数理解析研究所講究録
第35巻 1967年 63-80

再帰マルコフ連鎖のポテンシャル作用素について

静岡大 理　　近藤亮司

§1. 序

Sを高々可算な集合とする。S上に行列（即ち$S \times S$上で定義された函数）の族$(P_t)_{t \geqq 0}$が与えられて次の条件をみたすとき簡単に<u>半群</u>と呼ぶことにする。即ち

(P.1)　$P_t \geqq 0$，$P_t 1 = 1$　$(\forall t \geqq 0)$

(P.2)　$P_{t+s} = P_t P_s$　$(\forall t, s \geqq 0)$

(P.3)　$\lim_{t \to 0} P_t = I$。

但し行列に対し大小関係及び極限の概念はすべて各点毎の意味とし，Iは単位行列を表わす。又，半群$(P_t)_{t \geqq 0}$は

(P.T)　$\int_0^\infty P_t(x, y)\,dt < \infty$　$(\forall (x, y) \in S \times S)$

をみたすとき<u>遷移的</u>，

(P.R)　$\int_0^\infty P_t(x, y)\,dt = \infty$　$(\forall (x, y) \in S \times S)$

をみたすとき<u>再帰的</u>（詳しくは既約再帰的）と云われる。

遷移的半群$(P_t)_{t \geqq 0}$に対しては行列Rを

$$R(x, y) = \int_0^\infty P_t(x, y)\,dt \qquad ((x, y) \in S \times S)$$

によって定義すれば、Rを核とするポテンシャルが考えられ、それと半群 $(P_t)_{t\geqq 0}$，及び $(P_t)_{t\geqq 0}$ を遷移確率として持つマルコフ連鎖の関係もよく調べられている。しかしながら、再帰的半群に対してはこのような形でポテンシャルを定義することは出来ないし事情は大変異なっている。離散パラメーターの場合には Spitzer [10], [11]、Kemeny-Snell [5], [6], Orey [8] の研究等があるがこゝでは Orey [8] の考えに基いて再帰的半群に対してポテンシャル作用素を定義しその存在と一意性、及びポテンシャル作用素から半群が一意的にきまることを示す。

§2　半群と Ray 過程

$(P_t)_{t\geqq 0}$ を S 上の半群とすると任意の $(x, y)\in S\times S$ に対し写像 $t\to P_t(x, y)$ は $[0, \infty)$ 上で一様連続である。従って任意の $\alpha>0$ に対し行列 R_α を

$$R_\alpha(x, y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_t(x, y)\,dt$$

により定義することが出来、行列の族 $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ は

(R.1)　$R_\alpha\geqq 0$,　$\alpha R_\alpha 1\leqq 1$　$(\forall\alpha>0)$

(R.2)　$R_\alpha-R_\beta+(\alpha-\beta)R_\alpha R_\beta=0$　$(\forall\alpha, \beta>0)$

(R.3)　$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha R_\alpha=I$

をみたすことが容易に検証出来る。以後 $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ を半群

$(P_t)_{t\geqq 0}$ の resolvent と呼ぶ。逆ラプラス変換の一意性と半群の t についての連続性から、半群 $(P_t)_{t\geqq 0}$ はその resolvent により唯一通りにきまることを注意しておく。

今右 S 上で定義された実数値有界函数全体の作る線型空間を $\mathbb{B}$ で表わす。$\mathbb{B}$ は norm : $\|f\| = \sup_{x\in S} |f(x)|$, を入れることにより Banach 空間になる。S を離散位相の入った位相空間と考えると、S は可分、局所コンパクトな Hausdorff 空間と考えられ $\mathbb{B}$ は S 上の実数値連続有界な函数全体の作る線型空間と一致する。今 f を S 上の函数で $0 \leqq f \leqq 1$ とすると、写像 $t \to P_t f(x)$, $t \to P_t(1-f)(x)$ は任意の $x\in S$ に対し、共に $[0,\infty)$ 上で下半連続であり、$t \to P_t 1(x) = 1$ は連続なので $t \to P_t f(x)$ は $[0,\infty)$ 上で連続である。従って任意の $f\in\mathbb{B}$, $x\in S$ に対し、写像 $t \to P_t f(x)$ は連続である。一方 $\mathbb{B}_1 = \{R_1(\cdot, y) ; y\in S\}$ とおくと、$\mathbb{B}_1$ は $\mathbb{B}^+ = \{f ; f\in\mathbb{B}, f\geqq 0\}$ の可算部分集合で、S の 2 点を分離し、条件；

$$\alpha R_{\alpha+1} f \leqq f \quad , \quad \forall f\in\mathbb{B}_1, \ \forall \alpha > 0$$

をみたすことが分る。これ等のことから Kunita-Watanabe [6, Theorem 1] 及び Ray [9] により、S を適当な距離により完備化した compact 空間 $\bar{S}$ をとると、$\bar{S}$ を状態空間とし、次の條件を満足する右連続、強マルコフ過程 $X = (\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{M}, (X_t), (\theta_t)\ (P_x).)$ が存在する。(マルコフ過程の定

義は大体 Dynkin [2] と同じとするが，$P_x(X_0=x)=1$ を仮定しないこと，$t \geqq \zeta(\omega)$ に対しては $\bar{S}$ に extra point Δ をつけ加えて $X_t(\omega)=\Delta$ とすること，及び，shift operator θ_t を Ω から Ω への写像で $X_t(\theta_s\omega)=X_{t+s}(\omega)$ を満足するものとして定義することだけが異なる)。

(i) 各 $x \in \bar{S}$ について，$\{t\,;\ X_t \in \bar{S} \setminus S\}$ の Lebesgue 測度は P_x-測度 0 の集合を除いて 0 に等しい。

(ii) X の resolvent $(\bar{R}_\alpha)_{\alpha>0}$ は $\bar{S}$ 上の有界連続函数の空間 $\bar{\mathbb{C}}$ を $\bar{\mathbb{C}}$ に写す。

(iii) 各 $(x, y) \in S \times S$，$t \geqq 0$ に対し，$P_x(X_t = y) = P_t(x, y)$。

今后このようなマルコフ過程を $(P_t)_{t \geqq 0}$ に対応する <u>Ray 過程</u>と呼ぶことにし，Ray 過程を考える場合には常に S 上の函数 f を，$\bar{S} \setminus S$ における値を 0 とおいて $\bar{S}$ 上の函数と考えることとする。

X を半群 $(P_t)_{t \geqq 0}$ に対応する Ray 過程とし $U \subseteq \bar{S} \cup \{\Delta\}$ ~~に対~~ への到達時間を σ^U で表わす。即ち

$$\sigma^U = \begin{cases} \inf\{t \geqq 0\,;\ X_t \in U\} & \\ \infty & (\text{もし上の集合が空のとき})。\end{cases}$$

又，$\bar{S} \cup \{\Delta\} \setminus U$ への到達時間を τ^U で表わす。U が一点集合 $\{a\}$ のときには $\sigma^{\{a\}}, \tau^{\{a\}}$ の代りに σ^a, τ^a とかく。

Ray 過程の性質 (i), (ii), (iii) を使って，Ito-Mckean [3, p. 233]

と同様にして次のことが証明出来る。

(iv) もし $x \in S$ が trap（$x \in S$ はすべての $t \geqq 0$ に対し $P_t(x, x) = 1$ のとき trap と呼ぶことにする）でなければ、x のある近傍 $U \subsetneqq \bar{S}$ で $E_x(\tau^U) < \infty$ となるものが存在する。

簡単のため今后そのような近傍を x の exit 近傍と云うことにする。

§3 再帰的半群と不変測度

$(P_t)_{t \geqq 0}$ を再帰的半群，$(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ をその resolvent，X を $(P_t)_{t \geqq 0}$ に対応する Ray 過程とする。このとき S の各点 a は次の意味で再帰的である。

補題1. τ を $E_a(\tau) < \infty$ なる Markov 時間，$\sigma_\tau^a = \tau + \sigma_0^a \circ \theta_\tau$ とおくと

(3.1) $$P_a(\sigma_\tau^a < \infty) = 1 \text{。}$$

証明．強マルコフ性から

$$R_\alpha(a, a) \leqq E_a(\tau) / (1 - E_a(e^{-\alpha\sigma_\tau^a} ; \sigma_\tau^a < \infty))$$

が容易に出る．従って $\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha(a, a) = \infty$，$E_a(\tau) < \infty$ 及び $\lim_{\alpha \to 0} E_a(e^{-\alpha\sigma_\tau^a} ; \sigma_\tau^a < \infty) = P_a(\sigma_\tau^a < \infty)$ により，$P_a(\sigma_\tau^a < \infty) = 1$ を得る。（証明終）

特に $P_a(\tau > 0) = 1$ であれば $P_a(0 < \sigma_\tau^a < \infty) = 1$ である。更に Markov 時間の列 $(\sigma_n)_{n \geqq 0}$ を

(3.2) $\sigma_0 = 0, \quad \sigma_n = \sigma_{n-1} + \sigma^a_\tau \circ \theta_{\sigma_{n-1}} \quad n \geqq 1$

により定義すれば，$(\sigma^a_\tau \circ \theta_{\sigma_{n-1}})_{n\geqq 1}$ が確率空間 $(\Omega, \mathfrak{M}, P_a)$ の上で独立なこと，$\sigma^a_\tau \circ \theta_{\sigma_{n-1}}$ が σ^a_τ と同じ分布をもつこと及び $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \sigma^a_\tau \circ \theta_{\sigma_{k-1}}$ とかけることにより，P_a-測度 1 で $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \infty$，かつ，$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$ であることが分る。

次に $(P_t)_{t\geqq 0}$ が既約であることを示す。即ち

<u>補題 2</u>. 任意の $a, b \in S$ に対し，$P_a(\sigma^b < \infty) = 1$ が成立する。

証明．τ を $P_a(0<\tau)=1$ かつ $E_a(\tau) < \infty$ なる Markov 時間とする。U を a の exit 近傍とし，$\tau = \tau^U$ とおくと，確かにこの条件をみたすのでこのような τ は存在する。先ず

(3.3) $\quad P_a(\sigma^b < \sigma^a_\tau) > 0$

であることを示す。実際，もし $P_a(\sigma^b < \sigma^a_\tau) = 0$ とすると，$a \neq b$ で $P_a(\sigma^b > \sigma^a_\tau) = 1$ である。Markov 時間の列 $(\sigma_n)_{n\geqq 0}$ を (3.2) で定義すれば強 Markov 性をくり返し使うことにより $P_a(\sigma^b > \sigma_n) = [P_a(\sigma^b > \sigma^a_\tau)]^n = 1$，$n \geqq 1$ を得る，従って $P_a(\sigma^b = \infty) = 1$，即ち $P_t(a, b) = 0$，$\forall t \geqq 0$ となり，$\int_0^\infty P_t(a, b)\,dt = \infty$ の仮定と矛盾する。補題自身は

$$P_a(\sigma^b < \infty) = \sum_{n\geqq 0} (\sigma_n < \sigma^b < \sigma_{n+1})$$

$$= P_a(\sigma^b < \sigma^a_{\tau}) \sum_{n \geqq 0} (P_a(\sigma^a_{\tau} < \sigma^b))^n$$

$$= P_a(\sigma^b < \sigma^a_{\tau}) / [1 - P_a(\sigma^a_{\tau} < \sigma^b)]$$

$$= 1$$

により得られる。 (証明終)

<u>補題3.</u> $a \in S$ とおけば任意の $(x, y) \in S$ に対し

(3.4) $$^aR(x, y) = E_x\left(\int_0^{\sigma^a} \chi_{\{y\}}(X_t)\,dt\right) < \infty$$

が成り立つ。但し χ_Γ は集合 Γ の indicator とする。

証明. $^aR(x, y) = P_x(\sigma^y < \sigma^a)\, {}^aR(y, y)$ であるから

(3.5) $$^aR(x, y) \leqq {}^aR(y, y)$$

が成り立つ。従って $^aR(y, y) < \infty$ を示せばよい。$y = a$ のときは明らかだから $y \neq a$ とする。V を a を含まない y の exit 近傍とし、Markov時間の列 $(\tau_n)_{n \geqq 0}$ を

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \sigma^y_{\tau_V} \circ \theta_{\tau_{n-1}}, \quad n \geqq 1$$

により定義する。このとき

$$E_y\left(\int_0^{\sigma^a} \chi_{\{y\}}(X_t)\,dt\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} E_y\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \chi_{\{y\}}(X_t)\,dt\ ;\ \tau_n < \sigma^a < \tau_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E_y\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \chi_{\{y\}}(X_t)\,dt\ ;\ \tau_k < \sigma^a\right)$$

$$= E_y\left(\int_0^{\sigma^y_{\tau_V}} \chi_{\{y\}}(X_t)\,dt\right) \sum_{k=0}^{\infty} [P_y(\sigma^y_{\tau_V} < \sigma^a)]^n$$

$$\leqq E_y(\tau_V) / P_y(\sigma^a < \sigma^y_{\tau_V}) < \infty$$

であるから $^aR(y, y) < \infty$ (証明終).

S上の非負函数fは、もしすべての$t \geqq 0$に対し$P_t f \leqq f$をみたすならばexcessiveと呼ばれる。$(P_t)_{t \geqq 0}$が再帰的な場合(有限値の)excessiveな函数は定数に限る。実際a, bをSの任意の二点とすると、excessive函数に関する一般論で

$$f(b) = E_a(f(X_{\sigma_b})) \leqq f(a)$$

を得るからa, bの立場を交換して$f(a) = f(b)$を得る。S上の測度μは、すべての$x \in S$について$0 < \mu(x) < \infty$, かつ、任意の$t \geqq 0$に対し$\mu P_t = \mu$のとき$(P_t)_{t \geqq 0}$の不変測度と呼ばれる。不変測度の存在や一意性については多くの研究があるが、こゝで後で使うために、不変測度を与える一つの公式をあげる。$(P_t)_{t \geqq 0}$を再帰的半群、$(R_\alpha)_{\alpha > 0}$をそのresolvent, $a \in S$, ${}^aR$を(3.4)で定義されるS上の行列とする。

定理1. 任意の$\alpha > 0$に対し、

(3.6) $$\mu(y) = R_\alpha(a, y) + \alpha R_\alpha {}^aR(a, y) \quad (y \in S)$$

で定義されるμは$(P_t)_{t \geqq 0}$の一つの不変測度である。又不変測は定数倍を除いて唯一通りである。

証明. 任意の$y \in S$に対し

$$0 < R_\alpha(a, y) \leqq \mu(y) \leqq R_\alpha(a, y) + {}^aR(y, y) < \infty$$

であるから$0 < \mu(y) < \infty$ $(\forall y \in S)$である。又簡単な計算で関係式

(3.7) $$\mu(y) = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_a\left(\int_0^{s + \sigma_a \circ \theta_s} \chi_{\{y\}}(X_u)\, du\right) ds$$

が成立することが分る。簡単のため $\sigma_s^a = s + \sigma^a \circ \theta_s$ とおくと補題1により σ_s^a は $P_a(\sigma_s^a < \infty) = 1$ をみたす Markov 時間である。従って任意の $t \geqq 0$ に対し

$$\mu P_t(y) = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_a\left[\int_0^{\sigma_s^a} E_{X_u}(\chi_{\{y\}}(X_t))\,du\right]ds$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_a\left[\int_t^{t+\sigma_s^a} \chi_{\{y\}}(X_u)\,du\right]ds$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_a\left[\int_0^{\sigma_s^a} \chi_{\{y\}}(X_u)\,du\right]ds$$

$$+ \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_a\left[\int_{\sigma_s^a}^{t+\sigma_s^a} \chi_{\{y\}}(X_u)\,du\right]ds$$

$$- \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_a\left[\int_0^t \chi_{\{y\}}(X_u)\,du\right]ds$$

$$= \mu(y) + E_a\left[\int_0^t \chi_{\{y\}}(X_u)\,du\right] - E_a\left[\int_0^t \chi_{\{y\}}(X_u)\,du\right]$$

$$= \mu(y).$$

即ち μ は一つの不変測度である。ν を他の任意の不変測度とする。新らしく半群 $(\hat{P}_t)_{t\geqq 0}$，函数 $\hat{f}$ を

$$\hat{P}_t(x, y) = \mu(y) P_t(y, x)/\mu(x), \qquad \hat{f}(x) = \nu(x)/\mu(x)$$

により定義すると，$(\hat{P}_t)_{t\geqq 0}$ は再び再帰的半群になり，$\hat{f}$ は $(\hat{P}_t)_{t\geqq 0}$ に対し excessive であることが容易に分る。従って $\hat{f}$，即ち ν/μ は定数である。　　　　（証明終）

§4. 再帰的半群の potential 作用素.

$(P_t)_{t\geqq 0}$ を S 上の再帰的半群, μ をその不変測度とする。S 上の函数 f が有限な台をもち, $\langle \mu, f\rangle = \sum_{x\in S}\mu(x)f(x) = 0$ をみたすとき, null charge と呼ぶことにし, null charge 全体の作る線型空間を $\mathbb{N}$ で表わす。

<u>定義.</u> $\mathbb{N}$ から $\mathbb{B}$ への線型作用素 R が

(4.1) $$(I-P_t)Rf(x) = \int_0^t P_s f(x)\,ds. \quad (\forall t\geqq 0, \forall x\in S)$$

をみたすとき, $(P_t)_{t\geqq 0}$ の<u>(弱)ポテンシャル作用素</u>と呼ぶ。

$(R_\alpha)_{\alpha>0}$ を $(P_t)_{t\geqq 0}$ の resolvent とすると, 条件 (4.1) は

(4.1′) $$(I-\alpha R_\alpha)Rf = R_\alpha f \qquad (\forall \alpha>0, \forall f\in \mathbb{N})$$

と同値であることが分る。この定義は離散パラメーターの場合の Orey の定義を形式的に連続パラメーターの場合になおしたものであるが, これがポテンシャルらしい性質をもっていることを示すため一つの補題と例をあげる。X を $(P_t)_{t\geqq 0}$ に対する一つの Ray 過程とすると, 次の Dynkin 公式が成立つ。

<u>補題 4.</u> R をポテンシャル作用素, τ を $P_x(\tau<\infty)=1$, $E_x(\int_0^\tau \chi_{\{y\}}(X_t)\,dt)<\infty$ $(\forall x, y\in S)$ をみたす Markov 時間とすると,

(4.2) $$Rf(x) - E_x(Rf(X_\tau)) = E_x\left(\int_0^\tau f(X_t)\,dt\right)$$

がすべての $x\in S$, $f\in\mathbb{N}$ に対して成立する。

証明は (4.1′) から容易に得られるから省略する。

例 1. Xが次の意味で安定で保存的とする。即ち任意の$x \in S$に対し$P_x(0 < \tau^x < \infty) = 1$, かつ $P_x(X_{\tau^x} \in S) = 1$とする。このとき任意の$g \in \mathbb{B}$に対しDynkinの生成作用素$D$を

$$Dg(x) = [E_x(g(X_{\tau^x})) - g(x)] / E_x(\tau^x)$$

により定義する。このような場合、(4.2)において$\tau = \tau^x$とおくと、$DRf = -f \quad (\forall f \in \mathbb{N})$を得る。即ち、ポテンシャル$g = Rf \ (f \in \mathbb{N})$, は Poisson 方程式 $Dg = -f$の一つの有界な解を与える。

例 2. $a \in S$に対し$\tau = \sigma^a$とおくと、$Rf(x) = {}^aRf(x) + Rf(a) \quad (\forall f \in \mathbb{N})$を得る。写像$f \to Rf(a)$は$\mathbb{N}$上の線型汎函数であるから、ポテンシャル作用素$R$がもし存在すれば$Rf = {}^aRf + l(f)$, $f \in \mathbb{N}$, lは$\mathbb{N}$上の線型汎函数、という形でなければならないことが分る。

例 3. $f \in \mathbb{N}$, $E = \{f > 0\}$, $\tau = \sigma^E$とおくと、

$$Rf(x) = E_x(f(X_{\sigma^E})) + E_x\left(\int_0^{\sigma^E} f(X_t)\,dt\right)$$
$$\leqq E_x(f(X_{\sigma^E})).$$

従って、Rは次の意味の最大値原理：

(M.P. $\mathbb{N}$), すべての$f \in \mathbb{N}$に対し、もし$Rf \leqq m$が$\{f > 0\}$で成立するならばS上で$Rf \leqq m$. (mは任意の実数)。

が成立する。

定理2. 任意の再帰的半群に対してポテンシャル作用素 R は存在してnull chargeの空間 N 上の線型汎函数を除いて唯一通りである。R は最大値の原理（M. P. N）をみたし、次の意味で正則である。即ち、$f \in N$ の台 $\{f \neq 0\}$ で Rf が定数となったとすれば $f = 0$。

証明. l を N 上の線型汎函数とし $Rf = {}^aRf + l(f)$ が一つのポテンシャル作用素であることを示そう。$(I - \alpha R_\alpha) l(f) = 0$ であるから $(I - \alpha R_\alpha)^a Rf = R_\alpha f$ $(f \in N)$ を示せばよい。最初に μ を1つの不変測度として、

(4.3) $$(I - \alpha R_\alpha)^a R(x, y) = R_\alpha(x, y) - R_\alpha(x, a)\mu(y)/\mu(a)$$

に注意する。実際、新らしいresolvent $({}^aR_\alpha)_\alpha$ を

$${}^aR_\alpha(x, y) = E_x\left(\int_0^{\sigma^a} e^{-\alpha t} \chi_{\{y\}}(X_t)\,dt\right) \qquad (x, y) \in S \times S$$

により定義すれば

(4.3) $$\alpha\, {}^aR_\alpha\, {}^aR = {}^aR - {}^aR_\alpha \qquad \forall \alpha > 0$$

をみたす。一方強Markov性により

$$R_\alpha(x, y) = {}^aR_\alpha(x, y) + E_x(e^{-\alpha\sigma^a}) R_\alpha(a, y)$$

及び、その特別な場合として

$$R_\alpha(x, a) = E_x(e^{-\alpha\sigma^a}) R_\alpha(a, a)$$

を得るので $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ と $({}^aR_\alpha)_{\alpha>0}$ は関係：

(4.4) $$R_\alpha(x, y) = {}^aR_\alpha(x, y) + R_\alpha(x, a) R_\alpha(a, y)/R_\alpha(a, a)$$

で結ばれる。(4.3) 及び (4.4) を合せると、

(4.5) $$(I-\alpha R_\alpha)\,{}^aR(x,y)$$

$$= R_\alpha(x,y) - R_\alpha(x,a)\,[\,R_\alpha(a,y) + \alpha R_\alpha\,{}^aR(a,y)\,]\,/\,R_\alpha(a,a)$$

と得る。所で定理1.により $R_\alpha(a,\cdot) + \alpha R_\alpha(a,\cdot)$ は $(P_t)_{t\geqq 0}$ の一つの不変測度なので (4.3) が成り立つ。もし f が null charge であれば、(4.3) に作用させることにより

$$(I-\alpha R_\alpha)\,{}^aRf = R_\alpha f \qquad (\alpha>0)$$

となるから、${}^aRf$ は一のポテンシャル作用素である。唯一性及び最大値原理 (M.P. N) は例1、及び例2 で既に示してある。正則率性は次のようにして示される。もし f の台の上で定数 C に等しいとすれば最大値原理により S 上で $Rf=C$. 従って (4.1′) により $R_\alpha f = 0$ である。一方 $\alpha R_\alpha f \to f$ $(\alpha\to\infty)$ であるから $f=0$ を得る。　(証明終)

次に再帰的半群 $(P_t)_{t\geqq 0}$ はその不変測度 μ とポテンシャル作用素 R によって一通りにきまることを示す。

定理3. $(P_t)_{t\geqq 0}$, $(\tilde{P}_t)_{t\geqq 0}$ を二つの再帰的半群, それぞれ μ, $\tilde{\mu}$ を不変測度, N, $\tilde{N}$ を null charge の空間, R, $\tilde{R}$ をポテンシャル作用素とする。もし $\tilde{\mu}=c\mu$ (c は正定数, 従って $\tilde{N}=N$) で $\tilde{R}f = Rf + l(f)$ (l は N 上の線型汎函数) ならば $\tilde{P}_t = P_t$ $(t\geqq 0)$ である。

証明. X, $\tilde{X}$ をそれぞれ $(P_t)_{t\geqq 0}$, $(\tilde{P}_t)_{t\geqq 0}$ に対応する Ray 過程とする。以下 $\tilde{X}$ に関係してきまる量は上に "～" を

をつけて表わすことにしよう。$a \in S$とし、$y \neq a$に対してS上の函数f_yを

$$f_y(x) = \begin{cases} 1 & x = y \\ -\mu(y)/\mu(a) & x = a \\ 0 & その他 \end{cases}$$

と定義する。

$${}^a\tilde{R}(x,y) = \tilde{R}f_y(x) - \tilde{R}f_y(a) = Rf_y(x) - Rf_y(a) = {}^aR(x,y)$$

がすべての$y \neq a$に対して成立し、明らかに${}^a\tilde{R}(x,a) = {}^a\hat{R}(x,a) = 0$であるから${}^a\tilde{R} = {}^aR$を得る。${}^aS = S \setminus \{a\}$とおき${}^a\mathbb{M}$を${}^aS$上で定義された有限な台をもつ函数の空間とする。${}^aR$を${}^a\mathbb{M}$から${}^a\mathbb{B}$（${}^aS$上の有界函数の空間）への写像と考えると、

所謂完全最大値の原理：　任意の${}^af \in {}^a\mathbb{M}$に対して、もし$\{{}^af > 0\}$上で${}^aR\,{}^af \leq m$がある$m \geq 0$に対して成立すれば${}^aS$上で${}^aR\,{}^af \leq m$。

が成立する。従ってDenyの理論により(4.3)をみたし、$\lim_{\alpha \to 0} {}^aR_\alpha = {}^aR$となるresolvent $({}^aR_\alpha)_{\alpha > 0}$は唯一通りである。従って${}^a\tilde{R}_\alpha = {}^aR_\alpha$, $\alpha > 0$である。

次に二つの量e_α, λ_αを

$$e_\alpha = 1 - \alpha\,{}^aR_\alpha 1$$

$$\lambda_\alpha = \mu - \alpha\mu\,{}^aR$$

により導入する。μは$(P_t)_{t \geq 0}$の不変測度であるからすべての$\alpha > 0$に対して$\alpha\mu R_\alpha = \mu$が成り立つ。従って(4.4)

の両辺に $\alpha\mu(x)$ をかけて x について加えると

(4.6) $\quad \mu(y)=\alpha\mu\,{}^{a}R_\alpha(y)+\mu(a)R_\alpha(a.y)/R_\alpha(a.a)$

がある。従って λ_α は非負測度

(4.7) $\quad \lambda_\alpha(y)=\mu(a)R_\alpha(a.y)/R_\alpha(a.a) \qquad (y\in S)$

で全測度

(4.8) $\quad \langle\lambda_\alpha, 1\rangle=\mu(a)/\alpha R_\alpha(a.a)$

を持つ。

一方 (4.3) の両辺を y について加えると.

$$1=\alpha\,{}^{a}R_\alpha 1(x)+R_\alpha(x.a)/R_\alpha(a.a) \qquad (x\in S)$$

であるから

(4.9) $\quad e_\alpha(x)=R_\alpha(x.a)/R_\alpha(a.a) \qquad (x\in S)$

である。(4.7), (4.8), (4.9) を (4.3) と合せると.

(4.10) $\quad R_\alpha(x.y)={}^{a}R_\alpha(x.y)+e_\alpha(x)\lambda_\alpha(y)/\alpha\langle\lambda_\alpha, 1\rangle$

を得る。既に示したように ${}^{a}\widetilde{R}_\alpha={}^{a}R_\alpha \; (\alpha>0)$ であり $\widetilde{\mu}=c\mu$ であるから, $\widetilde{e}_\alpha=e_\alpha$, $\widetilde{\lambda}_\alpha=c\lambda_\alpha$。従って $\widetilde{R}_\alpha=R_\alpha$ がすべての $\alpha>0$ に対して成立つ。故に逆ラプラス変換の一意性と半群の連続性から $\widetilde{P}_t=P_t \; (t\geqq 0)$ を得る。(証明終)

§5. 諸注意

ポテンシャル作用素の定義(4.1)から必ずしも $Rf(x) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t P_s f(x)\,ds \; (+\, l(f))$ とはならない。すべて

の $f \in \mathbb{N}$ に対して $R_0 f(x) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s f(x)\, ds$ が存在して有界になる場合には $R_0 f$ が一つの(弱)ポテンシャル作用素になることは比較的容易に示される。しかし、いかなる半群に対して、$R_0 f$ が定義出来るかというのは一般的に解決するのは相当困難な問題と考えられる。離散パラメーターの場合には Kemeny-Snell [10], [11]. Orey [8] 等の研究があり、そこでは上述の性質は normal (詳しくは right normal) と呼ばれている。有界な不変測度をもつ再帰的半群は normal である。

定理3で一意性が成立つので定理2の逆の問題を考えることは興味がある。即ち μ を S上いたる所正の測度とし、$\mathbb{N}(\mu)$ を μ に関する null charge の空間とする。このとき $\mathbb{N}(\mu)$ から $\mathbb{B}$ への線型写像 R があって、それが最大値原理 (M. P. $\mathbb{N}(\mu)$) をみたし、正則であればある再帰的半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ のポテンシャル作用素になっているか、という問題である。これに対しては部分的解決 (μ が有界のときの resolvent の構成) はあるがまだ未解決である。

文　献

[1] J. Deny: Les principes fondamentaux de la theorie de potentiel, Sem. de Brelot, Choque, Deny. (1960/61)

[2] Dynkin: Markov processes: Springer. 1965.

[3] Ito-McKean: Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1961

[4] Kemeny-Snell: Potentials for denumerable Markov chain, Math. Anal. and Appl. 3 (1961) 196-260

[5] Kemeny-Snell: Boundary theory for recurrent Markov chains, Trans. Am. Math. Soc. 106 (1963) 495-520

[6] Kunita-Watanabe: Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces, to appear in Fifth Berkeley Symp.

[7] P.A.Meyer: Probability and potentials, Blaisdell publishing company, 1966.

[8] S. Orey: Potential kernels for recurrent Markov chains, J. Math. Anal. and Appl. 8 (1964)

104 - 132.

[9] D. Ray: Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Ann. Math. 70 (1959), 43-78.

[10] F. L. Spitzer: Recurrent random walk and logarithmic potential, Fourth Berkeley Symp. (1961) vol. II. 515 - 534

[11] F. L. Spitzer: Hitting probabilities: J. Math. and Mech, 11: (1962) 593 - 614.