数理解析研究所講究録
第34巻 1967年 13-26



# 微分方程式の線型二段数値解法における切捨誤差の集積について

東京理科大学　清水辰次郎

## §1、線型二段数値解法

四捨五入誤差の数値解析における役割は重要なるにもかゝわらず正確にこれを評価することはできない。ここではそれらの誤差の影響を或程度確実にとらえようとするものである。

与えられた常微分方程式を

$$y' = f(x, y)$$

とし，$f(x,y)$ は或適当な条件を満足するものとする。

線型二段数値解法

$$(1) \qquad y_{n+2} = a y_{n+1} + b y_n + h(c f_{n+1} + d f_n)$$

により計算される値 $y_n$ について方程式の解 $y(x)$（初期値 $x=0$, $y(0)=y_0$, 刻み巾 $h$, $x_n = nh = \bar{x}$）が $\bar{x}$ まで存在するとき $y_0$ および $f$ が何であっても

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}} y_n = y(\bar{x})$$

が成立するならばその解法は "convergent" であるという。

Dahlquist は更に強い制限を $f$ に与えて，$y'=f(x,y)$ に対して $y_n$ が収束する，すなわち解法が convergent であるための必要十分な条件を与えたが（1）がその条件を満足するとき最も一般な形は次のようになる．

$$(2) \qquad y_{n+2}=(1+\alpha)y_{n+1}-\alpha y_n+h\left(\beta f_{n+1}+(1-\alpha-\beta)f_n\right)$$ [1)]

ここで $-\infty<\beta<\infty$，$-1\leqq\alpha<1$．

## §2. 方程式 $y'=-y$ に適用．

解法（2）を $y(0)=y_0$，$x=h$ の値 $y(h)=y_1$ として $y'=-y$ へ適用すると

$$(3) \qquad y_{n+2}=(1+\alpha)y_{n+1}-\alpha y_n-h\left(\beta y_{n+1}+(1-\alpha-\beta)y_n\right)$$

（3）を常数係数線型定差方程式とみると $\lambda$ の二次方程式の二根 $\lambda_1,\lambda_2$ が重要な役割をする．

$$\lambda^2-(1+\alpha-h\beta)\lambda+\alpha+h(1-\alpha-\beta)=0$$

与えられた $\alpha,\beta$ に対し $h$ を十分小さくえらび $h^2$ の項が省略できる位とすれば

$$\lambda \fallingdotseq \frac{1}{2}\left\{(1+\alpha-h\beta)\pm\left[(1-\alpha)+h(\beta-2)\right]\right\}$$

---

1) ここに述べた解法は open 型のものであるが，closed 型の場合も $y_{n+2}=ay_{n+1}+by_n+h(ef_{n+2}+cf_{n+1}+df_n)$ を $y'=-y$ に適用したときは $y_{n+2}=\dfrac{1}{1+he}\left(ay_{n+1}+by_n-h(cy_{n+1}+dy_n)\right)$ となるから同様に論ずることができる．

ここで正符号の方を$\lambda_1$, 負符号の方を$\lambda_2$とすれば$h$は十分小さくとってあるから

$\lambda_1 > \lambda_2$

また $-1<\alpha<1$ ならば $\lambda_1 = 1-h$, $\lambda_2 = \alpha + h(1-\beta)$

よって $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$

なお $\lambda_1 > 0$, $\alpha > 0$ ならば $\lambda_2 > 0$, $\alpha < 0$ ならば $\lambda_2 < 0$,

$\alpha = 0$ のとき $1 > \beta$ ならば $\lambda_2 > 0$, $1 < \beta$ ならば $\lambda_2 < 0$.

$\alpha = -1$ ならば

$1 > \beta$ のとき $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$,

$1 > \beta \geqq 0$ ならば $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, $\beta < 0$ ならば $|\lambda_2| < |\lambda_1|$.

$1 \leqq \beta$ のとき $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| \geqq 1$, $|\lambda_2| \geqq |\lambda_1|$.

(3)の正確な計算値は定差方程式の解として

$$y_n = e_1 \lambda_1^n + e_2 \lambda_2^n$$

ここで $e_1 = \dfrac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $e_2 = \dfrac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$

よって $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ なるとき $n \to \infty$ にて $y_n \to 0$.

$\lambda_2 = -1$ のとき $y_n = e_1 \lambda_1^n + (-1)^n e_2$, $|\lambda_2| > 1$ のとき $y_n = e_1 \lambda_1^n + (-1)^n e_2 |\lambda_2|^n$ となって振動する

以上は理論値であって各値$y_0$, $y_1$に切捨誤差等のある場合またhが小であるため途中の計算で小数点以下の桁数が増大し,それらも切捨られるため誤差が混入する.

これらの誤差は後にみるごとく,例えば $c_1=1$, $c_2=+1$ とすれば,計算をやるごとに 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ……倍となるから数十回の計算でも著しく大きな値となり得る.

一方 $y'=-y$ の真の解は $x\to\infty$ にて $y\to 0$ と単調に減少する筈であるが,誤差集積の結果は真値との差は簡単にはわからない筈である.

註. 誤差について次のように呼ぶことにする. 小数点以下第 $m+1$ 桁以下切捨を計算毎に行うために生ずる誤差を切捨誤差, 第 $m$ 桁目の数字に 1 を加え第 $m+1$ 桁以下切捨を行うために生ずる誤差を切上誤差, 第 $m+1$ 桁目の数字が 5 以上のとき切上, 4 以下のとき切捨を行うため生ずる誤差を四捨五入誤差ということにする.(三者を総称して丸め誤差とよぼう)

## §3. 二段解法の分類.

(3) は次のように分類される.

$-1<\alpha<1$ の場合.

i) $\alpha>0$, $\quad y_{n+2}=c_1y_{n+1}-c_2y_n$, $\quad 2>c_1>0$, $1>c_2>0$

ii) $\alpha<0$, $\quad y_{n+2}=c_1y_{n+1}+c_2y_n$, $\quad 1>c_1>0$, $1>c_2>0$

iii) $\alpha=0$, $\beta<1$, $\quad y_{n+2}=c_1y_{n+1}-c_2y_n$ $\quad 1\gg c_2>0$, $1-h\beta>c_1>0$

iv) $\alpha=0$, $\beta>1$, $\quad y_{n+2}=c_1y_{n+1}+c_2y_n$ $\quad 1\gg c_2>0$ $\quad 1>c_1>0$

$\alpha=-1$ の場合

| | | | |
|---|---|---|---|
| v) $\beta<0$ | $y_{n+2}=c_1y_{n+1}+c_2y_n$ | $1\gg c_1>0,\ 1>c_2>0$ | |
| vi) $0<\beta<1$ | $y_{n+2}=c_1y_n-c_2y_{n+1}$ | $1\gg c_2>0,\ 1>c_1>0$ | |
| vii) $1<\beta<2$ | $y_{n+2}=c_1y_n-c_2y_{n+1}$ | $1\gg c_2>0,\ 1>c_1>0$ | |
| viii) $2\leq\beta$ | $y_{n+2}=c_1y_n-c_2y_{n+1}$ | $1+h\beta>c_1>0,\ 1\gg c_2>0$ | |
| ix) $\beta=0$ | $y_{n+2}=(1-2h)y_n$ | (Euler法) | |

以上のことから次のようなことがわかる.

イ) i)—vii) の場合 理論値は $y_n\to0$ そして $y_n$ の切捨られた値を $\bar{y}_n$ とすれば $y_n>0$ なら $y_n>\bar{y}_n$, $y_n<0$ なら $y_n<\bar{y}_n$ であるから同じく $\bar{y}_n\to0$.

i) iii) の場合は ($\lambda_1>\lambda_2>0$) もし初期値出発値が $\lambda_1>\frac{y_1}{y_0}>\lambda_2$ ならば $y_n=\frac{y_1-\lambda_2y_0}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^n+\frac{\lambda_1y_0-y_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^n$ からわかるように $y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$ は単調減少で $y_n<0$ とはなることはない。
さて実際に解法式(3)を用いて計算した場合誤差が入るから,すぐにはそうとはわからない. ここでは切捨誤差のみの場合について考えよう. 計算値を $\hat{y}_n$ とする. (但し計算機による計算は各項 $m$ 桁まで計算し,掛算,割算は $2m$ 桁まで計算して $m$ 桁(いずれも小数点以下の話)までに切捨るものとする) $y_{n+2}=c_1y_{n+1}\pm c_2y_n$ にて $n=0,1,\cdots$ を考えれば明らかなように $\hat{y}_2$ と $y_2$ とは $m$ 桁まで一致し, $\hat{y}_n$ と $y_n$ とも

同様である。よって $y_n > y_{n+1}$ ならば $\hat{y}_n \geqq \hat{y}_{n+1}$、よって $\overline{y}_n \to 0$ ならば $\hat{y}_n \to 0$ である。

i, iii) の場合　$\lambda_1 > \frac{y_1}{y_0} > \lambda_2$ ならば $\hat{y}_n$ も単調減少である。

ii) iv) の場合　$y_0 > y_1 > 0$, $y_2 > 0$ ならば $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ から $\overline{y}_n < 0$ となることはなく、もし $y_2 < y_1$ ならば単調減少である。何故ならば $y_{n+2} - y_{n+1} = c_1(y_{n+1} - y_n) + c_2(y_n - y_{n-1}) < 0$ であるからである。

ロ) vii) viii) の場合、$|\lambda_2| > 1$ であるから $n \to \infty$ に対して $y_n$ は絶対値が無限に増大する正、負の振動をする筈である。しかし切捨誤差のため必らずしもそうとは限らない。例えば $h=0.1$, $\beta=1.1$, $\alpha=-\beta$ のとき $y_{n+2} = 0.91 y_n - 0.11 y_{n+1}$, ここで $y_0 = 1$, $y_1 = 0.8976$ とすれば $e_1 = 0.9985$, $e_2 = 0.0015$. $e_2$ が小さいときは計算桁数を少なくとれば $y_n \to 0$ となる。桁数を多くとって計算すれば勿論 $y_n$ は振動する。この場合 $\lambda_1 = 0.9005$, $\lambda_2 = -1.0105$ で小数点以下三桁だけとって計算すれば $|e_2 \lambda_2^n|$ が三桁目に迄の影響を与えるのには100回目位かゝるが、50回目位の計算で $y_{50}$ が零に近くなってしまうためである。四桁計算をすれば $y_n$ は遂には大きな振動をする。

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 二桁計算 | $y_1 = 0.89$ | 三桁計算 | $y_1 = 0.897$ | 四桁計算 | $y_1 = 0.8976$ | $y_{70} = 0.0108$ |
| | $y_{30} = 0.07$ | | $y_{40} = 0.021$ | | $y_{44} = 0.0197$ | $y_{71} = -0.0097$ |
| | | | | | $y_{45} = -0.0003$ | $y_{81} = -0.0104$ |
| | $y_{35} = 0.00$ | | $y_{70} = 0.000$ | | $y_{46} = 0.0179$ | $y_{82} = 0.0110$ |

ハ) vii) viii) に属する方法なら同様であるが，例えば $y_{n+2}=y_n-2h\,y_{n+1}$ において $\lambda^2+2h\lambda-1=0$ の二根は $\lambda_1=\sqrt{1+h^2}-h$, $\lambda_2=-(\sqrt{1+h^2}+h)$.

$y_0=1$, $y_1=\lambda_1$ にとれば $e_2=0$. よって $y_n=e_1\lambda_1^n=\lambda_1^n$ となり振動しない筈であるが，$\lambda_1$ の値として例えば $0.618$ をとれば一般には無限に振動する．これは出発値を $\hat{e}_1+\hat{e}_2=1$, $\hat{e}_1\lambda_1+\hat{e}_2\lambda_2=0.618$ にえらんだことにあたり $y_n=\hat{e}_1\lambda_1^n+\hat{e}_2\lambda_2^n$ により $\hat{e}_2\neq 0$ のために振動がおこる．この場合二回目以下にて切捨を行わないとしての計算であって毎回切捨を行えば更に複雑になる（次§参照）二回目以下切捨を行わない例として $h=0.5$.

$y_2=1-0.618=0.382$, $y_3=0.618-0.382=0.236$, $\cdots\cdots$ $y_{10}=0.010$

$y_{11}=0.002$, $y_{12}=0.008$, $y_{13}=-0.006$, $y_{14}=0.014$, $y_{15}=-0.020$ $\cdots$

ニ) vii) viii) では減法なことが特徴であるがもし $0<c_1\leqq 1$ ならば $y_0$, $y_1$ を正にとるとき $m$ 桁までの切捨計算をするとする，$n$ が増せば減法のため $y_n$ は減少し遂には $m$ 桁まで零となる．その番号を $n_1$ とする，$n_1-1$ 番目は正であるから $n_1+1$ 番目または $n_1+2$ 番目は負となる．（$h$ が小なときは $m$ 桁まで零となってしまうこともある）．よってそこから先は零であるか，又は正，負の振動をはじめる（尤も $m$ 桁まで零となる前に単調減少性が破れて一つおきに単調減少することになり負数が現われて振動することもある）．

上の場合正負交互に現われてからは絶対値が無限に増大するか,或は極大に達し後減少して零に近づくかはこれだけではわからない.

この現象はいかほど桁数を多くとっても一定桁数の切捨計算では必らずおこる. そして又いかほど長くともそこまで単調減少性の破れぬ計算法もありうることは明らかである. ($y=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$ の式から $c_2$ を十分小さくなるようにすればいい).

## §4. 切捨(切上, 四捨五入)誤差集積の表現

§3 の計算法では $c_1y_n$, $c_2y_{n+1}$ のように乗算二回と加減算一回であるが $c_1, c_2, y_n$ を各 m 桁とするとき乗算,加減算~~毎~~に m 桁までに切捨てるのと,乗算を行い加減算を行ってから最后に m 桁までに切捨てるのとでは最后の桁の数字が1だけ異なることがあるので,以下では後者の方法によるものとする.

§3 に述べたように二段数値解法は $y_{n+2}=c_1y_{n+1}+c_2y_n$, $y_{n+2}=c_1y_{n+1}-c_2y_n$, $y_{n+2}=c_1y_n-c_2y_{n+1}$ の三つの型に限られる.

今 $y_n$ を定差方程式の真値, $t_n$ を切捨計算値, $Y_n$ を或桁以下切捨られた切捨値とすれば $\hat{y}_n-Y_n=t_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$

ここで $\hat{y}_n$ は n 回目の計算値.

1) $$y_{n+2}=c_1y_n-c_2y_{n+1}.$$

$$\hat{y}_2=c_1t_0-c_2t_1=c_1(y_0-Y_0)-c_2(y_1-Y_1)=y_2-c_1Y_0+c_2Y_1=t_1+Y_2$$

$\hat{y}_3 = c_1 t_1 - c_2 t_2 = y_3 + c_1 c_2 Y_0 - (c_1 + c_2^2) Y_1 + c_2 Y_2 = t_3 + Y_3$

$\hat{y}_4 = c_1 t_2 - c_2 t_3 = y_4 - c_1(c_1 + c_2^2) Y_0 + (2c_1 c_2 + c_2^3) Y_1 - (c_1 + c_2^2) Y_2 + c_2 Y_3 = t_4 + Y_4$

$\hat{y}_5 = c_1 t_3 - c_2 t_4 = y_5 + c_1(2c_1 c_2 + c_2^3) Y_0 - (c_1^2 + 3c_1 c_2^2 + c_2^4) Y_1 + (2c_1 c_2 + c_2^3) Y_2$
$\qquad - (c_1 + c_2^2) Y_3 + c_2 Y_4 = t_5 + Y_5$

- - - - - - - - - - - - - - -

これらの式から $\hat{y}_{k+1}$ における $Y_1, Y_2, \cdots\cdots Y_k$ （$Y_0$の係数を除き）の係数はその前の符号をも含めて、それらを夫々 $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \cdots\cdots \alpha_1$ とするとき（$\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = c_2$）

$$\alpha_{l+2} = c_1 \alpha_l - c_2 \alpha_{l+1} \qquad 1 \leqq l, \quad l+2 \leqq k.$$

これはまた $\hat{y}_l$ における $Y_i$ $(1 \leqq i < l)$ の係数を $\alpha_{l,i}$ とするとき

$$\alpha_{l+2,i} = c_1 \alpha_{l,i} - c_2 \alpha_{l+1,i} \qquad (\alpha_{l,i} \equiv \alpha_{l-i})$$

全く同じ算法で求められる.

$Y_0$の係数も $c_1$ を除けば上と同じ関係式で求められる.

次に $y_n$ を $y_0$, $y_1$ にて表わすと.

$y_2 = c_1 y_0 - c_2 y_1$

$y_3 = -c_1 c_2 y_0 + (c_1 + c_2^2) y_1$

$y_4 = c_1(c_1 + c_2^2) y_0 - (2c_1 c_2 + c_2^3) y_1$

$y_5 = -c_1(2c_1 c_2 + c_2^3) y_0 + (c_1^2 + 3c_1 c_2^2 + c_2^4) y_1$

- - - - - - - - - - - -

であるからこの係数も全く上の $\alpha_l$ と同じ規則に従うことがわかる.

一方 $y_n=e_1\lambda_1^n+e_2\lambda_2^n$ であって $e_1+e_2=y_0$, $e_1\lambda_1+e_2\lambda_2=y_1$ であるから $e_1$, $e_2$を解いて代入すると

$$y_n=\frac{-\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}\right)}{\lambda_1-\lambda_2}y_0+\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}y_1$$

1)の場合には $\lambda^2+c_2\lambda-c_1=0$ であるから $-c_1=\lambda_1\lambda_2$.

よって一般に
$$\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}=-\alpha_n$$

これによって切捨誤差 $Y_1, Y_2, \cdots$ のため $\hat{y}_n$ が $y_n$ からどれだけ異なるかの評価式が $Y_1, Y_2, \cdots$ と $\lambda_1, \lambda_2$ とにて完全に表わされることをみる.

2) $y_{n+2}=c_1y_{n+1}-c_2y_n$ 全く同様であるから計算だけを書く.

$$\hat{y}_2=y_2+c_2Y_0-c_1Y_1=t_2+Y_2$$
$$\hat{y}_3=y_3+c_1c_2Y_0-(c_1^2-c_2)Y_1-c_1Y_2=t_3+Y_3$$
$$\hat{y}_4=y_4+c_2(c_1^2-c_2)Y_0-(c_1^3-2c_1c_2)Y_1-(c_1^2-c_2)Y_2-c_1Y_3=t_4+Y_4$$
$$\hat{y}_5=y_5+c_2(c_1^3-2c_1c_2)Y_0-(c_1^4-3c_1^2c_2+c_2^2)Y_1-(c_1^3-2c_1c_2)Y_2$$
$$-(c_1^2-c_2)Y_3-c_1Y_4=t_5+Y_5$$

$$\alpha_{\ell+2}=c_1\alpha_{\ell+1}-c_2\alpha_\ell$$

$y_2=c_1y_1-c_2y_0$, $y_3=(c_1^2-c_2)y_1-c_1c_2y_0$, $y_4=(c_1^3-2c_1c_2)y_1-c_2(c_1^2-c_2)y_0$

$y_5=(c_1^4-3c_1^2c_2+c_2^2)y_1-c_2(c_1^3-2c_1c_2)y_0$

$\lambda^2-c_1\lambda+c_2=0$ であるから $\lambda_1\lambda_2=c_2$

一般に
$$\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}=-\alpha_n$$

3) $y_{n+2}=c_1y_n+c_2y_{n+1}$

$$\hat{y}_2=y_2-c_1Y_0-c_2Y_1=t_2+Y_2$$

$$\hat{y}_3=y_3-c_1c_2Y_0-(c_1+c_2^2)Y_1-c_2Y_2=t_3+Y_3$$

$$\hat{y}_4=y_4-c_1(c_1+c_2^2)Y_0-(2c_1c_2+c_2^3)Y_1-(c_1+c_2^2)Y_2-c_2Y_3=t_4+Y_4$$

$$\hat{y}_5=y_5-c_1(2c_1c_2+c_2^3)Y_0-(c_1^2+3c_1c_2^2+c_2^4)Y_1-(2c_1c_2+c_2^3)Y_2 -(c_1+c_2^2)Y_3-c_2Y_4=t_5+Y_5$$

$$\alpha_{l+2}=c_1\alpha_l+c_2\alpha_{l+1}$$

$y_2=c_1y_0+c_2y_1,\quad y_3=c_1c_2y_0+(c_1+c_2^2)y_1,\quad y_4=c_1(c_1+c_2^2)y_0+(2c_1c_2+c_2^3)y_1,$

$y_5=c_1(2c_1c_2+c_2^3)y_0+(c_1^2+3c_1c_2^2+c_2^4)y_1,$

$\lambda^2-c_2\lambda-c_1=0$ であるから $-c_1=\lambda_1\lambda_2$

一般に
$$\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}=-\alpha_n$$

以上の三つの場合は $y_{n+2}=c_1'y_n+c_2'y_{n+1}$ として $c_1', c_2'$ に正負を考えることにすれば一つの式で表わせるが実際には別々に考える方がわかり易い。

以上の公式は切捨誤差として論じてきたが，切上誤差，四捨五入誤差の公式をも表わしている。

$\hat{y}_n$ = 整数部 + 小数部 と表わすとき 小数部 $=0.p_1p_2\cdots p_mp_{m+1}\cdots\cdots$ と表わすとき $S_m=0.p_1\cdots p_m$, $Y_m=0.\overbrace{0\cdots0}^{m}p_{m+1}p_{m+2}\cdots\cdots$

切捨誤差としては $\hat{y}_m>0$ ならば $Y_m>0$, $\hat{y}_m<0$ ならば $Y_m<0$ $t_n$ = 整数部 + $S_m$ となる。

切上誤差としては $s_n=0.p_1p_2\cdots p_{m-1}(p_m+1)$, $Y_n=0.\overbrace{0\cdots0}^{m}p_{m+1}\cdots\cdots-0.\overbrace{0\cdots0}^{m-1}1$ として $\hat{y}_n>0$ ならば $Y_n<0$, $\hat{y}_n<0$ ならば $Y_n>0$

四捨五入誤差としては $0\leqq p_{m+1}<5$ ならば $s_n=0.p_1\cdots\cdots p_m$, $Y_n=0.\overbrace{0\cdots0}^{m}p_{m+1}\cdots\cdots$, $9\geqq p_{m+1}\geqq5$ ならば $s_n=0.p_1\cdots p_{m-1}(p_m+1)$, $Y_n=0.\overbrace{0\cdots0}^{m}p_{m+1}\cdots\cdots-0.\overbrace{0\cdots0}^{m-1}1$

$t_n=$ 整数部 $+s_n$, $Y_n$ を上の公式に代入すれば三つの場合に全く同じ関係式が成立する

## §5 或場合における丸め誤差の正確な評価.

vii) viii) の場合 $h$ を一定にして計算をつづければ遂には正負の間を無限に振動をはじめる. これは公式 $y_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$, $c_2\neq0$ による $\lambda_2^n$ に原因する筈であるが, 一方切捨誤差も例えば $c_1=c_2=1$ とすれば §4 から明らかなように 1, 1, 2, 3, 5, .., 144 倍とすみやかに増大する(実際数値計算をやってみてもわかる).

上記の振動はいずれの原因によるものかを詳しく考えよう.

§4 の理論をつかって $\hat{y}_n$ (計算値)と定差方程式の真値 $y_n$ とを比較すれば

$$\hat{y}_n=y_n+\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1-\lambda_2}Y_0-\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}Y_1-\frac{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1-\lambda_2}Y_2-\cdots\cdots-\frac{\lambda_1^{n-i}-\lambda_2^{n-i}}{\lambda_1-\lambda_2}Y_{i+1}$$
$$-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{\lambda_1-\lambda_2}Y_{n-1}$$

$|\lambda_1|<1$ であるから, $\lambda_1$ に関する巾級数は $h$ を一定とすれば収束する

よって $\lambda_2$ の方のみを考えると

$$\frac{\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\lambda_1 y_0 - y_1 - \lambda_1 Y_0 + Y_1 + \frac{Y_2}{\lambda_2} + \frac{Y_3}{\lambda_2^2} + \cdots\cdots + \frac{Y_{n-1}}{\lambda_2^{n-2}}\right\}$$

$h$ が小さな値ならば各計算毎に小数点 $m$ 桁以下の切捨は毎回必らずおこるから $Y_1, Y_2, \cdots Y_{n-1}$ は殆んどすべて第 $m+1$ 位からはじまる小数である.

よって $h$ を一定にするとせば $\lambda_1 y_0 - y_1$ すなわち定差方程式の解よりおこる大きな振動と,切捨誤差の集積からおこる大きな振動との混在するものであることがわかる。しかも $h$ を漸次零に向って減少させれば $\lambda_2 \to 1$ であることから切捨誤差の集積による影響の方が大きくなる筈である.

§6 誤差公式の一般化.

二段数値解法(2)を線型方程式 $y' = f_1(x)y + f_2(x)$ へ適用するときは線型定差方程式 $y_{n+2} = g_1(n)y_n + g_2(n)y_{n+1}$ の二つの独立な解 $y_1(n), y_2(n)$ をとれば§4において $\lambda_1^n, \lambda_2^n$ の代りに $y_1, y_2$ を使うことにより同様な関係式が得られる.

また,線型三段,四段数値解法についても前§,§と同様な論法は適用できる.

ここでは二段解法(2)を一般の微分方程式 $y' = f(x, y)$ へ適用した式を掲げておこう

$t_0 + Y_0 = y_0, \quad t_1 + Y_1 = y_1, \quad f_1 = f(x_1, y_1), \quad \hat{f}_1 = f(x_1, t_1),$

更らに $f(x,y)$ を $x, y$ の有理演算にて近似した式を $R(x, y)$ とし

$E(x,y)$ を truncation error とする. ただし $E_n = E(x_n, y_n) = E(x_n, t_n)$ と簡単のためおく. $\hat{f}_n = f(x_n, t_n) = R(x_n, t_n) + E_n$ であって

$$f(x,y) = R(x,y) + E(x,y)$$

から順次計算を行うと

$$\hat{f}_1 = f(x_1,t_1) = R(x_1,t_1)+E_1 = R(x_1,y_1) - Y_1\frac{\partial R}{\partial y} + E_1$$

$$= f_1 - S_1 = \pi_1 + \Pi_1$$ とおく. ($c_1, c_2$ は正又は負とする)

$$\hat{y}_2 = c_1 t_0 + c_2\pi_1 = c_1(y_0 - Y_0) + c_2(f_1 - S_1 - \Pi_1)$$

$$= c_1 y_0 + c_2 f_1 - c_1 Y_0 - c_2 S_1 - c_2\Pi_1 = y_2 - (c_1 Y_0 + c_2(S_1+\Pi_1)) = t_2 + Y_2$$

$$\hat{y}_3 = c_1 t_1 + c_2\pi_2 = c_1(y_1 - Y_1) + c_2\pi_2$$

$$\hat{f}_2 = f(x_2,t_2) = R(x_2,t_2)+E_2 = E_2 + R(x_2, y_2 - (c_1Y_0 + c_2(S_1+\Pi_1) + Y_2))$$

$$c_1Y_0 + c_2(S_1+\Pi_1) + Y_2 \equiv Z_2$$

$$\hat{f}_2 = E_2 + R(x_2, y_2 - Z_2) = E_2 + R(x_2,y_2) - S_2 = f_2 - S_2 = \pi_2 + \Pi_2$$

$$\hat{y}_3 = c_1(y_1 - Y_1) + c_2(f_2 - S_2 - \Pi_2) = y_3 - (c_1Y_1 + c_2(S_2+\Pi_2)) = t_3 + Y_3$$

$$c_1Y_1 + c_2(S_2+\Pi_2) + Y_3 \equiv Z_3$$

$$\hat{f}_3 = R(x_3,t_3)+E_3 = E_3 + R(x_3, y_3 - (c_1Y_1 + c_2(S_2+\Pi_2)+Y_3))$$

$$= E_3 + R(x_3,y_3) - S_3 = f_3 - S_3 = \pi_3 + \Pi_3$$

$$\hat{y}_4 = c_1(\hat{y}_2 - Y_2) + c_2\pi_3 = c_1(y_2 - (Z_2 - Y_2) - Y_2) + c_2\pi_3 = c_1(y_2 - Z_2) + c_2\pi_3$$

ただし $t_2 + Y_2 = \hat{y}_2$.

$$\hat{y}_4 = c_1(y_2 - Z_2) + c_2(f_3 - S_3 - \Pi_3) = y_4 - (c_1Z_2 + c_2(S_3+\Pi_3)) = t_4 + Y_4$$

以下同様にして

$$\hat{y}_5 = y_5 - (c_1Z_3 + c_2(S_4+\Pi_4)) = t_5 + Y_5$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

(14)