数理解析研究所講究録
第 33 巻 1967 年 111-130

偏微分方程式で表わされる系の最適制御

東大 工学部 有本 卓

§1. 序

分布定数系に対する最適制御理論の一般論を展開する際に，問題をあまりにも一般化しすぎて最適解を求めるための最適性に対する必要条件が具体化されないようでは困るし，また，ある程度統一的に解が得られるように問題を定式化しなければならないことも必要である。そのような意味で，Egorov[1)], Butkovskii[2)] らは偏微分方程式で表わされる系に対して，Pontrjagin の「最大原理」と類似した最大原理を導いている。

この論文では，Egorov, Butkovskii らの方法と異って，非線形計画法の問題をもっと一般の関数空間（具体的には pre-Hilbert 空間）において検討し，最適のための必要条件として一般化された Kuhn-Tucker の gradient form を導き，この form を用いて放物形の偏微分方程式で表わされ

る系のある最適制御問題を考察する。

なお，関数空間における非線形計画法を用いて最適制御問題を検討した論文には Sakawa[3] があるが，ここでは汎関数の convexity を要求しないでも成立するような gradient 方程式が主役を演じていることに注意したい。

§2. 問題の設定と準備

この節では一般の線形ノルム空間で最適問題を提起し，かつ次節で述べる最適のための必要条件を導くときに必要になってくる概念の定義を Blum[4] に従って与えておく。

E と E_1 を実の線形ノルム空間，f を E のある部分集合から E_1 への mapping，J を E のある domain D で定義された汎関数とする。また，$K\subset E_1$ を convex cone とする。すなわち，$y\in K$ なら $\alpha y\in K$（α は非負の実数），$y^1\in K$, $y^2\in K$ なら $y^1+y^2\in K$ である。このとき，K によって transitive relation（$\geq$）が定義される。すなわち，$y^1\geq y^2$ は $y^1-y^2\in K$，また $y\geq 0_K$ は $y\in K$ と約束する。

<u>定義 1.</u>　f を domain $D\subset E$ から E_1 へのある mapping とする。集合 $C(f)=\{y: y\in D$ かつ $f(y)\geq 0_K\}$ を <u>f の constraint</u> と呼ぶ。もしも $u\in C(f)$ のある近傍

N_u があってすべての $y \in C(f) \cap N_u$ に対して $J(y) \geq J(u)$ のとき，u を constraint $C(f)$ における J の relative minimum と呼ぶ。

こうして最適問題はつぎのように述べることができる。

問題 1. constraint $C(f)$ において J の relative minimum を与える元 $u \in D$ を見つけよ。

次節ではこのような問題を，もう少し具体的に，連続関数から成る pre-Hilbert 空間で検討する。そのための準備として，以下でつぎのような概念を定義しておこう。

定義 2. u を含む E の部分集合 D はつぎの条件が満足されるとき finitely open at u であるという。すなわち，任意の $h_1, \cdots, h_n \in E$, $n \geq 1$ に対して R^n の原点を含む開集合 $T \subset R^n$ が存在し，すべての $(t_1, \cdots, t_n) \in T$ に対して

$$u + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i \in D$$

が満足されること。

定義 3. $f: E \to E_1$ はある finitely open set at u で定義された mapping とする。もしも

$$\lim_{|t| \to 0} [f(u+th) - f(u)]/t \equiv \delta f(u; h) \qquad (1)$$

がすべての $h \in E$ に対して存在するならば $\delta f(u; h)$ は weak differential of f at u with increment h と呼ばれる。

ここで注意すべきことは $\delta f(u; h)$ は h に関して homogeneous になっており，また，J が実汎関数でかつ $\delta J(v; h)$ がある finitely open set at v で v に関して finitely continuous at v（定義4を見よ）であれば $\delta J(v; h)$ は

$$\delta J(v; h_1 + h_2) = \delta J(v; h_1) + \delta J(v; h_2) \qquad (2)$$

の性質を持つことである。

定義4. $D \subset E$ は finitely open at u とし，f は D で定義された E_1 への mapping とする。また，$v \in D$ とし，D はまた finitely open at v とする。もしも $f(v + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i)$ がすべての $h_1, \cdots, h_n \in E$ に対して R^n の原点で $(t_1, \cdots, t_n)$ に関して連続であるとき，f は finitely continuous at v という。

さて，E を内積 (u, v) が定義された実の pre-Hilbert 空間としよう。$\delta J(u; h)$ は h に関して線形であるから，ある場合には

$$\delta J(u; h) = (\nabla J(u), h) \qquad \text{for all } h \in E \quad (3)$$

と表わされるような $\nabla J(u)$ が E の中に存在するであろう。もしも (3) のような $\nabla J(u)$ が存在すれば，それを gradient of J at u と呼ぶことにする。

§3. 最適のための必要条件

S を R^n の（measurable）な s 次元 compact domain とする。E を S で定義された実の連続関数の全体から成る線形ベクトル空間とする。E の任意の元 u, v に対して内積

$$(u, v) = \int_S u(x)v(x)dx \tag{4}$$

と定義する。この結果，E は pre-Hilbert 空間となる。

いま，f を R^1 で定義された連続な微係数を持つ実連続関数とする。そうすると，このような f に対して $u \in E$ ならば $f(u) \in E$ となり，f は E から E への mapping とも解釈される。つぎに，§1 で述べた convex cone をここでは

$$K = \{u : \ u(x) \geqq 0 \quad \text{for all } x \in S\}$$

と定義しよう。また，E 自身はすべての $y \in E$ で finitely open になっているので §1 の D として E 自身を考える。こうして，つぎの問題を考えよう。

問題2. constraint $C(f) = \{u : f(u(x)) \geqq 0\}$ のもと

で $J(u)$ の relative minimum を与える連続関数 u を見つけよ。

このような問題に対してつぎの定理が成立する。

定理1. ある $u \in E \cap C(f)$ が J の relative minimum を与えたものとする。そして $f(t)=0$ なる点 t で $f'(t) \neq 0$ と仮定する。そのとき, $\nabla J(u)$ が u におけるある finitely open set のすべての v に対して存在しかつ finitely continuous ならば, 関係式

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla J(u) - f'(u)v = 0, & \\ v f(u) = 0, & v \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

を満足する $v \in E$ が存在する。

(証明) まず, $f(u(x)) > 0$ なる点 x では $\nabla J(u)(x) = 0$ であることを証明しよう。そのために, ある $x^0 \in S$ で

$$f(u(x^0)) = c_1 > 0 \quad \text{かつ} \quad \nabla J(u)(x^0) = c_2 > 0$$

となったと仮定する。そうすると, f と ∇J が連続関数であることから, つぎの条件を満足する S における x^0 のある近傍 $N_1(x^0)$ が存在する。

a) $f(u(x)) \geq c_1 - \delta_1 > 0 \quad$ for $x \in N_1(x^0)$,

b) $\nabla J(u)(x) \geq c_2 - \delta_2 > 0 \quad$ for $x \in N_1(x^0)$.

そこで，$N_1(x^0)$ に含まれかつ $N_1(x^0)^c$ と $\overline{N_2(x^0)}$ が共通点を持たないような近傍 $N_2(x^0)$ をとってくると，つぎの条件を満足する連続関数 $h(x)$ が Urysohn の定理より存在する．

c) $\quad h(x) \geq 0 \quad$ for $\; x \in S$,

d) $\quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \overline{N_2}(x^0) , \\ 0 & \text{for } x \in N_1(x^0)^c . \end{cases}$

その結果，

$$(\nabla J(u),\ h) \geq \int_{N_2(x^0)} (c_1 - \delta_1)\, dx = \delta_3 > 0 .$$

したがって，$\nabla J(u)$ の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta_4 > 0$ が存在し，$|t| \leq \delta_4$ ならば

$$\delta_3 - \varepsilon \leq \frac{J(u+th) - J(u)}{t} \leq \delta_3 + \varepsilon$$

となる。一方，$f(u)$ の連続性からつぎのような $\delta_5 > 0$ が存在する。

$$f(u+th) \geq 0 \qquad \text{for} \quad |t| \leq \delta_5 .$$

したがって，ε を δ_3 より小さくとり，$0 < -t \leq \min(\delta_4, \delta_5)$ とすると $J(u+th) < J(u)$ となり，$J(u)$ が $C(f)$ で relative minimum であることに反する。また，

$$f(u(x^0)) = c_1 > 0 \quad \text{かつ} \quad \nabla J(u)(x^0) < 0$$

の場合も同様である。一方，$f(t)=0$ なる点では $f'(t) \neq 0$ であるから，こうして $\nabla J(u) - v f'(u) = 0$ を満足する連続関数 $v(x)$ の存在が証明された。つぎに $v \geq 0$ であることを示そう。いま，ある x^0 で $v(x^0) = -c_1 < 0$ となったと仮定する。前に述べたことから $f(u(x^0))=0$ でかつ $f'(u(x^0)) \neq 0$ である。いま $f'(u(x^0)) = c_2 > 0$ としよう。前と同じように，つぎの条件を満足する近傍 $N_1(x^0)$, $N_2(x^0)$ と連続関数 $h(x)$ が存在する。

e) $\quad N_1(x^0)^c \cap \overline{N_2}(x^0) = \phi$,

f) $\quad v(x) \leq -c_1 + \delta_1 < 0$, $\ f'(u(x)) \geq c_2 - \delta_2 > 0$

$$\text{for all} \quad x \in N_1(x^0),$$

g) $\quad h(x) \geq 0$, かつ $\ h(x) = \begin{cases} 0 & x \in N_1(x^0)^c, \\ 1 & x \in \overline{N_2}(x^0). \end{cases}$

そこで $f'(u)$ の連続性から充分小さい $\delta_3 > 0$ に対して

$$f(u + th) \geq 0 \qquad \text{for } 0 < t \leq \delta_3 .$$

こうして

$$(\nabla J(u),\ h) = (v f'(u),\ h) \leq \int_{N_2(x^0)} (-c_1 + \delta_2)(c_2 - \delta_2)\,dx$$

$$= -\delta_4 < 0$$

したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_5 > 0$ が存在し

$$J(u + th) - J(u) \leq t(-\delta_4 + \varepsilon) \quad \text{for } 0 < t \leq \delta_5 .$$

ε を δ_4 よりも小さくとれば $J(u+th) < J(u)$ となり矛盾。なお，$f'(u(x^0)) < 0$ の場合も同様である。

Q.E.D.

§4. 放物形の偏微分方程式で表わされる系に対する最適問題

さて，D を R^n の有界な open domain，∂D は D の境界としよう。また，$\Omega = (0, T] \times D$，$S = (0, T] \times \partial D$ と表わし，それぞれ closure を $\bar{\Omega}$，$\bar{S}$ と表わす。そこで $\varphi(t, x)$ に関する方程式

$$L\varphi + g(t, x, \nabla_x \varphi, \varphi) = 0 \qquad (t, x) \in \Omega \qquad (6)$$

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t} \qquad (7)$$

と第2種の境界条件

$$
\begin{cases}
\varphi(0,x) = \varphi^0(x) & x \in D, \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \beta(t,x)\varphi = u(t,x) & (t,x) \in S
\end{cases}
\qquad (8)
$$

で表わされる系を考えよう。ここに $\nabla_x \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, νは∂Dにおける内向きのconormalである。また，(6)，(7)，(8)に関してつぎのような仮定をしておく*)。

仮定1.

a) a_{ij}は$\bar{\Omega}$で連続かつ行列(a_{ij})は$\bar{\Omega}$で正定値。また$\partial a_{ij}/\partial x_k$, $\partial^2 a_{ij}/\partial x_p \partial x_k$は各々$\bar{\Omega}$で存在しかつ連続とする。

b) gはtに関して連続でかつ他の変数について少くとも2回までの偏導関数が存在して連続とする。

c) $\varphi^0(x)$, $\beta(t,x)$は各変数に関して連続。また$\beta \leq 0$.

(8)の$u(t,x)$は制御関数であるが，ここでは許容制御関数のクラスとして

d) $u(t,x)$は$\bar{S}$で連続，$f(u(t,x)) \geq 0$

---

*) ここでは，簡単のために，以下の議論において必要な程度の解の存在，一意性，連続性などが成立するように，仮定1ほかに∂Dなどのある条件が満足されているものとする。

を満足するもの $C(f)$ で考える。ここに関数 f は

仮定 2. $f(t)$ は連続。$f'(t)$ も存在しかつ連続。しかも $f(t)=0$ の点で $f'(t)\neq 0$ とする。

を満足しているものとする。

そこでつぎのような問題を考えよう。

問題 3. $C(f)$ に属する u の中でつぎの汎関数

$$J(u)=\frac{1}{2}\Big[\int_0^T\int_D P(t,x)\,\varphi^2(t,x;u)\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\int_{\partial D} Q(t,x)\,u^2(t,x)\,dx\,dt+\int_D R(x)\,\varphi^2(T,x;u)\,dx\Big] \quad (9)$$

の relative minimum を与えるものを選べ。ここに $\varphi(t,x;u)$ は $u(t,x)$ が与えられたときの境界条件 (P) を満足する (6) の解である。また，P, Q, R は正値をとる連続関数である。

§5. 最適制御の満たすべき方程式

前節の問題3に対して定理1の (5) に相当する方程式を導こう。そのためにまず $\delta J(u;h)$ を計算する。

h を $\bar{S}$ で定義された連続関数とする。簡単な計算から

$$\delta J(u;h)=\left(\delta\varphi(u;h),\ P\varphi(u)\right)_{\Omega}$$

$$+(Qu, h)_S + (\delta\varphi_T(u;h), R\varphi_T(u))_D \tag{10}$$

が導かれる。ここに $\varphi(u) \equiv \varphi(t, x; u)$ と略記し，特に時刻 t を明記する必要があるときには $\varphi_t(u) \equiv \varphi(t, x; u)$ と表わすことに約束する。また，カッコ記号（内積）の suffix はそれぞれの積分領域を表わす。

一方，$\delta\varphi(u;h)$ は慎重に吟味していけばつぎの方程式

$$L\delta\varphi(u;h) = -\lim_{|s|\to 0} \frac{g(t, x, \nabla_x\varphi(u+sh), \varphi(u+sh)) - g(t, x, \nabla_x\varphi(u), \varphi(u))}{s}$$

$$= -\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(u)\frac{\partial\delta\varphi(u;h)}{\partial x_i} + c(u)\,\delta\varphi(u;h)\right] \quad (t,x)\in\Omega \tag{11}$$

と境界条件

$$\begin{cases} \delta\varphi_0(u;h) = 0 & x\in D, \\ \dfrac{\partial\delta\varphi(u;h)}{\partial\nu} + \beta(t,x)\,\delta\varphi(u;h) = h & (t,x)\in S \end{cases} \tag{12}$$

を満足していることが判る。ここに

$$b_i(u) = \frac{\partial g(t, x, \nabla_x\varphi, \varphi)}{\partial[\partial\varphi/\partial x_i]}, \quad c(u) = \frac{\partial g(t, x, \nabla_x\varphi, \varphi)}{\partial\varphi} \tag{13}$$

である。そこで新たに operator $\bar{L}$ を

$$\bar{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(u)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(u) - \frac{\partial}{\partial t} \qquad (14)$$

と定義しよう。そして $\bar{L}$ の adjoint operator を $\bar{L}^*$ とする。そうすると Green's identity

$$\psi \bar{L}\eta - \eta \bar{L}^*\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\psi a_{ij}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \eta a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \eta\psi\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\Big) + b_i\psi\eta\Big] - \frac{\partial}{\partial t}(\psi\eta) \qquad (15)$$

が成立する。

さて，いま ψ は方程式

$$\bar{L}^*\psi = -P(t,x)\varphi(t,x;u) \qquad (t,x)\in\Omega \qquad (16)$$

と境界条件

$$\begin{cases} \psi(T,x) = R(x)\varphi(T,x;u) & x\in D, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} + (\beta+\alpha)\psi = 0 & (t,x)\in S \end{cases} \qquad (17)$$

を満足する解としよう。ここに α はあとで定める（(20) を参照）。(15) において $\eta = \delta\varphi(u;h)$ とすると $\bar{L}\eta = 0$ であるから，(10) と (15) より

$$\delta J(u;h)=\int_0^T\int_D\Big\{\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\sum_{j=1}^n\Big(\chi a_{ij}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}-\eta a_{ij}\frac{\partial\chi}{\partial x_j}-\eta\chi\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\Big)$$

$$+b_i\chi\eta\Big]-\frac{\partial}{\partial t}(\chi\eta)\Big\}\,dt\,dx$$

$$+\int_0^T\int_{\partial D}Quh\,dx\,dt+\int_D\eta(T,x)R\varphi_T(u)\,dx \qquad (18)$$

となる。そこで，(17)の第1の条件とconormal νの定義から，(18)は

$$\delta J(u;h)=\int_0^T\int_{\partial D}\Big(Quh+\chi\frac{\partial\eta}{\partial\nu}-\eta\frac{\partial\chi}{\partial\nu}-\alpha\eta\chi\Big)dx\,dt \qquad (19)$$

となる。ここに α は

$$\alpha=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}-b_i\Big)\cos\theta_i \qquad (20)$$

であり，θ_i は ∂D における内向きのnormalと x_i 方向との角度である。

(19)に(12)を代入すると，結局，(17)より

$$\delta J(u;h)=\int_0^T\int_{\partial D}(Qu+\chi)h\,dx\,dt \qquad (21)$$

が得られる。

こうしてつぎの定理が得られた。

<u>定理2.</u>　$u \in C(f)$ は (9) で定義された $J(u)$ の relative minimum を与えているとする。そのとき，つぎの方程式を満足する連続関数 $v(t,x)$ が存在する。

$$\begin{cases} Qu+\chi-vf'(u)=0, \\ \quad vf(u)=0, \qquad v\geq 0. \end{cases} \tag{22}$$

ここに χ は (17) を満足する (16) の解である。

<u>注意1.</u>　$f(t)$ が，たとえば $f(t)=1-t^2$ のように，concave 関数であれば，$-\frac{1}{2}Qu^2-\chi u$ も concave 関数であるから，(22) が成立するための必要十分条件は

<u>（最大原理）</u>　最適制御 u は $f(u)\geq 0$ のもとで

$$H(t,x,u,\chi)=-\frac{1}{2}Qu^2-\chi u \tag{23}$$

を最大にしている。

と等価である（Kuhn-Tucker の定理[5] を参照）。

§6.　非線形の境界条件の場合

この節では，(8) の第2の境界条件が

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=k(t,x,\varphi,u) \qquad (t,x)\in S \tag{8'}$$

と与えられた場合の問題3を検討してみよう。ただし，kについて つぎの仮定を設ける。

仮定3.

a) $k(t,x,\varphi,u)$は各変数について連続で，φ, uに関しては連続な偏導関数が存在する。

b) $\partial k/\partial\varphi > 0$, $\partial k/\partial u < 0$, かつ$(t,x)$に関して一様に $u \longrightarrow \pm\infty$ のとき $k \longrightarrow \mp\infty$.

c) もし $u=\varphi$ ならば $g(t,x,\varphi,u)=0$.

なお，b)とc)はNewton's law of coolingから来ていることに注意しておこう。

このとき，(12)の第2式は

$$\frac{\partial \delta\varphi(u;h)}{\partial\nu} = -\beta\,\delta\varphi(u;h) + \gamma h \qquad (12)'$$

となる。ここにβ, γは

$$-\beta = \frac{\partial k(t,x,\varphi(u),u)}{\partial\varphi}, \quad \gamma = \frac{\partial k(t,x,\varphi,u)}{\partial u} \qquad (24)$$

である。(17)式はβを新たに(24)で定義されたβと考えれば変らず，結局，(21)は

$$\delta J(u;h) = \int_0^T\int_{\partial D} (Qu + \gamma\chi)\,h\,dx\,dt \qquad (25)$$

となり，つぎの定理が成立する。

定理3. 定理2において(8)の第2式を(8)′で置きかえてあとは定理2と同じ仮定をする。そのとき，つぎの方程式を満足する連続関数 $v(t,x)$ が存在する。

$$\begin{cases} Qu + \dfrac{\partial k}{\partial u}\psi - vf'(u) = 0, \\ vf(u) = 0, \qquad v \geq 0. \end{cases} \tag{26}$$

もしも k が u に関して convex であれば つぎの最大原理が成立する。
かつ f が concave

(最大原理) 最適制御 u は $f(u) \geq 0$ のもとで

$$H(t,x,\varphi,u) = -\frac{1}{2}Qu^2 - \psi k$$

を最大にしている。

§7. 結言

この論文では，不等式で表わされるような制限条件がある場合の最適制御問題を連続関数の作る pre-Hilbert 空間で検討し，最適制御関数が一般化された Kuhn-Tucker の gradient 方程式を満足しなければならないことを導いた。ついで，この結果を放物形の偏微分方程式で表わされる系に

ついて，特に第２種の境界条件のもとで制御される場合について，最適制御の満足すべき必要条件を導いた。そして，この条件はある場合には最大原理と一致することを示した。

放物形の偏微分方程式で表わされる系について第１種の境界条件のもとで制御する問題に関しては，ここで述べた方法と全く同様にして，同じような結論が得られることに注意しておこう。

なお，ここでは連続関数から成る pre-Hilbert 空間で最適問題を検討したが，汎関数の形如何によっては区分的連続な関数から成る pre-Hilbert 空間で問題を考察しなければならないことが起ってくる。しかし，この場合でも定理１は少し修正しさえすれば同じように成立するだろう。

不等式で表わされる制限条件の他にさらに等式で表わされる制限条件が加わった問題については，普通の非線形計画法と異って，関数空間の場合著者の知る限りほとんど検討されていないようである。しかし，特に，系が線形でかつ汎関数が convex であり，また等式で表わされる制限条件を満足する制御関数が線形部分空間（一般には convex set ぐらいの条件で十分である）を成している場合，Hurwicz[6] によって Lagrange の乗数法則に関する saddle point theorem が成立するので，Blum[4] の方法によってやはり（５）のよ

うな gradient 方程式が成立しなければならないことが判る。これらのことについてはまた別の機会に発表したい。

終りにあたって，いつも御指導と御激励をたまわっている南雲仁一先生に感謝します。

参考文献

1) A. I. Egorov, "Optimal processes in distributed parameter systems and certain problems in invariance theory", J. SIAM Control, Vol. 4 No. 4, pp. 601–661, 1966.

2) А. Г. Бутковский, "Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами", издательство «НАУКА», МОСКВА, 1965.

3) Y. Sakawa, "Optimal control of a certain type of linear distributed-parameter systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-11, No. 1, pp. 35–41, 1966.

4) E. K. Blum, "Minimization of functionals with equality constraints", J. SIAM Control, Vol. 3

No. 2, pp. 299-316, 1965.

5) H. W. Kuhn and A. W. Tucker, "Non-linear programming", Proc. of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, USA, 1951.

6) L. Hurwicz, "Programming in linear spaces", in K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa, Studies in Linear and Non-linear Programming, Stanford University Press, pp. 38-102, 1958.