数理解析研究所講究録
第36巻 1968年 69-75

線型常微分方程式の解の漸近的性質

東大 理　　木村 俊房

§1. 目的. 線型方程式

(1.1) $$x' = (A + B(t))x \qquad (' = d/dt)$$

において，x は n 次元ベクトル，A は $n \times n$ 定数行列，$B(t)$ は $0 \leqq t < \infty$ で定義された $n \times n$ 行列とする。何等かの意味で $t \to \infty$ のとき $B(t)$ が小さければ，それに応じて (1.1) の解の $t \to \infty$ のときの漸近的行動は

(1.2) $$x' = Ax$$

の解のそれに近いことが予想される。「$t \to \infty$ のとき $B(t)$ が小さい」こととして，たとえば，

(a) $B(t) \to 0 \quad (t \to \infty)$

(b) $\int^{\infty} \| B(t) \| dt < \infty$

などが考えられる。

話の主題は，$B(t)$ が (a), (b) などを満たすときの (1.1) の解の漸近的行動を (1.2) の解のそれと比較することにあるが，ここでは種々の結果を挙げることでなく，このような問題に有効な1つの方法の説明を主な目的としたい。その理由は，この方法は福原氏によって，線型，非線型方程式の特異点の研究に用いられ，これらの問題を統一的に扱えることが示されているが，しかしこの方法が広く知られているとは限らないからである。

従って以下の記述においても必ずしも精密な結果を述べているわけではない。

§2. 福原の問題，常微分方程式系

(2.1) $$x_i' = f_i(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad (i=1, \cdots, n)$$

を条件

(2.2) $$x_i(t_i) = x_i^0 \qquad (i=1, \cdots, n)$$

のもとで解く問題を南雲氏に従って福原の問題という。

定理　数直線 R をコンパクト化 $\bar{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ しておく。$I_1, \cdots, I_n$ は $\bar{R}$ における区間で，それらの内部は1つの開区間 I に一致しているとする。$\varphi_i(t)$, $\omega_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$ は I_i で定義された連続函数で，φ_i は複素数値，ω_i は実数値函数で $\geqq 0$ とする。t_i, x_i^0 $(i=1, \cdots, n)$ は

$$|x_i^0 - \varphi_i(t_i)| \leqq \omega_i(t_i)$$

をみたすとする。(2.1) の右辺 f_i に対し次の仮定をおく。

① f_i の定義域は

$$D: |x_1 - \varphi_1(t)| \leqq \omega_1(t), \cdots, |x_n - \varphi_n(t)| \leqq \omega_n(t), \quad t \in I$$

で，固定された各 t に対し $(x_1, \cdots, x_n)$ について連続，固定された各 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対し t について可測な複素数値函数

② t_i を含む任意の閉区間で可積分な函数 $F_i(t)$ があって

$$|f_i(t, x_1, \cdots, x_n)| \leqq F_i(t) \qquad (i=1, \cdots, n)$$

③ 不等式

(2.3) $$|x_1(t) - \varphi_1(t)| \leqq \omega_1(t), \cdots, |x_n(t) - \varphi_n(t)| \leqq \omega_n(t), \qquad (t \in I)$$

をみたす任意の $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ に対して

(2.4) $$\left|x_i^0 + \int_{t_i}^{t} f_i(s, x_1(s), \cdots, x_n(s))\,ds - \varphi_i(t)\right| \leqq \omega_i(t) \qquad (t \in I).$$

そのとき，(2.1) の解 $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ で，各 $x_i(t)$ は I_i で連続で (2.2) をみたすものが存在する。

注意1.　解はもちろん不等式 (2.3) をみたす。

注意2. F_iが連続，φ_i, ω_iが微分可能のとき，条件③がなりたつための十分条件として，たとえば

$$|F_i-\varphi_i'|\leqq \mathrm{sgn}\,(t-t_i)\,\omega_i'(t)$$

をとることができる。

注意3. 任意の $0<C$ に対し

$$|x_i(t)-\varphi_i(t)|\leqq C\omega_i(t)$$

から

$$\left|x_i^0+\int_{t_i}^{t} f_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t))\,dt\right|\leqq \sigma C\omega_i(t) \qquad (0<\sigma<1 \text{ は定数})$$

がいえれば，解はただ1つである。

§3. Aが対角化可能の場合. xに対し適当な1次変換(定係数)を行なうことによって，Aは最初からJordanの標準形になっているとしてよい。このような変換に対し，$B(t)$の性質(a)，(b)は不変である。

まず，

$$A=\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

$$B(t)\to 0 \quad (t\to\infty)$$

の場合を考えよう。$\Re\lambda_i=\mu_i \quad (i=1, \cdots, n)$ とおく。

変換

$$x=e^{At}y$$

によって，(1.1)は

$$y'=e^{-At}B(t)e^{At}y,$$

成分で書いて，

$$(3.1) \qquad y_i'=\sum_j b_{ij}(t)\,e^{\lambda_j t-\lambda_i t}\,y_i=f_i(t, y_1, \cdots, y_n)$$

となる。

Aの固有値 λ_k を固定し

$$t_i = \begin{cases} +\infty & (\mu_i > \mu_k) \\ \tau & (\mu_i = \mu_k) \\ t_0 & (\mu_i < \mu_k) \end{cases} \qquad ただし \quad t_0 \leqq \tau < \infty$$

とおいて，条件

(3.2) $\qquad y_i(t_i) = y_i^0 \quad (i=1,\cdots,n)$，ただし $y_i^0 = 0 \quad (\mu_i > \mu_k)$

を満たす(3.1)の解を求めてみよう。

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_{ij}(t)| \leqq \beta(t), \quad \beta(t) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

とする。

$$I_i = [t_0, \infty), [t_0, \infty] \text{ のどちらか}, \quad I = (t_0, \infty),$$

$$\varphi_i(t) = y_i^0, \quad \omega_i(t) = C\omega_i(t,\tau) = Ce^{(\mu_k - \mu_i)t + |\int_\tau^t \beta(t)dt|}$$

とおく。ただし C は十分大きい定数，κ は 1 より大きい任意の定数である。定数 δ を

$$|y_i^0| \leqq \delta C\omega_i(t,\tau) \qquad (t_0 \leqq t < \infty)$$

となるようにとる。右辺が t_j で最小となるためには

$$|\mu_k - \mu_i| \geqq \kappa\beta(t) \qquad (\mu_i \neq \mu_k)$$

であればよい。

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| \leqq \omega_i(t)$$

から

$$\left|y_i^0 + \int_{t_i}^t f_i(t, y_1(t), \cdots, y_n(t))dt - \varphi_i(t)\right|$$
$$\leqq \left|\int_{t_i}^t C(1+\delta)\beta(t)\omega_i(t,\tau)dt\right|$$

を得る。この右辺が $C(1+\delta)\frac{1}{\kappa}\omega_i(t,\tau)$ を超えないためには，

$$\mu_i - \mu_k \geqq 2\kappa\beta(t) \qquad \mu_i > \mu_k$$

であればよい。$1+\delta \leqq \kappa$ となるように δ をとり，それに応じて C をとる。

t_0 は $|\mu_i-\mu_k| \geqq 2\kappa\beta(t)$ $(\mu_i \neq \mu_k)$ となるように定める。すると §2 の定理が適用できる。とくに，$\delta = \kappa - 1$，$C = \max\limits_{\mu_j \leqq \mu_k} \left\{ \dfrac{|y_j^0|}{\omega_j(t_j, \tau)} \right\} / (\kappa-1)$ ととれる。

条件 (3.2) を満たす解 $y_j = \psi_j(t)$ に対し，

$$M(\sigma, s_0) = \max_{\mu_j \leqq \mu_k} \left\{ \frac{|\psi_j(s_j)|}{\omega_j(s_j, \sigma)} \right\}, \qquad \text{ただし } s_j = \begin{cases} +\infty & \mu_j > \mu_k \\ \sigma & \mu_j = \mu_k \\ s_0 & \mu_j < \mu_k \end{cases}$$

とおくと，

$$|\psi_j(t) - \psi_j(t_j)| \leqq \frac{M(\tau, t_0)}{\kappa - 1}\, \omega_j(t, \tau)$$

が得られる。(3.2) をみたす解と，条件 $y_j(s) = \psi_j(s_j)$ をみたす解は等しいから

$$(3.3) \qquad |\psi_j(t) - \psi_j(s_j)| \leqq \frac{M(\sigma, s_0)}{\kappa - 1}\, \omega(t, \sigma).$$

ここで $t = t_j$ とおいて

$$(3.4) \qquad |y_j^0| \leqq \frac{\kappa}{\kappa-1} M(\sigma, s_0)\, \omega(t, \sigma)$$

を得る。$\mu_j < \mu_k$ のとき $y_j^0 = 0$ とおけば，(3.3)，(3.4) を使って，対応する (1.1) の解 $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ に対する評価式

$$\frac{\kappa-1}{\kappa} M_1(\tau)\, e^{\mu_k(t-\tau) - \kappa\left|\int_\tau^t \beta(t)dt\right|} \leqq \max_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqq \frac{\kappa}{\kappa-1} M_1(\tau)\, e^{\mu_k(t-\tau) + \kappa\left|\int_\tau^t \beta(t)dt\right|}$$

が得られる。ここで $M_1(\tau) = \max\limits_{\mu_j = \mu_k} \{ |x_j(\tau)| \}$.

$B(t)$ が

$$\int^\infty \| B(t) \| dt < \infty$$

をみたすときには，ずっと簡単に，各固有値 λ_k に対し

$$|x_i(t) - \delta_i^k e^{\lambda_k t}| \leqq o(1)\, e^{\mu_k t}$$

をみたす解の存在がいえる。それには

$$t_i = +\infty \ (\mu_i > \mu_k), \quad \tau \ (\mu_i \leqq \mu_k), \quad y_i^0 = \delta_i^k$$

$$\varphi_i = \delta_i^k, \quad \omega_i(t) = \sigma_i(t)\, e^{(\mu_k - \mu_i)t}$$

とおいて定理を適用すればよい.

§4. A が対角化不可能の場合. A 自身が Jordan の標準形になっていて, つぎの形をしているとする。

$$A=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_e(\lambda_e) \end{bmatrix} \qquad J_i(\lambda_i)=\left.\begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}\right\} n_i$$

$r=\max\{n_1,\cdots,n_e\}-1$ とおく。

$B(t)\longrightarrow 0$ $(t\to\infty)$ のときには, つぎの条件をみたす $\beta(t)$ をとる:

$$\sum_{k=1}^{n}|b_{jk}(t)|\leqq\beta(t)$$

$$\beta(t)\to 0 \quad (t\to\infty)$$

$$\beta'(t)=O(\beta(t)^{1+\frac{1}{r}}) \quad (t\to\infty).$$

変換

$$y=\begin{bmatrix} P_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_e(t) \end{bmatrix} z, \qquad P_i(t)=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \beta(t)^{-\frac{1}{r}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta(t)^{-\frac{n_i-1}{r}} \end{bmatrix}$$

によって, z の方程式は

$$\frac{dz}{dt}=(\Lambda+C(t))z$$

となる. ここで

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \Lambda_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_e(\lambda_e) \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix},$$

$$\|C(t)\|=O(\beta(t)^{\frac{1}{r}}).$$

これで §3 の場合に帰着した。

つぎに，(b) より強い条件

(b′) $$\int^{\infty} t^{r} \| B(t) \| \, dt < \infty$$

を仮定すれば，変換

$$y = e^{Dt} z, \qquad D = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_e \end{bmatrix}, \qquad D_i = \left.\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} n_i$$

を施して得られる方程式

$$\frac{dz}{dt} = \left(\Lambda + e^{-Dt} B(t) e^{Dt} \right) z$$

に定理を適用して，

$$| y - t^{h} e^{\lambda_k t} c_{hk} | = o\left(t^{h} e^{\Re \lambda_k t} \right) \qquad (1 \leqq h \leqq n_k,\ 1 \leqq k \leqq e)$$

をみたす解の存在がいえる。