数理解析研究所講究録
第 35 巻 1967 年 32-45

Huntの定理について
(Semigroupの構成)

東大理　田中　洋

§1.　Xをlocally compactかつσ-compactのHausdorff spaceとし，C_KをX上のcompact supportをもつ実数値連続函数の全体とし，C_Kをsupremum norm $\|\cdot\|$によって完備化したものをC_0とする．C_K, C_0の函数で≥ 0なものの全体をそれぞれC_K^+, C_0^+とかく．VをC_KからC_0の中へのlinear operatorとし，次の條件をみたすものとする．

1. Weak principle of the positive maximum:

$f \in C_K$, $\sup_{x \in X} Vf(x) > 0$ ならば

$$\sup_{\{f(x)>0\}} Vf(x) = \sup_{x \in X} Vf(x)$$

2. $f \in C_K^+$ ならば $Vf \in C_0^+$.

もしVのrange $V(C_K)$がC_0でdenseならば，Huntの定理[1: p.351]によりVはC_0上の強連続なsemigroup P_t の積分でかける．$V(C_K)$ が C_0 で dense でなくても次のような例がある．

<u>例 (Lion [2])</u>．$X=\{1,2,3\}$．このときは，C_K $(=C_0)$ の函数は 3-vector (a_1, a_2, a_3) で表わされるから，V を matrix で表わして

$$V=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

とする．これは上にあげた條件 1, 2 をみたしている．そして $P_t = e^{-t}V$ とすると

$$V=\int_0^\infty P_t\,dt .$$

この例では $V(C_K)$ は C_0 で dense ではないが，次の條件がみたされている．

3．$V(C_K)$ は X の点を分離する．

実際に，Hunt の定理は次の形で成立つ (Lion [2])．

<u>定理</u>　V を C_K から C_0 の中への linear operator で，條件 1, 2, 3 をみたすとする．このとき，$\mathcal{B}$ ($=X$ 上の有界 Baire 函数の全体) の上の sub-Markovian operators の semigroup $(P_t)_{t>0}$ が存在して，

(α) $f \in C_0'$ ならば，$P_t f(x)$ は $t>0$ で右連続．

(β) $Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\,dt$, $\forall f \in C_K$, $\forall x \in X$,

が成立つ．そしてこの様な $(P_t)_{t>0}$ は C_0' の上では unique で

ここで C_0' は次のようなものである．X が compact で無くかつある $x_0 \in X$ があって $\forall f \in C_K$ に対して $Vf(x_0)=0$ となっている場合には $C_0' = \{f \in C_0 ; f(x_0)=0\}$ とする．その他の場合は $C_0' = C_0$．

宮本氏の報告にあるように，條件1, 2 より V に対して resolvent $(V^\lambda)_{\lambda>0}$ が定まるので，この $(V^\lambda)_{\lambda>0}$ から semigroup を作ればよい．この部分は本質的には Ray [4] にあるが，[2], [3] にしたがって詳しくのべる．

§2. 定理の証明.

1) 條件1, 2 より次のような $(V^\lambda)_{\lambda>0}$ の存在がわかっている

(i) 各 V^λ ($\lambda>0$) は C_0 から C_0 への linear operator

(ii) $\|\lambda V^\lambda\| \leq 1$

(iii) $V^\lambda \geqq 0$ ($V^\lambda : C_0^+ \longrightarrow C_0^+$)

(iv) $V^\lambda - V^\mu + (\lambda-\mu)V^\lambda V^\mu = 0$, $\lambda, \mu > 0$.

(v) $Vf = V^\lambda(\lambda Vf + f)$, $f \in C_K$.

よって吉田−Hilleの定理によって $\overline{V^\lambda(C_0)}$ ($\lambda>0$ に無関係) の上の positivity preserving strongly continuous contraction semigroup $(K_t)_{t\geq 0}$ が存在して

$$V^\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f \, dt, \quad f \in \overline{V^\lambda(C_0)}$$

となる。以下のべるような方法で、この (K_t) を $\mathcal{B}$ の上まで広げて行く。

b) $\lambda > 0$ に対して

$$E_\lambda = \{f \in C_0^+ : f \text{ は } \lambda\text{-supermedian}\}$$
$$= \{f \in C_0^+ : kV^{k+\lambda} f \leq f \ \text{ for } {}^\forall k \geq 0 \text{ real}\}$$

とおく。さらに $E = \bigcup_{\lambda>0} E_\lambda$ とおき、

$$D = \{f : f = f_1 - f_2, \ f_1, f_2 \in E\}$$

とおく。次に $\tilde{X}$ を、X が compact でないときはその1点 compact 化 $X \cup \{\Delta\}$ (X が compact のときは、X をそのもの) とし、$C(\tilde{X})$ を $\tilde{X}$ 上の実数値連続函数の全体とする。$\tilde{f} \in C(\tilde{X})$ は $\tilde{f} = f + c$ ($f(\Delta) = 0$, c は定数函数) と一意的にかけるから、$C(\tilde{X}) = C_0 \cup \{\text{constant functions}\}$ と考えられる。このような記号のもとで、$\tilde{D} = D \cup \{\text{constant functions}\}$ ($\subset C(\tilde{X})$) とおく

と，明らかに $\tilde{D}$ は vector space となる．さらに，

$\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{D}$ ならば $\tilde{f} \vee \tilde{g}, \tilde{f} \wedge \tilde{g} \in \tilde{D}$ となることが次のようにしていえる．$\tilde{D} \ni \tilde{f} = f + c$ ($f \in D$, c は const.) とすると，$f = f_1 - f_2$，$f_1, f_2 \in E$ とかける．そして

$$(f+c)^+ = (f+c) \vee 0$$

$$= \begin{cases} f_1 + c - (f_1 + c) \wedge f_2, & c \geqq 0 \text{ のとき} \\ f_1 - f_1 \wedge (f_2 - c) & c < 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

ところが容易にわかるように

$$(f_1 + c) \wedge f_2 \in E \subset D \quad (c \geqq 0 \text{ のとき})$$

$$f_1 \wedge (f_2 - c) \in E \subset D \quad (c < 0 \text{ のとき})$$

であるから $(f+c)^+ \in \tilde{D}$．よって

$$\tilde{D} \ni \tilde{f} = f + c, \ \tilde{D} \ni \tilde{g} = g + c'$$

とすると，

$$\tilde{f} \vee \tilde{g} = (f - g + (c - c'))^+ + g + c' \in \tilde{D}$$

$$\tilde{f} \wedge \tilde{g} = -(g - f + (c' - c))^+ + g \in \tilde{D}.$$

結局，$\tilde{D}$ は vector lattice になる．

c) 以下当分の間，$\forall x \in X$ に対して $\vee f(x) > 0$ となるような $f \in C_K^+$ が存在することを仮定する（これが

成立たない場合については，最後に注意を与える).

(v)より $V(C_K)\subset V^\lambda(C_0)\subset D$ であるから，D は X の点を分ける，即ち $\widehat{D}\ (\subset C(\widehat{X}))$ は $\widehat{X}$ の点を分離し，constant functions を含む vector lattice になる．よって $\widehat{D}$ は $C(\widehat{X})$ で dense，したがって，D は C_0 で dense になる。

d) $\forall f\in C_0$ に対して $\lim_{k\to\infty} kV^k f(x)\equiv\widehat{f}(x)$ (pointwise) が存在する．特に $f\in\overline{V^\lambda(C_0)}$ ならば $\widehat{f}=f$.

先づ $f\in E_\lambda$ とする．$k'\geq k>0$ に対しては(iv)により

$$k'V^{k'+\lambda}f-kV^{k+\lambda}f=(k'-k)V^{k'+\lambda}(f-kV^{k+\lambda}f)\geq 0.$$

よって $kV^{k+\lambda}f\uparrow{}^{\exists}\widehat{f}$, $k\uparrow\infty$.

一方，resolvent equation (iv) によって

$$kV^kf=kV^{k+\lambda}f+\lambda V^{k+\lambda}(kV^kf) \quad \text{であるから}$$

$$kV^kf\longrightarrow\widehat{f}\quad, k\uparrow\infty$$

これは $f\in D$ に対して成立つが，さらに $\overline{D}=C_0$, $\|kV^k\|\leq 1$ に注意すると，$f\in C_0$ に対しても成立つ。

e) $\forall t>0$, $\forall f\in C_0$ に対して $\lim_{k\to\infty} K_t kV^k f(x)$ が存在する (pointwise).

$t>0$, $x\in X$ を固定して考えると，写像 $f\longrightarrow K_tf(x)$ は $\overline{V^\lambda(C_0)}$ の上の norm が 1 をこえない positive linear functionalである，よって Hahn-Banach の定理によって，C_0 の上の norm が 1 をこえない positive linear functional に拡張出来る．これからきまる (Radon) measure を $\mu_{t,x}$ とかくと，Lebesgue の convergence theorem によって

$$K_t kV^k f(x) = \mu_{t,x}(kV^k f) \longrightarrow \mu_{t,x}(\hat{f}),\ k\uparrow\infty.$$

f) $f \in C_0$ に対して $P_t f(x) = \lim_{k\to\infty} K_t(kV^k f)(x)$ とおくと，P_t は X 上の positive (Radon) measure (total mass ≤ 1) できめるから，P_t は $f \in \mathcal{B}$ に対しても定義出来る．$t>0$，$f \in C_0$ を固定すると $P_t f(x)$ は連続函数 $K_t(kV^k f)(x)$ の極限であるから，Baire 可測である．また同様の理由で，$P_t f(x)$ は (t, x) の函数としても Baire 可測である．これらのことは $f \in \mathcal{B}$ に対してもいえる．また明らかに $f \in \overline{V^1(C_0)}$ ならば $P_t f = K_t f$ である．このことに注意すると，$t, t' > 0$ に対して

$$P_{t'} P_t f(x) = P_{t'} \lim_{k\to\infty} K_t kV^k f(x)$$

$$(f \in C_0) \quad = \lim_{k\to\infty} P_{t'} K_t kV^k f(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} K_{t'} K_t kV^k f(x)$$

$$=\lim_{k\to\infty} K_{t'+t}\, kV^k f(x) = P_{t'+t} f(x)$$

これより $f\in\mathcal{B}$ に対してても $P_{t'}P_t f(x) = P_{t'+t} f(x)$ が

云える, 即ち $(P_t)_{t>0}$ は $\mathcal{B}$ 上の semigroup を為す.

g) $f\in C_0$ に対して $V^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\,dt$, $\lambda>0$.

また $f\in C_K$ に対して $Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\,dt$.

$f\in C_0$ ならば

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t\, kV^k f(x)\,dt$$

$$=\lim_{k\to\infty} V^\lambda k V^k f(x)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k-\lambda}(V^\lambda - V^k) f(x) = V^\lambda f(x)$$

よって $f\in C_K$ ならば

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\,dt = V^\lambda f(x) = Vf(x) - \lambda V^\lambda V f(x)$$

ここで $\lambda\downarrow 0$ とすると, $\lambda V^\lambda V f(x)\longrightarrow 0$ が次のようにしてわかる. $g\in C_K^+$ ならば $\lambda V^\lambda g \le \lambda V g \to 0$, $\lambda\downarrow 0$. よって $g\in C_K$ に対して $\lambda V^\lambda g\to 0$, $\lambda\downarrow 0$. ここで, $\|\lambda V^\lambda\|\le 1$ に注意すると, $g\in C_0$ に対しても $\lambda V^\lambda g\to 0$, $\lambda\downarrow 0$ が云える. よって $f\in C_K$ に対して

$$\lambda V^\lambda V f(x)\longrightarrow 0,\ \lambda\downarrow 0.$$

h) $f\in C_0$ ならば, $P_t f(x)$ は $t>0$ について右

連続である ($\forall x \in X$).

$g \in C_0^+$ とする. f), g) の結果を用いると

$$\int_t^\infty e^{-\lambda s} P_s g \, ds = e^{-\lambda t} P_t \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s g \, ds$$
$$= e^{-\lambda t} P_t V^\lambda g = e^{-\lambda t} K_t V^\lambda g$$

よって $e^{-\lambda t} K_t V^\lambda g$ は $t>0$ の continuous decreasing function である. 一方, d), e) より $f \in E_\lambda$ ならば

$$e^{-\lambda t} K_t k V^{k+\lambda} f \uparrow e^{-\lambda t} P_t f \quad , k \uparrow \infty$$

かつ,

$$V^{k+\lambda} f = V^\lambda f - V^\lambda k V^{k+\lambda} f$$
$$= V^\lambda (f - k V^{k+\lambda} f)$$
$$= V^\lambda g, \quad g = f - k V^{k+\lambda} f \geq 0, \ \in C_0$$

であるから, $e^{-\lambda t} P_t f$ ($f \in E_\lambda$) は $t>0$ の函数として, lower semicontinuous & decreasing である, したがって right continuous である. よって $f \in D$ に対して $P_t f$ は $t>0$ につき right continuous である. D が C_0 で dense であることと, $\|P_t\| \leq 1$ に注意すると, $f \in C_0$ に対して $P_t f$ は $t>0$ につき右連続となる.

注意　Xがcompactであれば，c)における仮定が成立っていなくても，c)の場合と全く同様である．次にXがcompactでなくてc)の仮定が成立っていない場合，即ちある$x_0 \in X$（條件3によってこのようなx_0は唯一つ）があって，$\forall f \in C_K$に対して$Vf(x_0)=0$となる場合を考える．このときは，Xのかわりに$X' = X - \{x_0\}$を考えればよい．$C'_K = \{f \in C_K : f$はx_0のある近傍で$0\}$とおくと，C'_Kの函数は$C_K(X')$の函数とも見なせるから，VをC'_Kに制限することによって，$C_K(X')$上のoperator V'を考えることが出来る．X'においてV'を考えると，條件1, 2, 3およびc)の仮定がみたされていることが，次の1), 2)によってわかる．

1) Xはx_0においてcountable baseをもつ（これより特にX'はσ-compactであることがわかる）

2) $\forall \varepsilon > 0$に対して，x_0の近傍Uがあって，$f \in C_K$, $0 \leq f \leq 1$, S_f（fのsupport）$\subset U$なる限り$Vf \leqq \varepsilon$.（これより，$V(C'_K)$が$V(C_K)$でdenseであること，したがって，$V'(C_K(X'))$がX'の点を分離することがわかる）．

V'に対応するsemigroupを$(P_t')_{t>0}$とすると，求めるsemigroup $(P_t)_{t>0}$は次のようにして得られる．

$$P_t f(x) = \begin{cases} P_t' f'(x) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

ただしf'はfのX'への制限である．

1)の証明：$f_n \in C_K^+$，$n=1,2,\cdots$を$f_n \uparrow \infty$となるようにえらぶ．するとx_0以外の点では$Vf_n \uparrow \infty$．closureがcompactであるようなx_0の近傍Uをとり固定する．このとき$U_n = \{x \in U : Vf_n(x) < 1\}$とおくと，$\{U_n\}_{n \geq 1}$が$x_0$の近傍系のbaseを与えることがわかる．2)の証明：U_0をclosureがcompactであるようなx_0の近傍とし，$g \in C_K^+$を，$0 \leq g \leq 1$，$g = 1$ on U_0となるようにえらぶ．$Vg \in C_0$，$Vg(x_0) = 0$であるから，x_0の近傍Uで，$U \subset U_0$かつ$\sup_{x \in U} Vg(x) \leq \varepsilon$となるものが存在する．この$U$に対しては$f \in C_K$，$0 \leq f \leq 1$，$S_f \subset U$なる限り$0 \leq f \leq g$であるから$Vf \leq Vg$．よって

$$\sup_{S_f} Vf(x) \leq \sup_U Vg(x) \leq \varepsilon$$

complete maximum principleによって$Vf \leq \varepsilon$．

一意性の証明

次の2つの補題においては，Vは條件1,2をみたすものとする．Vは測度による積分で表わされるから非負Baire函数に対してもVをoperateさせることが出来る．

補題1. 定数$a \geq 0$，非負Baire函数f, gに対して

$$a + Vf(x) \geq Vg(x)$$

が$g(x) > 0$となるすべての点xにおいて成立てば，同じ不等式がすべての点xにおいて成立つ．

証明は，continuous kernel VがC_K^+においてcomplete maximum principleをみたせば，positive universally measurable functionsのクラスにおいてもcomplete maximum principleをみたすというMeyerの結果[3 : p.204]より出る．今の場合は，條件1よりVはC_K^+においてcomplete maximum principleをみたしている．

補題2. f, gを非負Baire函数とし，$Vf, Vg < \infty$とする．もし$Vf + f = Vg + g$が成立てば$f = g$.

証明. $\tilde{f} = f - f\wedge g$, $\tilde{g} = g - f\wedge g$ とおく

$$V\tilde{f} + \tilde{f} = V\tilde{g} + \tilde{g}$$

ところが, $\tilde{f}\cdot\tilde{g} = 0$ であるから, $\tilde{f}(x) > 0$
ような x に対して $V\tilde{f}(x) \leq V\tilde{g}(x)$. よ
1によって ($a = 0$ として), $V\tilde{f} \leq V\tilde{g}$. 対
って $V\tilde{f} = V\tilde{g}$, $\tilde{f} = \tilde{g}$ を得る.

最後に uniqueness の証明を与える. $(P_t)_{t>}$
構成したもの, $(Q_t)_{t>0}$ を定理の結論に
性質をもつ semigroup とし,

$$W^\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f \, dt$$

とおく. P_t, Q_t を operate することは, 測度
分で表わされるから, 積分の順序交換によっ
Baire 函数 f に対して

$$\lambda V(V^\lambda f)(x) = \lambda V^\lambda V f(x) = Vf - V^\lambda$$

$$\lambda V(W^\lambda f)(x) = \lambda W^\lambda V f(x) = Vf - W^\lambda$$

よって $\quad Vf = (\lambda V + I)(V^\lambda f) = (\lambda V + I)($
補題2を用いると, $V^\lambda f = W^\lambda f$ を得る

文　献

[1] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials, II. Illinois J. Math., 1 (1957), 316—362.

[2] Lion, G. Théorème de représentation d'un noyau par l'intégrale d'un semi-groupe. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du Potentiel) 6e année, 1962, n°3.

[3] Meyer, P. A. Probability and potentials. (特に Chapter X)

[4] Ray, D. Resolvents, transition functions, and strongly Markovian processes. Annals Math., 70 (1959), 43—72.