数理解析研究所講究録
第 33 巻 1967 年 93-110

差分微分方程式論における変分法の応用

早大 理工　　杉山昌平

序論

制御函数 u を含む微分方程式条件

(1)　　$\dot{x} = f(t, x, u)$

および不等式条件

(2)　　$G(t, x, u) \geqq 0$

の下に，汎函数

(3)　　$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)dt$

を最小ならしめる最適制御の問題に対して古典的変分法を用いる方法については，例えば L. D. Berkovitz [1] において示されている.

微分方程式条件 (1) よりもっと一般的な方程式

(4)　　$\dot{x}(t) = f(t, x(\cdot), u)$

を条件としてもつ問題に関しては，例えば M.N. Oğuztöreli [4]にまとめられている．方程式（4）の特別な場合として差分微分方程式

$$(5) \qquad \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), u)$$

を条件としてもつ場合には，例えば Pontryagin et al [5] に紹介されている．

ここでは条件（2），（5）をもつ最適制御の問題に対して変分法を用いることが目的であるが，（5）よりも一般的な差分微分方程式

$$(6) \qquad g(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t)) = 0$$

を条件としてもつ変分問題について若干の結果を準備しておく必要がある．それらの結果が得られたならば，最適制御の問題へ直ちに応用されるようになるが，方法論的にはいずれも常微分方程式条件の場合と類似している．

なお，両端点を固定した条件だけをもつ変分問題に対して，Euler の微分方程式，Du Bois-Reymond の関係式，Weierstrass-Erdmann の角点条件，等周問題については，例えば El'sgol'tz [2] を参照されたい．

§1. 変分法の問題

1.1. 固定端点の問題　I は区間 $t_0 \leq t \leq t_1$，D は R^n 内の領域とする．函数（スカラー）$f_0(t, x, y, z)$ および m（<

n）次元関数 $g(t, x, y, z)$ は $I \times D \times D \times R^n$ で定義された函数であり　　そこにおいて2回連続的微分可能とする。この時、問題はつぎのように規定される。

問題　境界条件

$$(1.1) \qquad x(t_0) = x^0, \qquad x(t_1) = x^1$$

および差分微分方程式条件

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &g(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t)) = 0, \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1 \\ &x(t) = \varphi(t) \quad (t_0 - h \leqq t < t_0), \qquad x(t_0) = x^0 \end{aligned}$$

の下に、汎函数

$$(1.3) \qquad J[x] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t))\,dt$$

を最小ならしめる函数（$t_0 \leqq t \leqq t_1$）において高々有限個の t の値を除いて滑かであり、その除外点においては左右の微係数が存在する）$x(t)$ を求めよ。

いま、問題の解

$$K^* \ :\ x = x^*(t), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1$$

が存在したとし、それは $t_0 \leqq t \leqq t_1$ において連続、高々有限個の t の値を除いて滑かであり，その除外点においては左右の微係数が存在するものとする。さらに K^* に沿って

$$(1.4) \qquad \operatorname{rank} \frac{\partial g}{\partial z} = m$$

であるとする。 ここで $\partial g/\partial z$ はつぎのように定義される：

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}.$$

微分方程式条件をもつ場合に対する古典的変分法における方法とまったく同様にして，$n-m$ 次元函数 $h(t, x, y, z)$ を適当に選んで，K^* に沿って

$$(1.5) \qquad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0$$

ならしめることができる。

ここでつぎの仮定をおく：

(1.6) $|\alpha|$ が十分小さい任意の定数ベクトル α に対して，左端点が (t_0, x^0)，右端点が $(t_1, x^*(t_1)+\alpha)$ となるような我々の問題の解は存在しない。

さて，ε は n 次元定数ベクトルで，$|\varepsilon|$ は十分小さいとし，$\gamma^i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$ は $t_0 \leqq t \leqq t_1$ において連続な任意の $n-m$ 次元函数とする。ここで

$$h(t, x^*(t), x^*(t-h), \dot{x}^*(t)) = \gamma^*(t), \quad \Gamma = (\gamma^1 \cdots \gamma^n)$$

とおく。連立差分微分方程式

$$g(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t)) = 0,$$

$$(1.7) \qquad h(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t)) = \gamma^*(t) + \Gamma(t)\varepsilon,$$

$$x(t) = \xi(t) \quad (t_0 - h \leqq t < t_0), \qquad x(t_0) = x^0$$

がK^*の近傍に存在する．その解を $x(t, \varepsilon)$とし，

$$\left.\frac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (\eta^1(t) \cdots \eta^n(t))$$

とおけば，仮定 (1.6) から　$|\alpha|$ が十分小さい $\alpha \neq 0$ に対して方程式

$$x(t_1, \varepsilon) = x^*(t_1) + \alpha$$

を満足する ε は存在しないから，　$t = t_1$ において

$$\det \left.\frac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \det(\eta^1(t) \cdots \eta^n(t)) = 0 \tag{1.8}$$

が成立する．

方程式 (1.7) における $x(t)$ を $x(t, \varepsilon)$ でおきかえ，ε で微分してから $\varepsilon = 0$ とおけば，$\eta^i(t)$ は方程式

$$\begin{aligned} &g_x^* \eta(t) + g_y^* \eta(t-h) + g_z^* \dot{\eta}(t) = 0, \\ &h_x^* \eta(t) + h_y^* \eta(t-h) + h_z^* \dot{\eta}(t) = \gamma^i(t), \\ &\eta(t) = 0 \quad (t_0 - h \leqq t \leqq t_0) \end{aligned} \tag{1.9}$$

を満足する．ここで g^*, h^* は x を x^* でおきかえたものを表わす．いま，

$$\Phi = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \quad \Phi^* = \begin{pmatrix} g^* \\ h^* \end{pmatrix}$$

とおけば，（1.9）は

$$\Phi_x^* \eta(t) + \Phi_y^* \eta(t-h) + \Phi_z^* \dot{\eta}(t) = \tilde{\gamma}^i(t), \quad \tilde{\gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma^i \end{pmatrix},$$

(1.10)

$$\eta(t) = 0 \quad (t_0 - h \leqq t \leqq t_0)$$

と書直され，条件（1.5）は K^* に沿って

(1.11) $$\det \Phi_z^* \neq 0$$

であると書くことができる．方程式（1.10）における係数 Φ_x^*, Φ_y^*, Φ_z^* は $t_0 \leqq t \leqq t_1$ において高々有限個の第1種の不連続点をもち，$\tilde{\gamma}^i(t)$ は連続であるから，（1.11）を用いれば解 $\eta(t)$ は $t_0 \leqq t \leqq t_1$ において連続となる。いま，

$$Y = (\eta^1 \cdots \eta^n), \quad \tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}^1 \cdots \tilde{\gamma}^n)$$

とおき，（1.10）に対応する行列方程式

$$\Phi_x^*(t) Y(t) + \Phi_y^*(t) Y(t-h) + \Phi_z^*(t) \dot{Y}(t) = \tilde{\Gamma}(t),$$

(1.12)

$$Y(t) = 0 \quad (t_0 - h \leqq t \leqq t_0)$$

をつくる．ただし，$\Phi_x^*(t)$ 等は Φ_x^* 等を表わすものとする．この方程式に対応する随伴方程式

$$\Phi_z^*(t)^T \lambda(t) = -\int_t^{t_1-h} \Phi_x^*(s)^T \lambda(s)\, ds - \int_t^{t_1-h} \Phi_y^*(s+h)^T \lambda(s+h)\, ds$$

(1.13)

$$+ \Phi_z^*(\underbrace{t_1-h}_{+0})^T \lambda(t_1-h) \quad (t_0 < t < t_1-h),$$

$$\Phi_z^*(t)^T\lambda(t) = \int_{t_1-h}^{t} \Phi_x(s)^T\lambda(s)\,ds + \Phi_z^*(t_1-h+0)\lambda(t_1-h),$$
$$t - h < t < t_1$$

および行列方程式

$$\Phi_z^*(t)^T\Lambda(t) = -\int_{t}^{t_1-h} \Phi_x^*(s)^T\Lambda(s)\,ds - \int_{t}^{t_1-h} \Phi_y^*(s+h)^T\Lambda(s+h)\,ds$$
$$+ \Phi_z^*(t_1-h+0)^T\Lambda(t_1-h), \quad t_0 < t < t_1-h,$$

(1.14)

$$\Phi_z^*(t)^T\Lambda(t) = \int_{t_1-h}^{t} \Phi_z^*(s)^T\Lambda(s)\,ds + \Phi_z^*(t_1-h+0)^T\Lambda(t_1-h),$$
$$t_1-h < t < t_1$$

を考える．ここで $\lambda(t_1-h) \neq 0$，$\Lambda(t_1-h)$ $(\det\Lambda(t_1-h) \neq 0)$ は与えられた定数とする．(1.12)の左から $\Lambda(t)^T$ を乗じ，t_0 から t_1 まで積分し，(1.14) および $\Upsilon(t_0) = 0$ を用いれば，

$$\int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t)^T\tilde{\Gamma}(t)\,dt$$

(1.15)
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\Lambda(t)^T\Phi_x^*(t)\Upsilon(t) + \Lambda(t)^T\Phi_y^*(t)\Upsilon(t-h) + \Lambda(t)^T\Phi_z^*(t)\dot{\Upsilon}(t) \right) dt$$
$$= \Lambda(t_1-0)^T\Phi_z^*(t_1-0)\Upsilon(t_1)$$

が得られる．しかるに，$\det\Upsilon(t_1) = 0$ であるから

(1.16)
$$\det\int_{t_0}^{t_1} \tilde{\Gamma}(t)^T\Lambda(t)\,dt = 0$$

が成立する．

補助定理．　仮定（1.6）が満足されるとき（1.13）の解 $\lambda(t)$ の最初の m 成分は ≢0 である．

証明　関係（1.16）が成立するから0でない1つの定数ベクトル c が存在して

（1.17）　$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{\Gamma}(t)^T \Lambda(t) c \, dt = 0$$

が成立する．ここで

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

（Λ_1, Λ_2 はそれぞれ $m \times n$, $(n-m) \times n$ 行列）とおけば，（1.17）から

（1.18）　$$\int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t)^T \Lambda_2(t) c \, dt = 0$$

が満足され，$\Gamma(t)$ は任意の連続函数であるから $\Lambda_2(t)c \equiv 0$ が得られる．しかるに，$\lambda(t) = \Lambda(t)c$ は（1.13）の解であり，

$$\lambda(t) = \Lambda(t) c = \begin{pmatrix} \Lambda_1(t) c \\ 0 \end{pmatrix}$$

において，$\lambda(t) \not\equiv 0$ であるから $\Lambda_1(t)c \not\equiv 0$ でなければならない．

最初の問題に戻って

(1.19) $$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(s,\ x(s),\ x(s-h),\ \dot{x}(s))\,ds$$

とおけば，これはまた差分微分方程式

$$\dot{x}_0(t) = f_0(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t)),$$

$$x_0(t_0) = 0, \qquad x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t))\,dt$$

と書くことができる．しかも

$$x_0(t_1) = J[x]$$

であるから，我々の問題はつぎのように変換される．

問題　条件

(1.20)
$$\dot{x}_0(t) = f_0(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t)),$$
$$g(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t)) = 0,$$
$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \qquad (t_0 - h \leqq t < t_0),$$
$$\begin{pmatrix} x_0(t_0) \\ x(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^0 \end{pmatrix}, \qquad x(t_1) = x^1$$

の下に $x_0(t_1)$ を最小ならしめる $x(t)$ を求めよ．

定理 1． 曲線 K^* : $x = x^*(t)$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ が我々の問題の解であり，$t_0 \leqq t \leqq t_1$ で連続，高々有限個の t の値において滑か，その除外点においては左右の微係数が存在するものとする．このとき，1つの定数 λ_0，1つの m 次元ベクトル $\lambda(t)$ が存在してつぎの性質を満足する：

(i) $\lambda_0 \geqq 0$;

(ii) $\lambda(t)$ は K^* の角点を除いて連続，角点においては左右の極限値が存在する；

(iii) $(\lambda_0, \lambda(t)^T) \neq 0$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$;

(iv) $$F = \lambda_0 f_0 + \lambda(t)^T g$$

とおけば，K^* の角点を除いて

(1.21)
$$\frac{d}{dt} F_z(t) = F_x(t) + F_y(t+h) \qquad (t_0 < t < t_1 - h),$$
$$\frac{d}{dt} F_z(t) = F_x(t) \qquad (t_1 - h < t < t_1)$$

が成立する．K^* の角点においては $F_z(t)$ の左右の極限値が存在して等しい．ただし，$F_z(t), \cdots$ は $x(t)$ の代わりに $x^*(t)$ を用いたものを表わす．

証明 K^* は変分問題 (1.20) の解であるから，値

$$x_0^*(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x^*(t), x^*(t-h), \dot{x}^*(t))\,dt$$

は汎函数 $J[x]$ の最小値を与えている．したがって，十分

小さい定数 $a>0$ をどんなに選んでも右端点 $x_0^*(t_1)-a$ を通る解は存在しない．これは仮定（1.6）の成立することを示している

さて，$m+1$ 次元ベクトル

$$\begin{pmatrix} f-\dot{x}_0 \\ g \end{pmatrix}$$

は（1.2）における函数 g に対応したものであるから，補助定理により，$m+1$ 次元函数

$$\begin{pmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1)$$

が存在して，方程式

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ f_{0z}^{*T} & g_z^{*T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = -\int_t^{t_1-h}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_{0x}^*(s)^T & g_x^*(s)^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0(s) \\ \lambda(s) \end{pmatrix} ds - \int_t^{t_1-h}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_{0y}^*(s)^T & g_y^*(s)^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0(s) \\ \lambda(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad (t_0 < t < t_1-h),$$

(1.22)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ f_{0z}^*(t)^T & g_z^*(s)^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = \int_{t_1-h}^{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_{0x}^*(s)^T & g_x^*(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0(s) \\ \lambda(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad (t_1-h < t < t_1)$$

を満足する．ただし，$\lambda_0(t)$, α_0 はスカラーであり，α_0, α は定数である．したがって，

$$F = \lambda_0 f_0 + \lambda(t)^T g$$

とおけば確かに定理の結果を満足している．また，明かに $\lambda_0(t)\ (= -\alpha_0)$ は定数である．

注意．λ_0 は定数であって $\lambda_0 \geqq 0$ としてよい．もし，$\lambda_0 > 0$ ならば $\lambda_0 = 1$ としてよく，この場合に K^* は正規（normal）であるという．

1.2. 可動端点の問題．Σ は r 次元のコンパクトな領域とする．右端点 (t_1, x^1) が $r\,(\leqq n)$ 次元集合体

$$S:\quad t_1 = t_1(\sigma),\ x^1 = x^1(\sigma),\quad \sigma \in \Sigma$$

上を動き得るものとする．ただし，$t_1(\sigma), x^1(\sigma) \in C^2$ とする．

左端点 (t_0, x^0) は一応固定しているものとし，右端点が S 上の1点 $(t_1(\sigma), x^1(\sigma))$ であるような許容曲線を $x = x(t, \sigma)$ とすれば，それに対応する汎函数 J は $\sigma \in \Sigma$ の函数とみなされる：

$$J(\sigma) = \int_{t_0}^{t_1(\sigma)} f_0(t, x(t,\sigma), x(t-h,\sigma), \dot{x}_t(t,\sigma))\,dt, \qquad x_t = \frac{\partial x}{\partial t}.$$

これを σ で微分すれば

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma} = f_0 t_{1\sigma} + \int_{t_0}^{t_1} \left(f_{0x} x_\sigma(t,\sigma) + f_{0y} x_\sigma(t-h,\sigma) + f_{0z} x_{t\sigma}(t,\sigma)\right) dt$$

$$=\Big[f_0 t_{1\sigma}\Big]_{t_1(\sigma)}+\int_{t_0}^{t_1(\sigma)-h}\left(f_{0x}(t)+f_{0y}(t+h)-\frac{d}{dt}f_{0z}\right)x_\sigma(t,\sigma)\,dt$$

$$+\Big[f_{0z}x_\sigma\Big]_{t_1(\sigma)}+\int_{t_1(\sigma)-h}^{t_1(\sigma)}\left(f_{0x}-\frac{d}{dt}f_{0z}\right)x_\sigma(t,\sigma)\,dt$$

となる．いま，$x(t,\sigma_0)$ が $J(\sigma)$ を最小にする函数であるとすれば，Euler の微分方程式に注意して関係

(1.23) $\quad \left(f_0 t_{1\sigma}+f_{0z}\dot{x}_\sigma\right)_{\sigma=\sigma_0}=0$

が右端点において成立する．これを横断条件という。

1.3. E函数

$$E(t,x,y,p,q)$$
$$=F(t,x,y,p)-F(t,x,y,q)-F_z(t,x,y,q)(p-q),$$
$$F=\lambda_0 f_0+\lambda(t)^T g$$

とおけば，$J[x]$ を最小にする曲線 $K^*: x=x^*(t)$ が Euler の微分方程式を満足しかつ正規である場合には古典的変分法と全く同様にしてつぎの結果が得られる。

定理2. 汎函数 $J[x]$ を最小ならしめる曲線 $K^*: x=x^*(t)$ に沿って Euler の微分方程式が満足されかつ正規であるならば，任意のベクトル p に対して

(1.25) $\quad E(t,x^*(t),x^*(t-h),\dot{x}^*(t),p)\geqq 0,\quad t_0\leqq t\leqq t_1$

が成立する．

1.4. Clebschの条件　K^*が正規の場合に函数(1.24)に対して方程式

(1.26)　　$F_z^{*}\pi = 0$

を満足する0でないベクトルをπとすれば

(1.27)　　$\pi^T F_{zz}^{*}\pi \geqq 0$

が成立する。これをClebschの条件という。

1.6. 不等式条件　いままでは与へられた条件が差分微分方程式である場合を取扱ってきたが，1部分は差分微分方程式

(1.28)　　$f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t)) = 0$,

残りの部分は差分微分不等式

(1.29)　　$g(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t)) \geqq 0$

で与えられる場合を考えよう。ここでf, gはそれぞれm, k $(m+k<n)$次元函数であるとする。(1.29)に対しては補助函数

$$\Xi = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1(t)^2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_k(t)^2 \end{pmatrix}$$

を作って差分微分方程式

(1.30)　　$g - \Xi = 0$

を対応させるならば，問題はつぎのようになる：

条件 (1.28), (1.30) および境界条件 $x(t_0)=x^0$, $x(t_1)=x^1$ を満足する函数 $x=x(t)$, $\xi=\xi(t)$ を見出して汎函数 (1.3) を最小ならしめよ。

汎函数 $J[x]$ を最小ならしめる曲線 K^* : $x=x^*(t)$ が存在したとし, K^* に沿って

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial \xi}\\ \frac{\partial g}{\partial \xi}\end{pmatrix}=m+k$$

であるとする。このとき, 1.1. の方法を用いるならば, 定数 $\lambda_0\geqq 0$, m 次元函数 $\lambda(t)$, k 次元函数 $\mu(t)$ が存在して

$$F=\lambda_0 f_0+\lambda(t)^T f+\mu(t)^T(g-\Xi)$$

とおくとき, つぎの結果が成立する:

(i) $\lambda(t)$, $\mu(t)$ は $t_0\leqq t\leqq t_1$ において高々有限個の第1種不連続点をもち, かつ $(\lambda_0,\ \lambda(t)^T,\ \mu(t)^T)^T\neq 0$ である。

(ii) $J[x]$ を最小にする曲線 K^* に沿って

$$F_{\xi}^*(t)=-\int_t^{t_1-h}F_x^*(s)\,ds-\int_t^{t_1-h}F_y^*(s)\,ds+\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha\end{pmatrix},$$

$$t_0<t<t_1-h,$$

$$F_{\xi}^*(t)=\int_{t_1-h}^{t}F_x^*(s)\,ds+\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha\end{pmatrix},\qquad t_1-h<t<t_1$$

が満足される．さらに，K^* の角点においては $F_{\dot z}^*(t)$ は相等しい左右の極限値をもっている．

(iv) K^* が正規であるとき，方程式

$$f_{\dot z}^* \pi = 0, \quad g_{\dot z}^* \pi - \Xi_{\dot\xi}^* \kappa = 0$$

を満足する 0 でないベクトル π，κ に対して不等式

$$\pi^T F_{\dot z\dot z}^* \pi - 2\sum_{i=1}^{k} \mu_i \kappa_i^2 \geqq 0, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_k \end{pmatrix}$$

が K^* に沿って成立し，(1.32) から

$$\mu(t) \leqq 0$$

が得られる．

§2. 最適制御問題への応用

U は r 次元 u-空間内の領域とし，$u(t)$ は $t_0 \leqq t \leqq t_1$ において区分的に滑かな函数であり，その値域は U に含まれるものとする．微分方程式

$$\dot z = u, \quad z(t_0) = 0$$

を附加するとき，我々の問題はつぎのようになる：

$$\begin{aligned} &\dot x(t) = f(t, x(t), x(t-h), \dot z(t)), \\ &g(t, x(t), x(t-h), \dot z(t)) \geqq 0, \\ &x(t_0) = x^0, \quad t_1 = t_1(\sigma), \quad x^1 = x^1(\sigma), \quad \sigma \in \Sigma, \\ &z(t_0) = 0, \qquad z(t_1) = \eta \end{aligned} \tag{2.1}$$

の下に，汎函数

$$(2.2)\qquad J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{z}(t))\,dt$$

を最小ならしめる函数の組 $\{x(t),\ z(t)\}$ を求めよ．

いま，函数

$$H = \lambda_0 f_0 + \lambda(t)^T f$$

を導入すれば，§1の諸結果を用いてつぎの定理が得られる．

定理3. $u^*(t)$ は最適制御函数，対応する曲線を K^*: $x = x^*(t)$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ とする．このとき1つの定数 $\lambda_0 \geqq 0$，n 次元ベクトル $\lambda(t)$，r 次元ベクトル $\mu(t)$ が存在し，これらはいずれも高々 K^* の角点を除いて連続，角点においては左右の極限値が存在し，$(\lambda_0, \lambda(t)^T) \neq 0$ が成立する．さらにつぎの結果が成立する：

(i) K^* に沿って $\dot{x}(t) = H_\lambda{}^T$；

(ii) K^* に沿って $\dot{\lambda}(t) = -(H_x + \mu^T g_x)^T$；

(iii) K^* に沿って $H_u + \mu^T g_u = 0$；

(iv) $\mu(t) \leqq 0$

(v) K^* の右端点において横断条件

$$H t_{1\sigma} - \lambda^T x_{1\sigma} = 0$$

が成立する；

(vi) 任意の $u \in U$ に対して不等式

$$H(t, x^*, u^*, \lambda_0, \lambda) \leqq H(t, x^*, u, \lambda_0, \lambda)$$

が成立する．

参考文献

[1] Berkovitz, L. D.: Variational methods in problems of control and programming. J. Math. Anal. Appl., 3(1961), 145-169.

[2] Èl'sgol'c, L. È.: Qualitative methods in mathematical analysis. Transl. Math. Monograph, vol.12, 1964.

[3] McShane, E. J.: Necessary conditions in generalized-curve problems of the calculus of variations. Duke Math. J., 7, 1-27 (1940)

[4] Oǧuztöreli, M. N.: Time-lag control systems. Acad. Press, 1966.

[5] Pontryagin et al.: The mathematical theory of optimal processes. Interscience, 1962.