendra : Controllability of Linear Dynamical Systems; Contrib. to Differential Equations, Vol. 1, pp. 189-213 (1962)

4. R. E. Kalman : Mathematical Description of Linear Dynamical Systems; J. SIAM Control, Vol. 1, pp. 152-192 (1963)

5. E. Roxin & V. Spinadel : Reachable Zones in Autonomous Differential Systems, Contrib. to Differential Equations, Vol. 1, No. 3, pp. 275-315 (1962)

6. E. Roxin : A Geometric Interpretation of Pontryagin's Maximum Principle; International Symposium on Nonlinear Differential Equs. and Nonlinear Mechanics, Academic Press New York and London, pp. 303-323 (1963)

7. L. Markus & E. B. Lee : On the Existence of Optimal Control; Transaction of ASME., Vol. 84, pp. 13-22, March (1962)

8. L. Markus : Controllability of Nonlinear Processes; J. SIAM Control Ser. A, Vol. 3, No. 1, pp. 78-91 (1965)

9. H. Hermes : Controllability and the Singular Problems; J. SIAM Control Ser. A, Vol. 2, No. 2, pp. 241-260 (1965)

10. E. Kreindler & P. E. Sarachk : On the Concepts of Controlla-

bility and Observability of Linear Systems; IEEE Transaction on Automatic Control, pp. 129-136, April (1964)