数理解析研究所講究録
第 35 巻 1967 年 46-62

Dispersivity に関する注意

東京教育大　佐藤健一

§1. Dispersivity の定義

$\mathcal{B}$ を Banach 束とする．すなわち，$\mathcal{B}$ は実 Banach 空間かつ束であって，(i) $f \geq g$ ならば $f+h \geq g+h$，(ii) $f \geq g$ かつ $a \in R^+$（非負の実数の全体）ならば $af \geq ag$，(iii) $f \geq g$ ならば $-f \leq -g$，(iv) $|f| \geq |g|$ ならば $\|f\| \geq \|g\|$ という4つの性質をもつとする．次の記号を用いる：

$$f \vee g = \sup\{f, g\}, \quad f \wedge g = \inf\{f, g\},$$
$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = -(f \wedge 0), \quad |f| = f \vee (-f).$$

一般の Banach 空間における線形作用素の半群に関しては，Hille-吉田の定理が基本的な結果であるが，確率論等で実際に使われる Banach 空間は殆ど Banach 束であって，半群の非負性が重要である．R. S. Phillips [2] はこれを扱って，$\mathcal{B}$ における作用素が線形作用素の強連続非負縮小半群（半群 $\{T_t\}$ が $\|T_t\| \leq 1$ をみたすとき縮小半群（contraction semi-group）という）の生成作用素になる条件を与えた．彼は G. Lumer の semi-inner-product の特別なものを用いたが，

これには自由性があり、また Hahn-Banach の定理を用いて抽象的に定義されるので、具体的な函数空間を扱うのに不便である。その後長谷川[1]は semi-inner-product のかわりに

$$\tau'(f,g)=2^{-1}(\tau(f,g)-\tau(f,-g))$$

ただし

$$\tau(f,g)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}(\|f+\varepsilon g\|-\|f\|)$$

を用いることに着目し、Phillips の結果に類似の結果を証明した。

応用上の問題を考えると、長谷川[1]の $\tau'(f,g)$ でなく次のような汎函数

$$\sigma(f,g)=\inf\,\tau(f,(g+h)\vee(-kf)),\qquad f\geq 0$$

を新たに導入するのが便利である。ただし inf は、$f\wedge|h|=0$ をみたすすべての h と、すべての $k\in R^{+}$ についてとる。このσは次のような性質をもっていることが証明できる。

命題1.1. $f\geq 0$ とする.

(i) $-\|g^{-}\|\leq\sigma(f,g)\leq\|g^{+}\|$

(ii) $a\in R^{+}$ ならば $\sigma(f,ag)=a\sigma(f,g)$

(iii) 任意の a に対し $\sigma(f,af+g)=a\|f\|+\sigma(f,g)$

(iv) $\sigma(f,g+h)\leq\sigma(f,g)+\sigma(f,h)$

(v) $g\leq h$ ならば $\sigma(f,g)\leq\sigma(f,h)$

(vi) $f \wedge |h| = 0$ ならば $\sigma(f, g) = \sigma(f, g+h)$.

これらの性質のうちいくつかは τ を modify して σ をつくったことによってはじめて得られたものであり，τ は (ii), (iii), (iv) をみたすが (i), (v), (vi) を必ずしもみたさない．また τ' は，(ii), (iii) をみたすが (iv) を必ずしもみたさない．(τ' が (i), (v), (vi) をみたすかどうか筆者は知らない．)

σ を用いて次のような定義をする．

<u>定義</u>． $\mathfrak{B}$ における作用素 A が狭義 dispersive であるとは，すべての $f \in \mathfrak{D}(A)$ に対し $\sigma(f^+, Af) \leq 0$ が成り立つこととする．広義 dispersive であるとは，すべての $f \in \mathfrak{D}(A)$ に対し $\sigma(f^+, -Af) \geq 0$ が成り立つこととする．

以下，狭義 dispersive を disp (s)，広義 dispersive を disp (w) とかくことにする．(i) から $\sigma(f, 0) = 0$ であり，従って (vi) により $\sigma(0, g) = 0$ であるから，$f^+ = 0$ なる $f \in \mathfrak{D}(A)$ に対しては常に $\sigma(f^+, Af) = \sigma(f^+, -Af) = 0$ である．故に，disp (s) または disp (w) をいうには，$f^+ \neq 0$ の f だけ考えればよい．

$\sigma(f, 0) = 0$ と (iv) とから，$-\sigma(f, -g) \leq \sigma(f, g)$ である．従って，disp (s) ならば必ず disp (w) である．

上の定義を用いて，次のことがいえる．

1° Aが線形作用素の強連続非負縮小半群の生成作用素ならば，Aは disp(s) である．

2° Aが線形，$\mathcal{D}(A)$が$\mathcal{E}$で稠密，ある$\lambda>0$に対し $\mathcal{R}(\lambda I-A)=\mathcal{E}$（$I$は恒等作用素）とする．$A$が disp(w) ならば，ある線形強連続非負縮小半群の生成作用素である．

3° A, Bが共に disp(s) ならば $A+B$（定義域は $\mathcal{D}(A+B)=\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B)$）も disp(s) である．$A$が disp(s)，$B$が disp(w) ならば，$A+B$ は disp(w) である．

3°の証明は命題1.1 (iv) から得られる．すなわち前半は $\sigma(f^+,(A+B)f)\leq\sigma(f^+,Af)+\sigma(f^+,Bf)\leq 0$ により，後半は $\sigma(f^+,-(A+B)f)\geq\sigma(f^+,-Bf)-\sigma(f^+,Af)\geq 0$ による．1°, 2° は命題1.1とHille-吉田の定理を用いて [1], [2] と似た方法で証明できる．くわしくは [3] にゆずる．

具体的なBanach束におけるτ, σの形は次の通りである．（以下函数は実数値のものだけ考える．）

(a) $\mathcal{E}$が，compact空間Xの上の連続函数の全体のつくるBanach束 $C(X)$，$\|f\|=\max_{x\in X}|f(x)|$ の場合，$\forall f\neq 0$ に対し

$$(1.1)\qquad \tau(f,g)=\max_{x\in X(f)}(\operatorname{sgn} f(x))\,g(x)$$

ただし $X(f)=\{x:|f(x)|=\|f\|\}$ である．また

(1.2)　任意の $f\neq 0$, $f\geq 0$ に対し　$\sigma(f,g)=\tau(f,g)$

である。

(b)　$\mathfrak{X}=C_0(X)$, ただしXはcompactでない局所compact空間, $C_0(X)$ は $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ (∞ はXを一点compact化する点)をみたす連続函数 f の全体, の場合も, (a)と同じことがいえる。

(c)　$\mathfrak{X}=B(X)$, ただしXは任意の集合, $B(X)$ はX上の有界函数の全体, $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$ の場合には, $\forall f\neq 0$ に対し

(1.3)　$\tau(f,g)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{x\in X(f,\varepsilon)}(\mathrm{sgn}\, f(x))\, g(x)$

ただし $X(f,\varepsilon)=\{x:\ |f(x)|>\|f\|-\varepsilon\}$, である。また(1.2)がやはり成り立つ。

(d)　$(X,\mathcal{B},m)$ が測度空間, $\mathfrak{X}=L_\infty(X,\mathcal{B},m)$ の場合にも(c)と同じことがいえる。ただし(c)の sup を ess sup でおきかえる。

(e)　$(X,\mathcal{B},m)$ が測度空間, $\mathfrak{X}=L_1(X,\mathcal{B},m)$ の時にはすべての f, g に対し

$$\tau(f,g)=\int_{X_1(f)}(\mathrm{sgn}\, f(x))\, g(x)\, m(dx)+\int_{X_0(f)}|g(x)|\, m(dx)$$

であり, $f\geq 0$ に対し

$$\sigma(f,g)=\int_{X_1(f)}g(x)\, m(dx)$$

である．ただし，$X_0(f)=\{x: f(x)=0\}$，$X_1(f)=X-X_0(f)$ とする．

(f) $\mathfrak{S}=L_p(X,\mathfrak{B},m)$，$1<p<\infty$，の時には，$f\neq 0$ に対し

$$\tau(f,g)=\int_X (\operatorname{sgn} f(x))|f(x)|^{p-1}g(x)m(dx)\Big/\|f\|^{p-1} \tag{1.4}$$

であり，(1.2) がいえる．

(g) $(X,\mathfrak{B})$ を measurable space，$\mathfrak{S}$ をその上の有界 signed measure の全体が全変動のノルムによってつくる Banach 束 $A(\mathfrak{B})$ とする．$|f|$ に関する g の絶対連続部分，特異部分をそれぞれ g_f^c，g_f^s とし，f による X の Hahn 分割における正集合，負集合をそれぞれ X_f^+，X_f^- とすると

$$\tau(f,g)=g_f^c(X_f^+)-g_f^c(X_f^-)+\|g_f^s\|$$

である．$f\geq 0$ ならば

$$\sigma(f,g)=g_f^c(X)$$

である．

以上の証明は [3] にゆずる．σ の具体的な形を用いれば，disp(s)，disp(w) の具体的な形をそれぞれの Banach 束において与えることができる．特に，(a) の $C(X)$ または (b) の $C_0(X)$ の場合には，A が disp(s) であることは

(1.5) $\qquad f\in\mathcal{D}(X)$, $f(x_0)=\max_{x\in X} f(x)>0$ ならば
$\qquad Af(x_0)\le 0$.

をみたすことと同じであり, A が disp(w) であることをいいかえれば

(1.6) $\qquad a=\max_{x\in X} f(x)>0$ ならばある点 $x_0\in X$ が存在して $f(x_0)=a$ かつ $Af(x_0)\le 0$.

をみたすことである. (1.3) は確率論でしばしば用いられている性質であるが, 境界条件の問題を扱うには (1.4) を使う方が適当なことがある. Ventcel' [5] にその例がある.

§2. 広義 dispersive 作用素の閉拡大.

X が compact 距離空間, $\mathcal{B}=C(X)$ の場合, A が線形, dispersive (w) で稠密な定義域をもてば A の閉拡大が存在し, A の最小閉拡大 $\bar{A}$ は disp (s) になる. このことは [4] の Theorem 1.2 とその後の Remark で示した. 一般の Banach 束にこの結果を拡張することについて考察しよう.

<u>定理 2.1.</u> $\mathcal{B}$ は任意の Banach 束とする. A が $\mathcal{B}$ における線形かつ disp(w) な作用素で $\mathcal{D}(A)$ が稠密ならば, A は閉拡大をもつ.

<u>証明.</u> $f_n\in\mathcal{D}(A)$, $n=1,2,\cdots$ で f_n が 0 に強収束, Af_n が g に強収束するとし, $g=0$ をいえばよい. $g\neq 0$

とする．$g^+ \neq 0$ とし，$\|g^+\|=1$ としても一般性を失わない．$\mathcal{D}(A)$ の稠密性から，$\|g-h\|<1/3$ をみたす $h \in \mathcal{D}(A)$ が存在する．一般に $(h_1+h_2)^+ \leq h_1^+ + h_2^+$ であるから，

$$1=\|g^+\| \leq \|h^+ + (g-h)^+\| \leq \|h^+\| + \|(g-h)^+\| < \|h^+\| + 1/3,$$

従って $\|h^+\| > 2/3$ である．任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\sigma((f_n+\varepsilon h)^+, -g-\varepsilon Ah) \leq \sigma((f_n+\varepsilon h)^+, -\varepsilon^{-1}f_n - h)$$
$$+ \varepsilon^{-1}\|f_n^+\| + \|(h-g)^+\| + \varepsilon\|(Ah)^-\|$$

であることが命題1.1の (i) と (iv) を繰返し用いると分り，更に (iii) と (vi) と一般にいえる不等式

$$(2.1) \qquad |(h_1+h_2)^+ - h_1^+| \leq |h_2|$$

により

$$\sigma((f_n+\varepsilon h)^+, -\varepsilon^{-1}f_n - h) = -\varepsilon^{-1}\|(f_n+h)^+\| \longrightarrow -\|h^+\|,\ n\to\infty$$

である．従って，ε を十分小さくとれば，

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma((f_n+\varepsilon h)^+, -g-\varepsilon Ah) \leq -\|h^+\| + \|(h-g)^+\| + \varepsilon\|(Ah)^-\|$$
$$< -1/3 + \varepsilon\|(Ah)^-\| < 0$$

である．一方，(i) (iv) から一般に

$$(2.2) \qquad |\sigma(f,g)-\sigma(f,h)| \leq \|g-h\|$$

であることに注意すれば，A の $disp(w)$ により

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma((f_n+\varepsilon h)^+, -g-\varepsilon Ah) = \liminf_{n\to\infty} \sigma((f_n+\varepsilon h)^+, -(Af_n+\varepsilon Ah))$$
$$\geq 0$$

であるから，矛盾を生じた．故に $g=0$ であり，証明終．

定理 2.1 における仮定の下に $\bar{A}$ が必ず disp(w) になるかどうか筆者は確かめ得ていないが，一つの十分条件を与える．

<u>定義.</u>　$f_n \geq 0$, $n=1,2,\cdots$, が $f \neq 0$ に収束すれば必ず任意の g に対し

(2.3)　　$\limsup_{n\to\infty} \sigma(f_n, g) \leq \sigma(f, g)$

となる時，Banach 束 $\mathfrak{X}$ が (SCσ) をみたすという (Semi-continuity of σ with respect to the first variable).

<u>定理 2.2.</u>　$\mathfrak{X}$ が (SCσ) をみたすとする．A が線形 disp(w) で閉拡大をもてば，最小閉拡大 $\bar{A}$ も disp(w) である．

<u>証明</u>　$f \in \mathfrak{D}(\bar{A})$, $\bar{A}f = g$ とする．$f^+ \neq 0$ を仮定して $\sigma(f^+, -g) \geq 0$ をいえばよい．最小閉拡大であるから $f_n \in \mathfrak{D}(A)$, $n=1,2,\cdots$, が存在して $f_n \longrightarrow f$ かつ $Af_n \longrightarrow g$ である．(2.1) により $f_n^+ \longrightarrow f^+$ であるから (SCσ) を用いて

$$\sigma(f^+, -g) \geq \limsup_{n\to\infty} \sigma(f_n^+, -g),$$

右辺は (2.2) により $\limsup \sigma(f_n^+, -Af_n)$ に等しいから ≥ 0 であり，$\bar{A}$ の disp(w) がいえた．

§1 にのべた例のうち，(a), (b), (c), (d) および $2 \leq p < \infty$ の (f) は (SCσ) をみたし，(e), (g) は

trivial な例外を除いて $(S(\sigma))$ をみたさない．このことを示そう．

(a) X compact で $\mathfrak{B}=C(X)$ または (b) X が compact でない局所 compact で $\mathfrak{B}=C_0(X)$ の場合，(c) と同じく $\tau(f,g)$, $f\neq 0$, が (1.3) によっても表わされることをまず示そう．(1.3) の右辺を a とおく．$a\geqq\tau(f,g)$ は明かであるから，$\leqq$ を示す．$h(x)=(\operatorname{sgn} f(x))\,g(x)$ とおく．$\varepsilon>0$ に対し $x_n\in X(f,1/n)$, $n=1,2,\cdots$, を $a-\varepsilon<h(x_n)$ にとる．$\{x_n\}$ はある compact set に含まれるから，$\exists x_\infty$ が存在して x_∞ の任意の近傍が $\{x_n\}$ を無限回含む．従って $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n'}\}$ を $f(x_{n'})\longrightarrow f(x_\infty)$ かつ $g(x_{n'})\longrightarrow g(x_\infty)$ に選べる．故に $|f(x_\infty)|=\|f\|\neq 0$, 更に $h(x_{n'})\longrightarrow h(x_\infty)$ となり，従って $a-\varepsilon\leqq h(x_\infty)$ である．ε の任意性により，$a\leqq h(x_\infty)\leqq\tau(f,g)$ である．故に (a), (b) の場合は (c) の場合に帰着した．

(c) $\mathfrak{B}=B(X)$ の場合 $(S(\sigma))$ の証明：$f_n\longrightarrow f$, $f_n\geqq 0$, $f\neq 0$ とし，$g\in\mathfrak{B}$ とする．$f_n\neq 0$ としてよい．(1.3) (1.2) により $\exists x_n\in X$ に対し $f_n(x_n)>\|f\|-1/n$ かつ $|\sigma(f_n,g)-g(x_n)|<1/n$ である．$\varepsilon_n=\frac{1}{n}+2\|f_n-f\|$ とおくと

$$|f(x_n)-\|f\||\leqq|f(x_n)-f_n(x_n)|+|f_n(x_n)-\|f_n\||+|\|f_n\|-\|f\||<\varepsilon_n$$

であるから

$$\sup_{x\in X(f,\varepsilon_n)} g(x) \geq g(x_n) \geq \sigma(f_n, g) - \frac{1}{n}$$

である. $n\to\infty$ とすると $\varepsilon_n\to 0$ であるから (2.3) をうる.

(d) $\mathfrak{X} = L_\infty$ の場合は, 本質的には (c) と同じである.

(f) $\mathfrak{X} = L_p$, $2\leq p<\infty$, の場合, $f_n\to f$, $f_n\geq 0$, $f\neq 0$ ならば $\forall g$ に対し $\lim_{n\to\infty}\sigma(f_n, g) = \sigma(f, g)$ がいえる。これを証明しよう. (1.4) により $\sigma(f, g)$ は g について線形だから, $\sigma(f, g) = \sigma(f, g^+) - \sigma(f, g^-)$ である. 故に $g\geq 0$ としていえば十分である. $g\geq 0$ を固定し, $h\in L_p$ に対し

$$\|h\|' = \left(\int_X |h(x)|^{p-1} g(x)\, m(dx)\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

とおく. $\|f_n\|' \longrightarrow \|f\|'$ をいえばよい. Hölder の不等式により

$$(\|h\|')^{p-1} \leq \|h\|^{p-1}\|g\|$$

であるから $\|f_n - f\|' \longrightarrow 0$ がいえる. $p\geq 2$ だから $\|\ \ \|'$ は3角不等式をみたし, $|\|f_n\|' - \|f\|'| \leq \|f_n - f\|' \longrightarrow 0$ である.

次に (e) の $\mathfrak{X} = L_1(X, \mathcal{B}, m)$ の場合には, trivial な例外を除いて (S(σ)) をみたさない. すなわち, $B_1\cap B_2 = \emptyset$ かつ $0 < m(B_i) < \infty$, $i=1,2$ なる $B_1, B_2\in\mathcal{B}$ が存在すれば (S(σ)) をみたさない. なぜなら, $f_n(x) = \chi_{B_1}(x)$

$+\frac{1}{n}\chi_{B_2}(x)$, $f(x)=\chi_{B_1}(x)$, $g(x)=\chi_{B_1\cup B_2}(x)$ とおけば,
$f_n\to f$ かつ $\sigma(f_n,g)=\int_{B_1\cup B_2} g\,dm = m(B_1)+m(B_2)$,
$\sigma(f,g)=\int_{B_1} g\,dm = m(B_1)$ であるから。(g) の $\mathfrak{B}$ $=A(\mathfrak{B})$ の場合も同様である.

<u>注意</u>. §1, 2° の仮定を弱め, "$\mathcal{R}(\lambda I-A)=\mathfrak{B}$" を "$\mathcal{R}(\lambda I-A)$ が $\mathfrak{B}$ で稠密" にかえると, 結論として, A が線形強連続非負縮小半群の生成作用素となる. 筆者はこれを $\mathfrak{B}$ が (S(σ)) をみたすという仮定で証明したが, 渡辺毅氏の注意を使うと, 任意の Banach 束でいえる.

§3 C(X) または $C_0(X)$ における dispersivity と最大値原理との関係

X を局所 compact Hausdorff 空間とし, X が compact の時は $\mathfrak{B}=C(X)$, X が compact でない時は $\mathfrak{B}_0=C_0(X)$ とする. A を $\mathfrak{B}$ における線形作用素で 1:1 とする. $V=-A^{-1}$ とおく. A の disp(s) または disp(w) という性質と V の種々の最大値原理との間には, 密接な関係がある.

<u>定義</u> V が complete maximum principle をみたすとは

(3.1) a が非負の実数, f, g が共に $\mathcal{D}(V)$ に属しかつ $f\geq 0$, $g\geq 0$ とする時, $a+Vf(x)\geq Vg(x)$ が g の support において成り立てば X 全体で

成り立つ,

ということとする. V が positive maximum principle をみたすとは,

(3.2) $f \in \mathcal{D}(V)$ で $Vf(x_0) = \max_{x \in X} f(x) \geq 0$ ならば $f(x_0) \geq 0$ である,

ということとする. V が weak positive maximum principle をみたすとは

(3.3) $f \in \mathcal{D}(V)$ で $\sup_{x \in X} Vf(x) = a > 0$ ならば $Vf(x)$ の $\{x : f(x) > 0\}$ における sup は a に等しい.

ということとする.

$\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{R}(A)$ が共に稠密ならば, V に対する上の3つの最大値原理と, A が disp(s) であることと, A が disp(w) であることとは, すべて互いに同値である. 更にくわしくいえば, 次のことがいえる.

$$
\begin{tikzcd}
A: \mathrm{disp}(s) \arrow[r, shift left, "2"] \arrow[d, shift right, "1"'] & V: \mathrm{pos.\ max.\ prin.} \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[d, shift right, "3"'] \\
A: \mathrm{disp}(w) \arrow[r, shift left, "3"] \arrow[u, shift right, "2"'] & V: \mathrm{weak\ pos.\ max.\ prin.} \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[u, shift right, "2"'] \arrow[d, shift right, "1"'] \\
 & V: \mathrm{complete\ max.\ prin.} \arrow[u, shift right, "1"']
\end{tikzcd}
$$

ただし①は常にいえることを示し，②は$\mathcal{D}(A)$が稠密ならば成り立つことを示し，③は$\mathcal{R}(A)$が稠密ならば成り立つということを示す．

ここでは，disp(s) または disp(w) に関係した部分だけ証明しよう．(1.5) により，A が disp(s) であることは

(3.4) $f \in \mathcal{D}(V)$, $Vf(x_0) = \max_{x \in X} Vf(x) > 0$ ならば $f(x_0) \geq 0$,

と同値である．また (1.6) により，A の disp(w) は

(3.5) $f \in \mathcal{D}(V)$, $\sup_{x \in X} Vf(x) = a > 0$ ならば，$Vf(x)$ の $\{x : f(x) \geq 0\}$ における sup は a である，

と同値である．故に，V の pos. max. prin. (3.2) から常に A の disp(s) がいえ，V の weak pos. max. prin. (3.3) から常に A の disp(w) がいえる．

A: disp(s) $\xrightarrow{②}$ V: pos. max. prin の証：$Vf(x_0) = \max_{x \in X} Vf(x) = 0$ の時 $f(x_0) \geq 0$ をいえばよい．X が完全正則空間であることと $\mathcal{D}(A)$ の稠密性を用いると，x_0 の任意の近傍 U に対し，$\exists h \in \mathcal{D}(A)$ が存在して $h(x_0) > \sup_{x \notin U} h(x) \geq 0$ をみたす．しかも $\|Ah\| \leq 1$ にとれる．$\varepsilon > 0$ とすると $(Vf + \varepsilon h)(x_0) = \varepsilon h(x_0) > 0$ であるが $x \notin U$ では $(Vf + \varepsilon h)(x) \leq \varepsilon h(x) < \varepsilon h(x_0)$ である．故に $x_1 \in U$ が存在して $(Vf + \varepsilon h)(x_1) = \max_X (Vf + \varepsilon h) > 0$

である．disp(s) により $(-f+\varepsilon Ah)(x_1)\leqq 0$ であるから，$f(x_1)\geqq -\varepsilon\|Ah\|\geqq -\varepsilon$ である．U と ε の任意性により $f(x_0)\geqq 0$ を得る．

A: disp(w) $\xrightarrow{③}$ V: weak pos. max. prin. の証：$\sup_{x\in X} Vf(x)=a>0$ とする．$3\varepsilon<a$ なる $\varepsilon>0$ を任意にとる．compact 集合 K を，$x\notin K$ では $Vf(x)\leqq\varepsilon$ となるようにとる．X の局所 compact 性と $\mathcal{D}(V)$ の稠密性により $h\in\mathcal{D}(V)$ が存在して K では $h(x)>0$ である．しかも $\|Vh\|\leqq\varepsilon$ にとれる．$\sup_{x\in X} V(f-h)\geqq\sup_{x\in X} Vf-\varepsilon=a-\varepsilon>0$ であるから (3.5) により，$x_0\in X$ が存在して $(f-h)(x_0)\geqq 0$ かつ $V(f-h)(x_0)\geqq a-\varepsilon$ である．故に，$Vf(x_0)\geqq a-2\varepsilon$．$K$ の外では $Vf(x)\leqq\varepsilon<a-2\varepsilon$ だから $x_0\in K$ となる．従って $f(x_0)\geqq h(x_0)>0$ 従って $\{x: f(x)>0\}$ における $Vf(x)$ の sup は $\geqq a-2\varepsilon$ となり ε の任意性により証明終．

A: disp(w) $\xrightarrow{②}$ A: disp(s) の証：A が disp(s) ではないとしよう．すると $\sigma(f^+, Af)=a>0$ となる $f\in\mathcal{D}(A)$ が存在する．$\sigma(0,\cdot)=0$ であるから $f^+\neq 0$ となり，従って，$f(x_0)=\|f^+\|$ かつ $Af(x_0)=a$ となる x_0 が存在する．x_0 の近傍 U を，U上で $Af(x)>a/2$ にとる．X の完全正則性と $\mathcal{D}(A)$ の稠密性から，$h\in\mathcal{D}(A)$ が存在

して $h(x_0) > 1/2$ かつ U の外では $h(x) < 1/2$ である。
任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\sigma((f+\varepsilon h)^+, -Af-\varepsilon Ah) \leq \sup_{x \in U} (-Af-\varepsilon Ah)(x)$$
$$\leq -a/2 + \varepsilon \| Ah \|$$

が成り立ち，これは ε を十分小さくとれば < 0 であるから，A の $disp(w)$ に矛盾する。
最後の証明では，A が $1:1$ であることを用いていない。

文献

[1] M. Hasegawa, On contraction semi-group and (di)-operators, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 290−302.

[2] R. S. Phillips, Semi-groups of positive contraction operators, Czechoslovak Math. J. 12(87) (1962), 294−313.

[3] K. Sato, On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices, to appear.

[4] K. Sato − T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965), 529−605.

[5] A. D. Ventcel', On lateral conditions for

multi-dimensional diffusion processes, Teor. Veroyat. Prim. **4** (1959), 172–185 (ロシア語).