数理解析研究所講究録
第 35 巻 1967 年 1-17

最大値原理と半群の生成

東大 理　　吉田耕作

序. Xを可分で局所コンパクトかつコンパクトでないHausdorff空間とし, Xにおいてcompact supportの実数値連続函数の空間を$C_0(X)$, maximum-normによる$C_0(X)$のcompletionをBとする. G. A. Hunt [1]は, $C_0(X)$からBの中へのpositive linear operator Vがつぎの条件を満足するときに, Vをpotentialオペレーターと名づけた:

(α) $f\in C_0(X)^+$, $g\in C_0(X)^+$なるときは, 不等式$Vf\leqq Vg$は, 若しこの不等式がfのsupportで成立てば, 成立つ. ——以下Bの部分集合Mについて, M^+はMの非負な函数の全体を示す.

(β) 函数列$\{h_n\}\subseteqq C_0(X)^+$が存在して, $n\uparrow\infty$なるとき各$x\in X$で$(Vh_n)(x)\uparrow 1$.

(γ) Vのrange $R(V)$はBで稠密である.

Hunt [1]では, (α)−(γ)の条件のもとに, BからBの中へのpositive linear operatorの作る(C_0)型の半群

$\{T_t ; t \geq 0\}$ で $\|T_t\| \leq 1$ かつ

(1) $\quad Vf = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f \, dt, \quad f \in C_0(X),$

を満足するものが unique に定まることを示した。

Hunt の論文は簡潔にかつとくに確率論的に書いてあって，その証明は必らずしもわかりよくはない。事柄が analysis の問題であるので，作用素論的な取扱いをすることが出来ないかを考へてみることにも意義があると思われる。

このような考へで短期共同研究をしたのであったが，その副産物として，Brelot-Choquet-Deny のポテンシャル論セミナーなどでは未だ得られていない次の重要な結果も得られた。

<u>結果</u>. Hunt のポテンシャルオペレーター V を $C_0(X)$ に制限して考へたものは preclosed オペレーターで，かつ最小の閉拡張 $\tilde{V}$ はその T_t の infinitesimal generator A と

(2) $\quad \tilde{V} = -A^{-1}$

の関係にある。これが Poisson 方程式

$$A\tilde{V}f = -f \quad , f \in D(\tilde{V}) \ (\tilde{V} \text{の定義域})$$

の意義である。

§1. <u>Hunt 理論の作用素論的 version.</u>

次の4つの定理の形に述べられる。

定理1. BからBの中への positive linear operator の系 $\{J_\lambda ; \lambda>0\}$ が pseudo-resolvent であるとする．すなはち resolvent 方程式

(3) $\qquad J_\lambda - J_\mu = (\mu-\lambda) J_\lambda J_\mu$

を満足するとする．このとき

(1)′ $\qquad \nabla f = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda f$

で定義される ∇ に対しては，$\lambda>0$ として $\nabla_\lambda = \nabla + \lambda^{-1} I$ とおくとき，principle of majoration が成立つ：

(α)′ $\quad f, g \in D(\nabla)^+$ なるとき不等式 $(\nabla_\lambda f)(x) \leqq (\nabla g)(x)$ が supp(f) で成立てば，到る所 $\nabla_\lambda f \leqq \nabla g$ が成立つ．

注意．(1) における $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\, dt = (\lambda I - A)^{-1} f$ （Aは T_t の infinitesmal generator ）から，(α) の代りに (α)′ を考へるのは自然なことがわかったわけである．

定理2. (3) における J_λ が，D(A) が dense in B であるような A の resolvent $(\lambda I - A)^{-1}$ であるならば，$D(\nabla)$ （(1)′に与へるもの ∇ の定義域）が dense in B なるとき $R(\nabla)$ dense in B になる．

注意．Hunt が (γ) を假定したことの natural なことが定理2に示されている．

定理3. $D(\nabla) \subseteqq B$ から B の中への positive linear

オペレータ V が

(4) $D(V) \supseteq C_0(X)$

(5) $V \cdot C_0(X)$ dense in B

と Hunt の条件 (β) を満足すれば，V は principle of positive maximum を満足する，すなはち

(6) $f \in C_0(X)$ とし

$$P = \{x_0;\ (Vf)(x_0) = \sup_x (Vf)(x)\}$$

$$N = \{x_1;\ (Vf)(x_1) = \inf_x (Vf)(x)\}$$

とおけば，P においては $f(x) \geqq 0$，N においては $f(x) \leqq 0$.

<u>定理 4.</u> $C_0(X)$ から B の中への positive linear オペレーター V が (5) および (6) を満足するならば，closed operator A with dense domain $D(A)$ が次の 3 条件を満足するように unique に定まる.

(7) A の resolvent $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ は positive かつ $\|\lambda J_\lambda\| \leqq 1$ for $\lambda > 0$.

(8) $Vf = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} J_\lambda f \qquad (f \in C_0(X))$

(9) $AVf = -f \qquad (f \in C_0(X))$.

しかも

(10) V は pre-closed で V の最小の closed extention $\tilde{V} = -A^{-1}$ よって A したがって T_t は V に対して unique

定理4がHunt理論を含むことは半群理論から明らかである。
また定理4での"しかも"以下の陳述と，本における結果はHuntの理論への重要なcommentと思われる。

§2. <u>定理1の証明</u>. これはYOSIDA (1)に与えられたものである。

先づ(3)から容易にわかるように

(11) $$J_\lambda J_\mu = J_\mu J_\lambda$$

よって(3)と(1)'とから

(12) $$Vf = \lambda J_\lambda V f + J_\lambda f = V \lambda J_\lambda f + J_\lambda f \qquad (f \in D(V))$$

ゆえに V の positivity と J_λ の positivity とから

(13) $f \in D(V)^+$, $\lambda > 0$ ならば $\lambda J_\lambda V f \leqq Vf$

すなわち Vf は "superharmonic" である。

つぎに

(14) $f \in B^+$ が $0 < \mu \leqq \lambda$ なるすべての μ に対して $\mu J_\mu f \leqq f$ を満足するならば，各点 x において $\lim\limits_{\mu \downarrow 0} (J_\mu(\lambda I - \lambda^2 J_\lambda) f)(x)$ が存在して
$$= (\lambda J_\lambda f)(x) - \lim_{\mu \downarrow 0} (\mu J_\mu f)(x)$$

証明は次の通り: (3)によって
$$J_\mu(\lambda f - \lambda^2 J_\lambda f) = \frac{-\lambda}{\lambda - \mu} \mu J_\mu f + \frac{\lambda^2}{\lambda - \mu} J_\lambda f$$
また(3)と同等な
$$(I + (\mu - \lambda) J_\lambda)(I - \mu J_\mu) f = (I - \lambda J_\lambda) f$$

と $\lambda \geqq \mu > 0$, J_λ positive とによって(14)の假定を用い
$0 \leqq \mu_1 J_{\mu_1} f \leqq \mu_2 J_{\mu_2} f \quad (0 < \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \lambda)$. 故に
各点で $\lim_{\mu \downarrow 0} (\mu J_\mu f)(x)$ が存在し(14)の結論を得る.

さて(α)′を証明する為に

$$v(x) = \min((\nabla_\lambda f)(x), (\nabla g)(x))$$

とおく. このとき

(15) $\quad 0 < \mu \leqq \lambda$ ならば $\mu J_\mu v \leqq v$,

である. まず(12)と J_μ positive とにより $\mu J_\mu \nabla g \leqq \nabla g$ だから, $\mu J_\mu \nabla_\lambda f \leqq \nabla_\lambda f$ がいへるとよい. ところがこれは

$$\mu J_\mu \nabla_\lambda f = \mu J_\mu \nabla f + \frac{\mu}{\lambda} J_\mu f = \mu J_\mu \nabla f + J_\mu f + \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) J_\mu f$$
$$= \nabla f + \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) J_\mu f \leqq \nabla f \leqq \nabla_\lambda f$$

から明らかである.

よって $w = \lambda(I - \lambda J_\lambda) v \geqq 0$ で, (14)を用い

(16) 各 $x \in X$ で

$$\lim_{\mu \downarrow 0} (J_\mu w)(x) \leqq (\lambda J_\lambda v)(x) = v(x) - \lambda^{-1} w(x)$$
$$\leqq (\lambda J_\lambda \nabla_\lambda f)(x) = (\nabla f)(x)$$
$$= (\nabla_\lambda f)(x) - \lambda^{-1} f(x)$$

ところが假定により $supp(f)$ では $(\nabla_\lambda f)(x) = v(x)$ だから, (16)により $supp(f)$ で $f(x) \leqq w(x)$ したがって $f \geqq 0$, $w \geqq 0$ から至るところ $f \leqq w$. 故に

(16) と J_λ positive から

$$(\nabla_\lambda f)(x) \leqq \lim_{n\downarrow 0}(J_n w)(x)+\lambda^{-1}w(x)\leqq v(x)\leqq(\nabla g)(x)$$

(以上)

§3. 定理2の証明.

$D(\nabla)$が稠密だから, ∇ の双対(共役)オペレーター ∇^* を考へることができるが, J_λ が有界オペレーターであるから (cf. K. YOSIDA [2], p. 195)

$(\nabla J_\lambda)^*$ は $J_\lambda^*\nabla^*$ の拡張である.

ゆえに(12)により

$$\nabla^*\nu^* = \lambda J_\lambda^*\nabla^*\nu^* + J_\lambda^*\nu^* \quad (\nu^*\in \mathfrak{D}(\nabla^*))$$

よって $\nabla^*\nu^*=0$ から $J_\lambda^*\nu^*=0$ となるが, Phillipsの定理 (cf. K. YOSIDA [2], p. 223) により $J_\lambda^*=(\lambda I-A^*)^{-1}$ だから, $\nu^*=0$ でなければならない. かくして得られた ∇^* の null space $N(\nabla^*)=\{0\}$ から, Hahn-Banach 拡張定理により $R(\nabla)$ は dense in B でなければならない.

§4. 定理3の証明. $\nabla f\in B$ だから, $(\nabla f)(x)$ は point at ∞ では0になる. だから $\sup_x(\nabla f)(x)\geqq 0$.

最初に $\sup_x(\nabla f)(x)>0$ の場合を考へる. この場合は当然 $f\leqq 0$ ではあり得ないので, $f^+(x)=\max(f(x),0)\neq 0$ である. $a=\max_{f(x)>0}(\nabla f)(x)$, $a^+=\max(a,0)$ と

然らば $\nabla f^+ \leqq a^+ + \nabla f^-$ $(-f^- = f - f^+)$ が $\mathrm{supp}(f^+)$ で成立つ. $b > a^+$ とし, $\varepsilon > 0$ を $b > a^+ + \varepsilon \cdot \sup_x f^+(x)$ なるごとくとる. $\{h_n\}$ を Hunt の條件(β) の函数列とし, $\nabla(f^- + b h_n)$ を考へると, Dini の定理によって十分大きい n に対して

$$\nabla(f^- + b h_n) \geqq \nabla f^+ + \varepsilon f^+ \quad (\mathrm{supp}(f^+) \text{ の上で})$$

が成立ち したがって $(\alpha)'$ により

$$\text{到るところ } \nabla f^+ + \varepsilon f^+ \leqq \nabla f^- + b \nabla h_n$$

よって

$$\text{到るところ } \nabla f + \varepsilon f^+ \leqq b \nabla h_n \leqq b$$

ここで $b \downarrow a^+$, $\varepsilon \downarrow 0$ ならしめて $\nabla f \leqq a^+$. よって $a^+ = a > 0$ となり $\sup_x (\nabla f)(x) = \sup_{f(x)>0} (\nabla f)(x)$.

つぎに一般の場合

$$\sup_x (\nabla f)(x) = (\nabla f)(x_0) \geqq 0$$

を考へる. M を x_0 のコンパクトな近傍とし, (5) によって $(\nabla g)(x_0) > \sup_{x \in X-M} (\nabla g)(x)$ なるごとき $g \in C_0(X)$ をとる. 右辺は勿論 $\geqq 0$ であるから, $\varepsilon > 0$ ならば

$$\sup_x (\nabla(f + \varepsilon g))(x) > 0$$

かつこの sup は M で attain され $X-M$ では attain されない. ゆえに最初に示したところから, 或る $y \in M$ で

$$f(y) + \varepsilon g(y) \geqq 0$$

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ かつ M を x_0 に縮めて $f(x_0) \geqq 0$.

§5. 定理4の証明

証明のための面倒な点は

(17) 定理4の假定のもとに, $\lambda > 0$ なるとき

$\nabla_\lambda \cdot C_0(X)$ が B で dense

なことであるが, 暫らく (17) がすでに証明されたものとして議論をすゝめる.

$f \in C_0(X)$, $\lambda > 0$ ならば (6) によって

(18) $\inf_x (\lambda \nabla f + f)(x) \leqq \lambda \nabla f(x) \leqq \sup_x (\lambda \nabla f + f)(x)$

これから写像

(19) $\hat{J}_\lambda : (\lambda \nabla f + f) \longrightarrow \nabla f \quad (f \in C_0(X))$

が一意的に定義されて positive linear オペレーターであることがわかる. しかも

(20) $\|\lambda \hat{J}_\lambda g\| \leqq \|g\| \quad (g = \lambda \nabla f + f,\ f \in C_0(X))$

ところが (17) があるから, 連續性によって $\hat{J}_\lambda$ は B 全体で定義された positive continuous linear オペレーターに拡張されかつ

(21) $\|\lambda J_\lambda\| \leqq 1 \quad (\lambda > 0)$

つぎに J_λ が resolvent であることを示す. (19) によって

$$J_\lambda(\lambda\nabla f+f)-J_\mu(\lambda\nabla f+f)=\nabla f-J_\mu\Big(\frac{\lambda}{\mu}(\mu\nabla f+f)+\Big(1-\frac{\lambda}{\mu}\Big)f\Big)$$

$$=\nabla f-\frac{\lambda}{\mu}\nabla f-\Big(1-\frac{\lambda}{\mu}\Big)J_\mu f=\Big(1-\frac{\lambda}{\mu}\Big)(\nabla f+J_\mu f)$$

同じく

$$(\mu-\lambda)J_\mu J_\lambda(\lambda\nabla f+f)=(\mu-\lambda)J_\mu\nabla f=(\mu-\lambda)J_\mu\cdot\Big(\nabla f+\frac{1}{\mu}f-\frac{1}{\mu}f\Big)$$

$$=(\mu-\lambda)\frac{1}{\mu}\nabla f-(\mu-\lambda)\frac{1}{\mu}J_\mu f=\Big(1-\frac{\lambda}{\mu}\Big)(\nabla f-J_\mu f)$$

が $f\in C_0(X)$ のとき成立つ．即ち $(J_\lambda-J_\mu)$ と $(\mu-\lambda)J_\mu J_\lambda$ は B で dense な $\nabla_\lambda\cdot C_0(X)$ の上で成立つから

$$\Big\{\; J_\lambda-J_\mu=(\mu-\lambda)J_\lambda J_\mu$$ すなはち J_λ は pseudo-resolvent である．

ところで $\|\lambda J_\lambda\|\leqq 1$ から "Abelian ergodic theorems" (Cf. K. Yosida[2], p.   ) が成立つ．すなはち

(22) $R(J_\lambda)$ の closure $=\{f\in B;\ s\text{-}\lim_{\mu\uparrow\infty}\mu J_\mu f=f\}$

(23) $R(I-\lambda J_\lambda)$ の closure $=\{f\in B;\ s\text{-}\lim_{\mu\downarrow 0}\mu J_\mu f=0\}$,

いまの場合は (19) と假定 (5) によって $R(J_\lambda)$ の closure $=B$，したがって μ に依存しないことが容易に証明される $N(J_\mu)$ は 0 のみから成るわけである．

だから J_λ は或るオペレータ A の resolvent:

$$J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}\quad,\quad A=\lambda I-J_\lambda^{-1}$$

でありかつ $D(A)=R(J_\lambda)\supseteqq R(\nabla)$ は B で dense である。

次に(9)の証明. (19)により

(24) $\nabla f=\hat{J}_\lambda(\lambda\nabla f+f)=\lambda J_\lambda\nabla f+J_\lambda f$, $f\in C_0(X)$

したがって

$$(\lambda I-A)J_\lambda(\lambda\nabla f+f)=\lambda\nabla f+f=(\lambda I-A)\nabla f$$
$$=\lambda\nabla f-A\nabla f\quad(f\in C_0(X))$$

を得て(9)がいえる。

(8)の証明 $J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$ から

(25) $(I-\lambda J_\lambda)f=-J_\lambda Af\qquad(f\in D(A))$

ところが(9)からわかるように $R(A)$ は dense in B, また $R(J_\lambda)\supseteqq\nabla\cdot C_0(X)$ も(5)により dense in B. よって $R(I-\lambda J_\lambda)$ は dense in B となり, したがって(23)により, すべての $g\in B$ に対して

(26) $s\text{-}\lim_{\mu\downarrow 0}\mu J_\mu g=0$

だから(24)により(8)を得る.

§6. 定理4の証明補遺1として(17)の証明.

X が可分だから仮定(5)によって, $\{f_n\}\subseteqq C_0(X)^+$ と $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x; f_n(x)>0\}=X$ なるように選べる. 正数列 $\{\alpha_n\}$ を, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n=h$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\nabla f_n)$ がいずれも一様収束するようにえらぶ. Hunt に従って

$$a_n(x)=\min(nb(x),1)$$

とおけば

(27) $a_n(x)>0$ かつ $n\uparrow\infty$ のとき $a_n(x)\uparrow 1$.

そして写像

(28) $f\longrightarrow \nabla a_n f \qquad (f\in C_0(X))$

は, B全体のBの中への連續な linear オペレーター ∇_n に連續性によって擴張できることが容易にわかる.

そこで $\lambda>0$ を十分小さとり $\|\lambda\nabla_n\|<1$ とすると,

$$(\lambda\nabla_n+I)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda\nabla_n)^k$$

が存在するから

(29) $J_\lambda^{(n)}=\nabla_n(\lambda\nabla_n+I)^{-1}$

は B から B 内への continuous linear オペレーターになる.

(30) $J_\lambda^{(n)}$ が positive かつ $\|\lambda J_\lambda^{(n)}\|\leqq 1$

を示そう. それには Principle of positive maximum を ∇_n に apply して $f\in C_0(X)$ なるとき

$$\inf_x(\lambda\nabla_n f+f)(x)\leqq\lambda\nabla_n f(x)\leqq\max_x(\lambda\nabla_n f+f)(x)$$

を求め ∇_n が continuous linear オペレーターなることと

$$J_\lambda^{(n)}(\lambda\nabla_n f+f)=\nabla_n f \qquad (f\in B)$$

に注意すればよい.

さて $\|\lambda\nabla_n\|<1$ なる $\lambda>0$ に対して $\mu>0$ を

$$\|(\mu-\lambda)J_\lambda^{(n)}\|\leqq|\mu-\lambda||\lambda^{-1}|<1$$

なる如くとれば，B全体で定義された continuous linear な逆 $(I+(\mu-\lambda)J_\lambda^{(n)})^{-1}$ が存在し，したがって

$$(\mu V_n+I)=(I+(\mu-\lambda)V_n(\lambda V_n+I)^{-1})(\lambda V_n+I)$$
$$=(I+(\mu-\lambda)J_\lambda^{(n)})(\lambda V_n+I)$$

はB全体で定義された continuous な逆をもつ．そこで $J_\mu^{(n)}=V_n(\mu V_n+I)^{-1}$ とおくと，$J_\lambda^{(n)}$ と同じようにして

(30)′ $J_\mu^{(n)}$ が positive かつ $\|\mu J_\mu^{(n)}\|\leqq 1$

なることがわかる．

これを繰返してすべての $\mu>0$ に対して $J_\mu^{(n)}=V_n(\mu V_n+I)^{-1}$ が定義され (30)′ の成立つことがいへた．

<u>以上を準備として(17)を証明する．</u>任意の $g\in C_0(X)^+$ に対して $J_\mu^{(n)}$ の定義から

$$f_n=J_\mu^{(n)}g=V_ng-\mu J_\mu^{(n)}V_ng\geqq 0.$$

$f_n=(\mu V_n+I)^{-1}V_ng$ だから，$V_ng=\mu V_nf_n+f_n$ したがって $0<a_n(x)\leqq 1$ により

(31) $0\leqq V_ng-(\mu Va_nf_n+a_nf_n)=(1-a_n)f_n$
$$\leqq(1-a_n)V_ng$$

ところが g の support コンパクトだから，十分大きい n に対して Dini の定理を用い $V_ng=Vg$. よって

$(1-a_n)V_n g$ は $n\uparrow\infty$ なるとき0に強収束(一様収束)する. かつ nを定めると V_n は連続オペレーターで, $V\cdot C_0(X)$ がBでdenseだから結局任意の $h\in B$ と任意の $\varepsilon>0$ とに対して $f\in C_0(X)$ を, $\|h-(nVf+f)\|<\varepsilon$ なるごとく選べることがわかった.

§7. 定理4の証明への補遺として, 前に示した結果の証明.

証明1 ($C_0(X)$に制限したVがpre-closedであることを田中洋氏の方法によって証明する)

まず一般的な

Lemma Banach空間Eでdenseな線形部分空間$D(A)$からEの中へのlinearオペレーターAのResolvent $J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$ が$\lambda>0$で定義されかつ$\sup_{\lambda>0}\|\lambda J_\lambda\|<\infty$とする. このとき$R(A)$ dense in EならばA^{-1}が存在する.

証明.

(32) $(I-\lambda J_\lambda)f=-J_\lambda Af \quad (f\in\mathcal{D}(A))$

の右辺は, fが$\mathcal{D}(A)$を動くとき dense in E. なぜならば; $R(A)$ denseかつ $R(J_\lambda)=\mathcal{D}(A)$ dense in Eだからであるからである.

ゆえに Abelian ergodic theorem (23) から

(33) すべての $g\in E$ に対して $s\text{-}\lim_{\mu\downarrow 0} \mu J_\mu g = 0$.

ところが $Ag=0$ ならば (32) から $\lambda J_\lambda g = g$ となり, (33) から $g=0$ でなければならないことになる. よって A^{-1} が存在する. (Lemma証明了)

さて (9) と A^{-1} の存在とから

(9)' $\nabla f = -A^{-1}f \qquad (f\in C_0(X))$

ところが A は infinitesimal generator だから closed, したがって $-A^{-1}$ は closed である。だから $C_0(X)$ に制限された ∇ は closed extention をもつ. さて ($C_0(X)$ に制限した)

<u>∇ の最小な閉拡張 $\tilde{\nabla}$ が $-A^{-1}$ と一致することの証明</u>

任意の $g\in B$ に対して (17) により $\{f_n\}\subseteq C_0(X)$ を

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}(\lambda\nabla f_n+f_n)=g$$

なるごとくとれる. J_λ の連続性から

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} J_\lambda(\lambda\nabla f_n+f_n)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\hat{J}_\lambda(\lambda\nabla f_n+f_n)$$
$$=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\nabla f_n=J_\lambda g$$

ゆえに $\tilde{\nabla}$ が closed なことから

$$J_\lambda g=\tilde{\nabla}f=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\nabla f_n,\quad g=s\text{-}\lim_{n\to\infty}(\lambda\nabla f_n+f_n)$$
$$=\lambda\tilde{\nabla}f+f$$

f が g に対して unique に定まることは, この二つの式から明らかである. よって $(\lambda\tilde{\nabla}+I)^{-1}$ が存在しか

よって, closed graph theorem で $(\lambda\widetilde{\nabla}+I)^{-1}$ は B で到るところ定義された continuous linear オペレーターになる. しかも

(34) $\quad J_\lambda = \widetilde{\nabla}(\lambda\widetilde{\nabla}+I)^{-1}$

および, (9) と A の closed なことから

(35) $\quad A\widetilde{\nabla}f = -f \qquad (f\in D(\widetilde{\nabla}))$

もいへる. ところが Lemma から A^{-1} が存在するから $\widetilde{\nabla}f=0$ から $f=0$ すなはち $\widetilde{\nabla}^{-1}$ が存在し, (34) から

$$J_\lambda^{-1} = (\lambda I - A) = (\lambda\widetilde{\nabla}+I)\widetilde{\nabla}^{-1} = \lambda I + \widetilde{\nabla}^{-1}$$

ゆえに $-A=\widetilde{\nabla}^{-1}$ すなはち $\widetilde{\nabla} = -A^{-1}$ がいへた.

証明2 ($C_0(X)$ に制限した ∇ が pre-closed なことの, 渡辺毅氏による Lemma を使はない直接証明).

まづ $f\in C_0(X)$, $\sup_x(\nabla f)(x)>0$ ならばこの sup は $=\sup_{f(x)>0}(\nabla f)(x)$ なること (§4) に注意する.

$f_n\in C_0(X)$, $s\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n=0$, $s\text{-}\lim_{n\to\infty}\nabla f_n = g$ と仮定して $g=0$ がいへれば ∇ を $C_0(X)$ の上に制限したものが pre-closed であるわけである.

そのために $g(x_0)>0$ なる $x_0\in X$ が存在したとして矛盾を出そう:

十分大きいコンパクト集合 $K\ni x_0$ と K で 1 になる

$h \in C_0(X)^+$ をとると,

$$\nabla(f_n h) \leqq \|f_n\| \nabla(h) \longrightarrow 0 \quad (\text{as } n \to \infty)$$

よって $\underset{n\to\infty}{s\text{-}\lim} \nabla((1-h)f_n) = g$ となるから, nを十分大きくとって

$$|\nabla((1-h)f_n)(x) - g(x)| \leqq \frac{1}{4} g(x_0) \quad \text{for all } x.$$

だから

$$\nabla((1-h)f_n)(x_0) \geqq \frac{3}{4} g(x_0) > 0$$

supp $((1-h)f_n)$ は Kの外にあるので, 始めに注意したことから, $x_1 \in X-K$ が存在して

$$\nabla((1-h)f_n)(x_1) \geqq \nabla((1-h)f_n)(x_0)$$

したがって

$$g(x_1) \geqq \frac{1}{2} g(x_0)$$

となる. Kを大きくとって $g \in B$ に矛盾するから $g \leqq 0$ でなければならない. 同じく $g \geqq 0$ もいへて $g = 0$.

(以上)

References

G. Hunt [1]: Markov processes and potentials, II, Illinois J. of Math. 1 (1957), 316-369.

K. YOSIDA [1]: Positive pseudo-resolvents and potentials, Proc. Jap. Acad. 41 (1965), 1-5.

K. YOSIDA [2]: Functional Analysis, Springer (1966)