数理解析研究所講究録
第36巻 1968年 37-47

近似理論実行への Gleichverteilung の応用

日大理工　宇野利雄，洪姚植

パラメータの1次式として函数近似の公式を作ろうとするとき，基本となるHaarの理論がある。[1] これを近似式作成に適用するための一実行手段を考案したものがこの報告の要旨である。最初にこの考案を検討するための基礎として，一応Haarの理論を紹介する。

§1. 定義

$\mathfrak{M}$ ： 任意の空間における有界閉集合

P ： $\mathfrak{M}$ に所属する任意の点

$f(P)$ ： $\mathfrak{M}$ において定義された任意の実数値連続函数

$f_1(P),\ f_2(P),\ \cdots,\ f_n(P)$ ： $\mathfrak{M}$ において定義された，きまったn個の連続函数（実数値），ここに $f(P),\ f_1(P),\ \cdots,\ f_n(P)$ は1次独立だとしておく。

$$\operatorname*{Max}_{P\in\mathfrak{M}} \left| f(P) - \{c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \cdots + c_n f_n(P)\} \right|$$ を最小ならしめるような係数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$ を求めるのがわれわれの問題である。

$(n+1)$ 次元空間 E_{n+1}，その座標 $(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，において次の3つの集合を考える。

K ： $\operatorname*{Max}_{P\in\mathfrak{M}} |a_0 f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)| \leqq 1$ となる $(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)$ の集合。

$\mathfrak{F}$: P を $\mathfrak{M}$ にゆきわたらせたとき $(f(P), f_1(P), \cdots, f_n(P))$ および $(-f(P), -f_1(P), \cdots, -f_n(P))$ をあわせた集合

$\mathfrak{K}$: $\mathfrak{F}$ を含む最小の凸集合

あきらかにこれら3つの集合はいずれも原点につき対称である。

§2. $\mathfrak{K}$ の性質

i) まず $\mathfrak{K}$ は有界である。これは $f, f_1, \cdots f_n$ が1次独立であることからきている。もし有界でない点列 $(a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_n^{(k)})$ が $\mathfrak{K}$ の中にとれたとする。$\underset{i}{\mathrm{Max}}\, |a_i^{(k)}| = \alpha_k$ とすると, $b_i^{(k)} = a_i^{(k)}/\alpha_k$ を作れば $|b_i^{(k)}| \leqq 1$ であり, 且つ

$$\left|\sum_{i=0}^{n} b_i^{(k)} f_i(P)\right| \leqq \frac{1}{\alpha_k}$$

となる $(f(P) = f_0(P)$ とした)。$k \to \infty$ のときの $(b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \cdots, b_n^{(k)})$ の集積点の1つを $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$ とすると

$$b_0 f(P) + b_1 f_1(P) + \cdots + b_n f_n(P) = 0$$

となるが, $b_i^{(k)}$ のうちのどれか1つは ± 1 であるので $b_0, b_1, \cdots, b_n$ の中にも ± 1 であるものがふくまれ, これら全部が 0 ということでなくなって $f(P), \cdots, f_n(P)$ の1次独立に反する。

ii) $\mathfrak{K}$ は凸集合である。正数 λ, μ を $\lambda + \mu = 1$ として不等式

$$\left|\sum (\lambda a_i^{(1)} + \mu a_i^{(2)}) f_i(P)\right| \leqq \lambda \left|\sum a_i^{(1)} f_i(P)\right| + \mu \left|\sum a_i^{(2)} f_i(P)\right|$$

から明白である。

iii) $\mathfrak{K}$ の境界上の点では

$$\underset{P \in \mathfrak{M}}{\mathrm{Max}} \left| a_0 f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) \right| = 1$$

である。また逆にそうなる点は必ず $\mathfrak{K}$ の境界上にある。

$(a_0, \cdots, a_n)$ を境界上の点としたとき，任意の $P \in \mathfrak{M}$ に対しては

$$|a_0 f(P) + \cdots + a_n f_n(P)| \leqq 1$$

であるが，左辺の Max を与えるような P に対しては，この Max = 1 ということである。もし Max < 1 であるとすると $a_0, \cdots, a_n$ に関する Max の連続性から，$(a_0, \cdots, a_n)$ の近傍でも Max < 1 となり，この点が境界上の点であることに反する。

次に $\mathfrak{K}$ の内点 $(a_0, \cdots, a_n)$ で Max = 1 であったとすると，このMax を与える P につき $f_i(P)$ の全部が 0 であることはないから，そのうちの 0 でないどれか 1 つを $f_k(P)$ とする。このとき a_k の代りに $a_k + \delta$ とおき，適当に δ の符号をとれば，$|\delta|$ がいかに小さくとも

$$\left|\sum_i a_i f_i(P) + \delta f_k(P)\right| > 1$$

とすることができて，点

$$(a_0, \cdots, a_{k-1}, a_k + \delta, a_{k+1}, \cdots, a_n)$$

が $\mathfrak{K}$ の外にあることになり，$(a_0, \cdots, a_n)$ が内点であることに反する。

§3　上の $\mathfrak{K}$ を M 倍に相似拡大した集合を $\mathfrak{K}_M$ とすると，$\mathfrak{K}_M$ においては $\left|\sum_i a_i f_i(P)\right| \leqq M$ となり，またその境界上では $\underset{P \in \mathfrak{M}}{\mathrm{Max}} \left|\sum a_i f_i(P)\right| = M$ である。

もし $f(P)$ の最良近似 $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(P)$ が求まり

$$\underset{P \in \mathfrak{M}}{\mathrm{Max}} \left| f(P) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(P) \right| = \varepsilon$$

であったとすると，まず点 $Q(1, -c_1, -c_2, \cdots, -c_n)$ は $\mathfrak{K}_\varepsilon$ の境界に所ぞくする点になっている。次にもしこの $\mathfrak{K}_\varepsilon$ の境界で x_0 座標 a_0 が >1 である点があるとすると

$$\underset{P \in \mathfrak{M}}{\mathrm{Max}} \left| f(P) - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_0} f_i(P) \right| = \frac{\varepsilon}{a_0}$$

となって上の$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(P)$ が最良近似でないことになる。これらのことから，$\mathfrak{K}_\varepsilon$ はx_0 に垂直な平面$x_0=1$ を支持面(Stützebene)とし，Qがこの支持面と$\mathfrak{K}_\varepsilon$ との共通点であることがわかる。

すなわち最良近似を求めることは支持面が$x_0=1$ である凸集合$\mathfrak{K}_\varepsilon$ をさがし，次に$\mathfrak{K}_\varepsilon$ と$x_0=1$ との接点の座標をさがすことになる。あるいは相似変換をして考えれば

A) $\mathfrak{K}$の支持面でx_0軸に垂直なもの $x_0=d$ を求め

B) 次に$x_0=d$ との接点の座標$(d, a_1, \cdots, a_n)$をさがす。

C) 最良近似の係数は(B)をつかって

$$c_1=-\frac{a_1}{d},\quad c_2=-\frac{a_2}{d},\quad\cdots\quad c_n=-\frac{a_n}{d}\qquad となる。$$

なおこのとき最良近似での最大誤差は$\varepsilon=1/d$ である。

§4 $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$と$\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{K}}$との相反性

$\mathfrak{K}$の境界上の点を$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$とすると$\mathfrak{M}$における任意のPに対し，

$$-1 \leqq a_0 f(P)+a_1 f_1(P)+\cdots+a_n f_n(P) \leqq 1$$

であるが，特に$\operatorname{Max}|a_0 f(P)+\cdots+a_n f_n(P)|$ の値を与えるようなP_0 については

$$a_0 f(P_0)+a_1 f_1(P_0)+\cdots+a_n f_n(P_0)$$

は$+1$ または-1 となる。このことから$\mathfrak{F}$に属する任意の1点を$(b_0, b_1, \cdots, b_n)$とすると

$$a_0 b_0+a_1 b_1+\cdots+a_n b_n \leqq 1$$

が成立ち，同じく$\mathfrak{F}$ に適当な1点$(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n)$があって

$$\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_n\beta_n=1$$

であることがわかる。このことは

「$\bar{F}$ の境界上の点の座標を $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ として平面

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 1$$

を作ると, これは F の支持面になる。」

ということに他ならない。なおこの関係は単位球面 $x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ についての極 (pole) および極面 (polar) の関係になっているので, 簡単のため以後この言葉をつかう。

F は凸図形とは限らないが, それを包む最小凸図形 $\bar{F}$ にまで拡大しても支持面の関係はそのままに言える。すなわち

「単位球面について $\bar{F}$ の境界上の点の極面を作ると, これは $\bar{F}$ の支持面である。」

逆に $\bar{F}$ の任意の支持面の極が $\bar{F}$ の境界上の点になることも次のようにしてわかる。$\bar{F}$ の任意の支持面を $u_0x_0+u_1x_1+\cdots+u_nx_n=\lambda$ とする。
$\bar{F}$ の中に原点がふくまれていることから, $\bar{F}$ の境界上の点 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ で

$$\frac{u_0}{a_0}=\frac{u_1}{a_1}=\cdots\cdots=\frac{u_n}{a_n}$$

となるものが必ずあり, これについて $a_0x_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n=1$ が $\bar{F}$ の支持面になるが, これは前の支持面と平行であるから, 前の支持面またはそれと対称なものと一致する。

次に

「単位球面について $\bar{F}$ の境界上の点の極面を作ると, これは $\bar{F}$ の支持面である」

$\bar{F}$ の境界上の点を $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n)$ とする。その極面 $\bar{a}_0x_0+\bar{a}_1x_1+\cdots+\bar{a}_nx_n=1$ の上には, 極, 極面の相反性から $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n)$ を通る $\bar{F}$ の支持面の極となる $\bar{F}$ の境界上の点がある。もし上の極面が $\bar{F}$ の支持面でなければ, それ

と平行な支持面で $\overline{a}_0x_0+\overline{a}_1x_1+\cdots+\overline{a}_nx_n=d$ なるものがあり，$d>1$ である。この支持面上の $\mathfrak{K}$ の点を $(a_0, a_1 \cdots a_n)$ とすると，

$$a_0\overline{a}_0+a_1\overline{a}_1+\cdots+a_n\overline{a}_n=d>1$$

であるが，一方

$$a_0x_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n=1$$

は前のことから $\overline{\mathfrak{K}}$ の支持面になり，したがって $\overline{\mathfrak{K}}$ に属する任意の点 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$a_0x_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n\leqq 1$$

となって上のことと矛盾する。ゆえに上の極面は $\mathfrak{K}$ の支持面でなければならない。次に $\mathfrak{K}$ の任意の支持面の極が $\overline{\mathfrak{K}}$ の境界上の点になることは前の場合と同じように結論できる。要約すれば

「$\partial\mathfrak{K}$ と $\partial\overline{\mathfrak{K}}$ とは単位球について相反の関係になっている」

ということができる。

以上 $\partial\mathfrak{K}$ と $\partial\overline{\mathfrak{K}}$ との相反性を利用すると，§3 においてまとめた A)，B)，C) 3つの手つづきが次のものに転換される

A*）$\overline{\mathfrak{K}}$ の境界と x_0 軸との交点を求め，その交点の座標を $x_0=\dfrac{1}{d}$ とする。

B*）上の交点を通る $\mathfrak{K}$ の支持面を求めて

$$dx_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n=1$$

とする

C*）最良近似の係数は B*）をつかって

$$c_1=-\frac{a_1}{d},\quad c_2=-\frac{a_2}{d},\quad \cdots,\quad c_n=-\frac{a_n}{d}$$

となる。

§5. 実行上の提案

最良近似を求めるための§3 での手つづき A), B), C) は $\mathfrak{K}$ が求めにくいのでやりにくい。相反性を利用して轉換した A*), B*), C*) については $\overline{\mathfrak{K}}$ の方がずっと具体的なので前よりは扱いやすいように思われる。それにしても $\overline{\mathfrak{K}}$ を実際に作るのは実はそう簡単でない。そこで次のようなことを考えた。

$\mathfrak{M}$ 内に n 個の点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ をとり、これをつかって E_{n+1} に $(n+1)$ 個の点

$$Q_0(\varepsilon_0 f(P_0),\ \varepsilon_0 f_1(P_0),\ \cdots,\ \varepsilon_0 f_n(P_0))$$
$$Q_1(\varepsilon_1 f(P_1),\ \varepsilon_1 f_1(P_1),\ \cdots,\ \varepsilon_1 f_n(P_1))$$
$$\text{— — — — — — —}$$
$$Q_{n+1}(\varepsilon_n f(P_n),\ \varepsilon_n f_1(P_n),\ \cdots,\ \varepsilon_n f_n(P_n))$$

を作る。ここに $\varepsilon_i = +1$ または -1 のいずれかである。これら $(n+1)$ 個の点は $\mathfrak{F}$ に所属している。そこでこれらの点できめられる平面を作る。この平面の多角形 $Q_0Q_1\cdots Q_n$ の内部にある点はもとより $\overline{\mathfrak{K}}$ に所属する。この平面がこの多角形の内部において x_0-軸に交われば その交点の座標 $x_0 = D$ は §4. A*) における $1/d$ よりは大きくならない。

今もし $P_0, P_1, \cdots, P_n$ を適当にとって交点の座標 D がこの $1/d$ に等しくなれば、この多角形が $\overline{\mathfrak{K}}$ の 1 支持面となり且つ $1/d = D$ となるわけである。そこで

$$\max_{P_i \in \mathfrak{M}} D(P_0, P_1, \cdots, P_n),$$

(ただし交点が多角形 $Q_0Q_1\cdots Q_n$ の内部にある場合) を求めて

のぞみの結果に到達しようというのである。

$D(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ は $(n+1)$ 個の点 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ を通る平面と x_0ー軸との交点である。この平面の方程式を

$$A_0x_0 + A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = 1$$

とすると，$A_0, A_1, \cdots, A_n$ は連立1次方程式

$$A_0\varepsilon_i f(P_i) + A_1\varepsilon_i f_1(P_i) + \cdots + A_n\varepsilon_i f_n(P_i) = 0$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n)$$

の根として求まる。Dはx_0ー軸との交点の座標であるから，$D = 1/A_0$ に外ならず，したがって $A_0 = d$ ということになり，またこれに応ずる最良近似の最大誤差は D そのものになる。

ところでこの $\mathrm{Max}\ D(P_0, \cdots, P_n)$ を求めるのは正攻法では容易でない。そこで手間をいとわずに試行錯誤法で片端から $P_0, \cdots, P_n$ を与えて A_0 を計算し，その中で最大のものを見つけて行こうと考えた。それにしても全くでたらめの試行錯誤では取りとめもなくなるであろうと思われるので $(P_0, \cdots, P_n)$ の走査を Weyl の Gleichverteilung を応用したいわゆる擬モンテカルロ法によってたどろうと考え，$\mathfrak{M}$ が1次元の実な区間である場合について実行してみた1例が次節の結果である。

§6. 一つの実行例

区間 $\left[-\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1},\ +\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right]$，$x$ の7次式による $f(x) = \log_{10}\frac{1+x}{1-x}$ の近似。

対称性から x の奇数次項のみとなるので本文での $f_i(x)$ を

$f_1(x) = x$，　$f_2(x) = x^3$，　$f_3(x) = x^5$，　$f_4(x) = x^7$

のようにとる。また対称性から x の正部分 $\left[0, +\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}=0.51949385\right]$ についてのみ考察すればよい。

一方これのチェビシェフ近似を作るとそれの誤差最大の点はほぼ

$$x_k=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\cos\frac{k\pi}{9}, \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

にある。§5 で動かす点 P_k をこの x_k の附近に動かしたときに目的に到達しそうに思える。なお端の点は誤差最大であるのが通例であるので、ここでは P_0 は $x_0=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}$ の位置に固定した。

これにより

$$P_0=0.51949385$$

$$0.4782 \leqq P_1 \leqq 0.4982$$

$$0.3829 \leqq P_2 \leqq 0.4129$$

$$0.2397 \leqq P_3 \leqq 0.2797$$

$$0.0602 \leqq P_4 \leqq 0.1202$$

の間で、P_1, P_2, P_3, P_4 を動かしまた §5 での ε_i は $\varepsilon_i=(-1)^i$ として、$D(P_1, P_2, P_3, P_4)$ のできるだけ大きいものを求めることにした。

この探索が4次元直方体の中で行われるために Gleichverteilung を利用し、P_1 P_2, P_3 P_4 の座標がそれぞれ

$$0.4782+0.02\,[k\xi_1]$$

$$0.3829+0.03\,[k\xi_2]$$

$$0.2397+0.04\,[k\xi_3]$$

$$0.0602+0.06\,[k\xi_4]$$

となるようにし，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ として直方体内を走査した。ここで $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4$ はいずれも無理数であり，かつたがいに比が無理数であるものである。ここでは

$$\xi_1=\sqrt{2}-1,\quad \xi_2=\sqrt{3}-1,\quad \xi_3=\sqrt{5}-2,\quad \xi_4=\sqrt{7}-2$$

として実行した。

$k=320$ まで計算したところでは A_0 の値は 4.88×10^5 乃至 5.32×10^5 の間を行きわたっていた。

A_0 については最小をさがすことになるが，その最小は $k=202$ のとき

$$P_0=5.1949385\times10^{-1}$$
$$P_1=4.9162278\times10^{-1}$$
$$P_2=4.0912785\times10^{-1}$$
$$P_3=2.6712925\times10^{-1}$$
$$P_4=8.6705751\times10^{-2}$$

で最小値 $A_0=4.5819870\times10^5$ であった。

更にくわしくしらべるために上に得られた点の附近をさらにきざんでさがすことにし，

$$0.484\leqq P_1\leqq0.496,\quad 0.397\leqq P_2\leqq0.413$$
$$0.260\leqq P_3\leqq0.268,\quad 0.085\leqq P_3\leqq0.097$$

の間で同じ方法により 64 回の計算を行った。今度は A_0 は 4.85×10^5 乃至 4.97×10^5 の間を行きわたり最小は $k=1$ のときであって

$$P_0=5.1949385\times10^{-1}$$
$$P_1=4.8897056\times10^{-1}$$

$P_2 = 4.0171281 \times 10^{-1}$

$P_3 = 2.6188854 \times 10^{-1}$

$P_4 = 9.2749016 \times 10^{-2}$

となり, $A_0 = 4.8549712 \times 10^5$ であった。この最後のものにつきさらに A_1, A_2, A_3, A_4 を計算し近似の係数 $C_i = -A_i/A_0$ を出したものは次のようになった。

$C_1 = 8.6855417 \times 10^{-1}$

$C_2 = 2.9115339 \times 10^{-1}$

$C_3 = 1.5360268 \times 10^{-1}$

$C_4 = 2.1140665 \times 10^{-1}$

近似式は

$$\log_{10} \frac{1+x}{1-x} \fallingdotseq c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 + c_4 x^7$$

であり, 最大誤差はほぼ

$1/A_0 = 2.1 \times 10^{-6}$

の近くになる見込のものである。

実際にこれについて誤差曲線を計算してみると, ほとんどよく最良近似の条件(誤差の極大, 極小が絶対値等しく, 符号が交互であること)をみたしている。