数理解析研究所講究録
第37巻 1968年 1-17

微分方程式の数値解法における安定性

東京理科大　清水辰次郎
林　健児

§1　収束，安定，各種不安定

常微分方程式 $y'=f(x,y)$ の初期値 $y(0)=y_0$ なる解の数値解法の安定性について考える。

$f(x,y)$ は $0\leqq x\leqq a$, $|y-y_0|\leqq b$ で適当な条件を満足し，解は $x=0$ から $x=x_n$ まで存在するものとする。

数値解法につき，L. Fox: Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations には不安定性につき，Inherent instability, Partial instability, Strong instability, Weak instability と列挙してそれぞれ定義が載っている。

或る解法が収束(Convergent)であるとは刻み h，ステップ数 n とし，$nh=x_n$ とするとき，x_n を一つ定め，$h\to 0$（したがって $n\to\infty$）とするとき $0\leqq x\leqq x_n$ なる x について数値解 y_m が方程式の真の解 $y(x_m)$ に一様に収束することをいう。

或る解法が安定(stable)であるとは刻み h を一定にして n を増すとき十分大きな n については数値解の漸近的性質が真の解のそれと同じになるときをいう。

Inherent instability は計算途中の四捨五入等のためにお

こるもので数値解法には避けられないもの。

Partial instability は刻みhが或る値より大きければ不安定，或る値より小さければ安定となるようなもの。

Strong instability は収束もせず不安定でもあるもの。

Weak instability は収束はするが不安定なもの。

オ一は方程式によらず方法のみにより，オ二，オ三は方程式によって不安定が起ったりおこらなかったりする。

y, f はベクトルとして，方程式の連立したものと考えてもいいが、簡単のため一階の方程式として考える。

§2　収束条件と数値解法

本節では主として線型多段法（linear multi-step法）

$$y_{n+k}+\alpha_{k-1}y_{n+k-1}+\cdots\cdots+\alpha_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k}+\beta_{k-1}f_{n+k-1}+\cdots\cdots+\beta_0 f_n)$$

$$f_m = f(x_m, y_m)$$

を考える。そして $\rho(z)=z^k+\alpha_{k-1}z^{k-1}+\cdots\cdots+\alpha_0$, $\sigma(z)=\beta_k z^k+\beta_{k-1}z^{k-1}+\cdots\cdots+\beta_0$

とおく。

そのときDahlquistにより方法が収束するための必要十分条件は　$\rho(z)=0$ の根の絶対値は1または1より小で、絶対値1なる根は単根

$\rho(1)=0$,　$\rho'(1)=\sigma(1)$

なることが知られている。(P. Henrici : Discrete Variable Method)

よって Strong instability のおこる方法は上記の条件を満足せぬものということができる。

以上のことは方法が収束すれば存在域内の x を定めるとき十分刻みを小さくすれば 0 から x までの真の解に数値解が限りなく近づくということでもあるが、実際の数値解法ではそのように刻みを小さくすれば四捨五入誤差が増大し、とても実用的ではない。

それゆえ実際には x の位置を定めるのではなく、刻み h を十分小さくしかし一定にして、n を増して行く方法が採られる。(真の解は必要なところまで存在すると仮定する)

以下、数値解法は収束条件を満足する方法に限り、四捨五入誤差は考えない。

§3 Weak instability

刻み h を一定として数値解法をする場合には Weak instability と Partial instability が問題となる。

$y' = Ay$ (A は正または負の定数), $y(0)=1$ なる真の解は $y = e^{Ax}$ であるが、$A<0$ なる場合方法によっては n が或る程度大となると数値解は絶対値の大きな正, 負の向の振動を起す。中点則、Milne 法がこれに属する。これが weakly unstable (weakly stable) といわれている。

いま中点法: $y_{n+2}=y_n+2hf_{n+1}$ を $y'=\pm y$ に適用すると $y_{n+2}=y_n\pm 2hy_{n+1}$ となり，これを定差方程式とみると，± に対応してそれぞれ $y_n^+=c_1\rho_2^n+c_2(-1)^n\rho_1^n$，$y_n^-=c_1\rho_1^n+c_2\rho_2^n$; $\rho_1=-h+\sqrt{1+h^2}$ $\rho_2=h+\sqrt{1+h^2}$，(c_1, c_2 は任意常数) なる一般解を得る．さらに出発値として $y_1^\pm=1$，$y_1^\pm=e^{\pm h}$ にとれば ± に応じて

$$c_1\fallingdotseq 1+\frac{h^3}{12},\quad c_2\fallingdotseq -\frac{h^3}{7}\quad ;\quad c_1\fallingdotseq 1-\frac{h^3}{6},\quad c_2\fallingdotseq \frac{h^3}{12}$$

となり，y_n^+ では $c_1\rho_2^n$，y_n^- では $c_1\rho_1^n$ が真の解を近似する項であり他の項が不安定性を起す成分である。(表1)

(表1)

$h=0.1$	$y'=y$			$y'=-y$		
x	$c_1\rho_2^n$	e_n	$\left\lvert\frac{c_1\rho_1^n}{e^{-x}}\right\rvert$	$c_1\rho_1^n$	e_n	$\left\lvert\frac{c_2\rho_2^n}{e^{x}}\right\rvert$
0.5	1.6475 (0)	1.2769 (-3)	9.1299 (-5)	6.0699 (-1)	-4.5804 (-4)	7.4638 (-5)
1.0	2.7140 (0)	4.2589 (-3)	9.1374 (-5)	3.6846 (-1)	-5.8337 (-4)	7.4576 (-5)
2.0	7.3652 (0)	2.3808 (-2)	9.1526 (-5)	1.3577 (-1)	-4.3970 (-4)	7.4451 (-5)
3.0	1.9987 (1)	9.7907 (-2)	9.1678 (-5)	5.0032 (-2)	-2.4470 (-4)	7.4329 (-5)
4.0	5.4241 (1)	3.5621 (-1)	9.1830 (-5)	1.8436 (-2)	-1.2059 (-4)	7.4205 (-5)

この現象の抑制については多くの文献があり，たとえば，Stetter は Milne の修正子を反復させずに新しい予測子をつくって不安定の起らぬ方法を示し、Hamming は更に一般的研究より予測子は Milne のをつかい，新しい修正子をつくって，

不安定のおこらぬ方法を示した。(weakly stable でないものを strong stable という) 伊理氏は y_n, y_{n-1}, y_{n-2} 等の或る種の平均を考えることにより不安定のおこるのを防止する方法を提案した。

ところが strongly stable な方法，たとえば Euler 法，梯型法，Hamming 法についても $y' = -xy$ ($y(0)=1$ なる真の解は $y=e^{-\frac{x^2}{3}}$) の数値解法においては，h をいかに小さくとっても，n が (すなわち x が) 大となると数値解 y_n は正，負の値の間を振動することがわかる。

何故ならば

$$\text{Euler 法；}\quad y_{n+1} = y_n - 2h^2 n\, y_n = (1-2h^2 n)\, y_n$$

ゆえに

$$y_{n+1} = (1-2nh^2)(1-\overline{2n-1}\,h^2)\cdots\cdots(1-4h^2)(1-2h^2)\,y_1$$

$$\text{梯型法；}\quad y_{n+1} = y_n - \frac{h}{2}(nh\,y_n + \overline{n+1}\,h\,y_{n+1})$$

ゆえに

$$y_{n+1} = \frac{1-\frac{n}{2}h^2}{1+\frac{n+1}{2}h^2}\;\frac{1-\frac{n-1}{2}h^2}{1+\frac{n}{2}h^2}\cdots\cdots\frac{1-\frac{1}{2}h^2}{1+h^2}\,y_1$$

Euler 法では x が増大すれば絶対値の無限に増大する正負の値の間を振動し，梯型法では n とともに y_n は零に近づくが同じく正，負の間を振動する。しかも $|e^{x}|/y_n$ は無限大に増大する。

Hamming 修正子

$$y_{n+1}=\frac{9}{8}y_n-\frac{1}{8}y_{n-2}+\frac{3}{8}\{(n-1)h^2y_{n-1}-2nh^2y_n-(n+1)h^2y_{n+1}\}$$

から定差方程式の性質からもわかるが，hが一定でnが増大するのであるから$nh=A$と考え実数Aが十分大きな$y'=-Ay$なる方程式に適用すれば

$$y_{n+1}\left(1+\frac{3}{8}hA\right)=\left(\frac{9}{8}-\frac{6}{8}hA\right)y_n+\frac{3}{8}hAy_{n-1}-\frac{1}{8}y_{n-2}$$

この定差方程式の独立な三つの解をs_1^n，s_2^n，s_3^nとすれば，Aが大となって$\frac{3}{8}hA-\frac{42}{8}>0$となれば，$s_1, s_2, s_3$のうち一つは負で絶対値が1より大きい。

よってHammingの修正子もnが増大すればy_nは正，負の値の間を無限に振動する。

このことからみると安定性がweakとかstrongとかいってもそれは$y'=Ay$なる特殊な方程式についてしか問題とならないことがわかる。

§4　$\frac{dy}{dx}=-xy$

まず§3で述べた多段法の一つである中点則を適用した場合を考えてみると，$y_{n+2}=y_n\pm 2(n+1)h^2y_{n+1}$なる定差方程式と見なされる。これらの一般解は＋の場合$y_n^+=c_0K_n\left(\frac{1}{h^2}\right)+d_0(-1)^nI_n\left(\frac{1}{h^2}\right)$，－の場合$y_n^-=c_0I_n\left(\frac{1}{h^2}\right)+d_0(-1)^nK_n\left(\frac{1}{h^2}\right)$，$I_n$，$K_n$は変形ベッセル関数，となる。さらに出発値として

$y_0^{\pm} = 1$, $y_1^{\pm} = e^{\pm \frac{h^2}{2}}$ とれば，それぞれ漸近的に

$$\begin{cases} C_0 \sim \dfrac{e^{\frac{1}{h^2}}}{2\sqrt{2\pi}}\, h\,(1+o(h^2)) \\ d_0 \sim \dfrac{45\sqrt{2\pi}}{2^e}\, e^{-\frac{1}{h^2}}\, h^3 (1+o(h^2)) \end{cases} \qquad \begin{cases} C_0 \sim \dfrac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}\sqrt{2\pi}\,(1+o(h^2)) \\ d_0 \sim -\dfrac{11}{32}\,\dfrac{e^{\frac{1}{h^2}}}{\sqrt{2\pi}}\, h^3 (1+o(h^2)) \end{cases}$$

で評価できる。特に $y' = -xy$ の場合の係数は $y' = -y$ の係数の場合と異った性質を持つことがわかる。(表2)

(表2)

h	$y'=y$		$y'=xy$		$y'=-y$		$y'=-xy$	
係数	C_1	C_2	C_0	d_0	C_1	C_2	C_0	d_0
0.2	1.000(0)	-7.839(-4)	2.887(11)	-3.410(-14)	9.995(-1)	5.262(-4)	1.732(-10)	-5.879(7)
0.1	1.000(0)	-9.122(-5)	2.148(44)	-1.159(-47)	9.999(-1)	7.470(-5)	9.313(-43)	-2.694(39)
0.08	1.000(0)	-4.594(-5)	7.206(68)	-4.415(-72)	9.999_6(-1)	3.915(-5)	4.336(-67)	-7.376(63)

y_n^+ では $C_0 K_n$，y_n^- では $C_0 I_n$ が真の解を近似する項であり，他の項が不安定性をおこす成分である。(表3)

つぎに一段法 (One step 法) について考える。Euler 法では前述のように $y_{n+1} = (1 - nh^2)\, y_n$ となり正，負の間を振動する。($y' = -xy$ の場合) また改良 Euler 法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h\,[\,f_n + f(x_n + h,\ y_n + h f_n)\,]$$

については $\quad y_{n+1} = \left(1 \pm \dfrac{2n+1}{2} h^2 + \dfrac{n(n+1)}{2} h^4\right) y_n$

（表3）

$h=0.1$	$y'=xy$			$y'=-xy$		
x	C_0K_n	e_n	$C_1I_n/e^{-\frac{x^2}{2}}$	C_0I_n	e_n	$C_1K_n/e^{\frac{x^2}{2}}$
0.5	1.1324 (0)	7.1496(-4)	1.2442 (-5)	8.8137(-1)	5.2266 (-4)	1.2537 (-5)
1.0	1.6440(0)	4.7156 (-3)	1.2422 (-5)	6.0527(-1)	1.2643 (-3)	1.2509 (-5)
2.0	7.2697(0)	1.1932 (-1)	1.2408 (-5)	1.3489(-1)	4.4703 (-4)	1.2342 (-5)
3.0	8.5269 (1)	4.7483 (0)	1.2588(-5)	1.1233(-2)	-1.2423 (-4)	1.1883 (-5)
4.0	2.5951 (3)	3.8537 (2)	1.3277 (-5)	3.5779(-4)	-2.2326(-5)	1.0921 (-5)

Modified Euler 法

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{h}{2} f_n\right)$$

については　$y_{n+1} = \left(1 \pm \frac{2n+1}{2} h^2 + \frac{n(2n+1)}{4} h^4\right) y_n$　となる。

いずれも，$y'=-xy$ の場合，はじめは減少するがついには無限に増大する。（$h=0.1$，$x=20$ から）（表6参照）

同様な論法で Kutta 第三階法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$k_1 = f_1$，$k_2 = f\left[x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2} f_n\right]$，$k_3 = f\left(x_n + h,\ y_n - hf_n + 2hf\left[x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2} f_n\right]\right)$

では n^3 の項がきいて，$y'=-xy$ の場合，正，負の間を振動する。

また普通の Runge-Kutta 法では，$y'=-xy$ の場合，n^4 がきいて正の無限大になる。

すなわち $y'=-xy$ の場合には h を小さく定めても一定である限り必らず無限に振動するか或は無限に増大する。

それゆえ係数に独立変数を含んでいる方程式については非線型方程式までいかずとも予想外の困難が数値解法には伴っていることを知る。

（表6）

$y'=-xy$	$h=0.1$	
x_n	y_n	e_n
5.	0.50648(-5)	0.13382(-5)
10.	0.18378(-18)	0.18359(-18)
15.	0.59615(-32)	0.59615(-32)
20.	0.23852(-37)	0.23852(-37)
25.	0.42254(-32)	0.42254(-32)
30.	0.76538(-17)	0.76538(-17)

§5 $\frac{dy}{dx}=-xy$ への平滑子の適用

多段法を用いる場合におこる振動現象の抑制方法の一つに或る種の平均値を利用する平滑方法が考えられている。その代表的な方法として、平滑子(I)

$$F_1(y_n)=\frac{1}{16}(y_{n+2}+4y_{n+1}+6y_n+4y_{n-1}+y_{n-2})$$

と、平滑子(II)（中点則に対して）

$$F_2(y_n)=\frac{1}{16}(11y_n+12y_{n-1}-6y_{n-2}-4y_{n-3}+3y_{n-4})$$

がある。ここでは上記の方程式を中点則を用いて解く場合の平滑効果について考える。平滑間隔を N として $y_n=c_0I_n+d_0\overline{K}_n$ $(\overline{K}_n=(-1)^nK_n)$ に平滑子を適用した結果として

$$F_1(y_N)=c_0I_N+d_0\overline{K}_N+\Delta_N+\delta_N$$

$$\begin{cases}\Delta_N=\frac{c_0}{8}\left[(N^2h^4-5)I_N+(4-h^2)I_N'+I_N''\right]\\ \delta_N=\frac{d_0}{8}\left[(N^2h^4-5)\overline{K}_N+(4-h^2)\overline{K}_N'+\overline{K}_N''\right]\end{cases}$$

$$F_2(y_N) = c_0 I_N + d_0 K_N + \alpha(N)(c_0 I_N + d_0 \bar{K}_N) + \beta(N)(c_0 I_N' + d_0 \bar{K}_N') + \gamma(N)(c_0 I_N'' + d_0 \bar{K}_N'')$$

$$\alpha(N) = \frac{1}{4}(-2 + 4h^2 - 3(N^3 - 4N + 6)h^4 - 4N(N-1)(N-2)h^6 - 6N(N-2)(N-3)h^8)$$

$$\beta(N) = \frac{1}{4}(2 - 3h^2 - 4(N-1)(N-2)h^4 + 6N(N-2)(N-3)h^6)$$

$$\gamma(N) = \frac{3}{2}(N-2)(N-3)h^4$$

を得る。平滑方法としては $\eta_N = F(y_N)$, $\eta_{N+1} = F(y_{N+1})$ を新たな出発値としてつぎに平滑するまで計算するから、差分方程式の解は

$$\begin{cases} c_1 I_N + d_1 \bar{K}_N = \eta_N \\ c_1 I_{N+1} + d_1 \bar{K}_{N+1} = \eta_{N+1} \end{cases}$$

より求まる c_1, d_1 により $y_n = c_1 I_n + d_1 \bar{K}_n$ と表わせる。

さらに ν 回平滑子を適用し、$(\nu+1)$ 回平滑子を適用するまで差分方程式の解

$y_n = c_\nu I_n + d_\nu \bar{K}_N$ の係数は、

$$\begin{cases} c_\nu I_{\nu N} + d_\nu \bar{K}_{\nu N} = \eta_{\nu N} \\ c_\nu I_{\nu N+1} + d_\nu \bar{K}_{\nu N} = \eta_{\nu N+1} \end{cases}$$

より定まる。$\eta_{\nu N}$, $\eta_{\nu N+1}$ の具体的な型は前述の式で N のかわりに νN, $\nu N+1$ が入った式となる。

まず $\nu N h < 1$ なる場合 c_ν, d_ν の状態について考えてみるとする。この場合ベッセル関数の漸近展開式を用いて，$c_\nu, c_{\nu-1}$;

$d_\nu, d_{\nu-1}$ についての漸化式を得る。

平滑子(I)の場合：

$$\begin{cases} c_\nu = c_{\nu-1}\left(1-\dfrac{\nu N+2}{4}\hbar^2+\cdots\cdots\right)+(-1)^{\nu N}d_{\nu-1}\dfrac{5\pi}{16}e^{-\frac{2}{\hbar^2}}\left(1+\dfrac{4\nu N+7}{5}\hbar^2+\cdots\right) \\ d_\nu = -(2\nu N)\hbar^2 d_{\nu-1}(1+\cdots\cdots)+(-1)^{\nu N+1}c_{\nu-1}\dfrac{\hbar^4}{2\pi}e^{\frac{2}{\hbar^2}}((\nu N+1)+\cdots\cdots) \end{cases}$$

平滑子(II)の場合：

$$\begin{cases} c_\nu = c_{\nu-1}\left(1-\dfrac{\nu N}{4}\hbar^2+\cdots\cdots\right)+(-1)^{\nu N}d_{\nu-1}\dfrac{\pi}{4}e^{-\frac{2}{\hbar^2}}\left((\nu N+\tfrac{1}{2})(\nu N+2)\hbar^2+\cdots\right) \\ d_\nu = d_{\nu-1}\left(3(\nu N-\tfrac{3}{2})\hbar^2+\cdots\right)+(-1)^{\nu N}c_{\nu-1}\dfrac{3}{4\pi}\hbar^4 e^{\frac{2}{\hbar^2}}(1+\cdots\cdots\cdots) \end{cases}$$

よって

$\nu N\hbar<1$ のとき

平滑子(I)の場合

$$\begin{cases} c_\nu = c_0\left(1-\dfrac{(1+2+\cdots+\nu)N+2\cdot\nu}{4}\hbar^2+\cdots\cdots\right) \\ d_\nu = (-1)^{\nu N}d_0\left(\dfrac{32}{11}(\nu N+1)+\cdots\cdots\cdots\right) \end{cases}$$

となり、平滑をほどこすごとに不安定性を増大させている。

また

平滑子(II)の場合

$$\begin{cases} c_\nu = c_0\left(1-\dfrac{\nu}{8}(\nu+5)\hbar^2+\cdots\cdots\right) \\ d_\nu = d_0\left((-1)^{\nu(N+1)}\dfrac{16}{3}+\cdots\cdots\right) \end{cases}$$

となり、d_1 が d_0 の約5倍となり、以下一定となることが解る。

（表4）

$h=0.1$ $N=5$	平滑子(I)		平滑子(II)	
ν	C_ν	d_ν	C_ν	d_ν
0	9.3132 (-43)	-2.6940 (39)	9.3132 (-43)	-2.6940 (39)
1	9.2762 (-43)	-3.9403 (40)	9.3094 (-43)	1.3681 (40)
2	9.2715 (-43)	4.0951 (40)	9.2994 (-43)	-3.7425 (39)
3	9.3218 (-43)	-1.8699 (40)	9.2888 (-43)	-1.3512 (39)

つぎにxが大きいときについて考える。ここでは無縁成分$\overline{K}_n$について直接考えないで、定差方程式にもどって考えるのが便利である。すなわち無縁成分に対応する定差方程式として　$(y'=-kxy)$

$$y_{n+2}=y_n-(n+1)Hy_{n+1} \qquad (H=2kh^2)$$

$$y_0=1\ ,\ y_1=-(1+\varepsilon)=-\alpha\ ,\ \varepsilon=o(h)$$

より出発する。

ここで

$$\begin{cases} y_{2m}=1+a_{2m,1}\alpha H+a_{2m,2}\alpha H^2+\cdots\cdots+a_{2m,2m-1}\alpha H^{2m-1} \\ y_{2m+1}=-(\alpha+b_{2m+1,1}\alpha H+b_{2m+1,2}\alpha H^2+\cdots\cdots+b_{2m+1,2m}\alpha H^{2m}) \end{cases}$$

とおけば、係数間に次の関係式が成立する。

$$\begin{cases} a_{2m,k}=a_{2m-2,k}+(2m-1)\,b_{2m-1,k-1} \\ b_{2m+1,k}=b_{2m-1,k}+2m\,a_{2m,k-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2m,0}=1, & b_{2m+1,0}=1 \\ a_{2m,1}=m^2, & b_{2m+1,1}=m(m+1) \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} a_{2m,k}=\alpha_{1,k}m^{2k}+\alpha_{2,k}m^{2k-1}+\cdots\cdots \\ b_{2m+1,k}=\beta_{1,k}m^{2k}+\beta_{2,k}m^{2k-1}+\cdots\cdots \end{cases}$$

とおくことにより，次の近似式を得る。

$$y_{2m}\approx 1+\alpha\sum_{l=0}^{m-1}\left\{\frac{m^{4l+2}}{(2l+1)!}-\frac{m^{4l}}{3(2l)!}l(l+1)\right\}H^{2l+1}$$
$$+\sum_{l=1}^{m-1}\left\{\frac{m^{4l}}{(2l)!}-\frac{m^{4l-2}}{3(2l-1)!}\left(l^2+\frac{1}{2}\right)\right\}H^{2l}$$

$$y_{2m+1}\approx-\Big[\alpha+\sum_{l=0}^{m-1}\left\{\frac{m^{4l+2}}{(2l+1)!}+\frac{m^{4l+1}}{(2l)!}-\frac{m^{4l}}{3(2l)!}l(l-2)\right\}H^{2l+1}$$
$$+\alpha\sum_{l=1}^{m}\left\{\frac{m^{4l}}{(2l)!}+\frac{m^{4l-1}}{(2l-1)!}-\frac{m^{4l-2}}{3(2l-1)!}\left(l^2-l+\frac{1}{2}\right)\right\}H^{2l}\Big]$$

いま平滑子(II)を施すと

$$y_{2m}\approx y_{2m+1}\approx\left|\frac{k^2}{4}x^2h^2e^{\frac{k}{2}x^2}\right|$$

となることから，平滑子によって，h^2のorderにはなっているが，その係数$x^2e^{\frac{k}{2}x^2}$のために，xが大きいとき，すなわちmが大きいとき，平滑子が有効でなくなる。

さらに中点則よりも，不安定が著しく表われる例として

$$y_{n+2}=y_n+h\{Af_{n+1}+Bf_n\}$$

を考える。（中点則は$A=2$，$B=0$）

収束のための必要十分条件は　$A+B=2$，不安定現象の起

るのは A−B のときで，この差が大きいほど不安定は起り易くなる。この場合 y_n に関する差分方程式は

$$\begin{cases} y_{n+2} = y_n - \{A(n+1)\,y_{n+1} + Bn\,y_n\}H & (H = kh^2) \\ y_0 = 1, \quad y_1 = -\alpha \end{cases}$$

となり，お と同様にして

$$\begin{cases} y_{2m} = 1 + a_{2m,1}H + a_{2m,2}H^2 + \cdots\cdots + (2m-1)!\,A^{2m-1}H^{2m-1} \\ y_{2m+1} = -(\alpha + b_{2m+1,1}H + b_{2m+1,2}H^2 + \cdots\cdots + (2m)!\,A^{2m}H^{2m}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2m,0} = 1, \quad a_{2m,1} = (A\alpha - B)m^2 + Bm, \cdots\cdots \\ b_{2m+1,0} = \alpha, \quad b_{2m+1,1} = (A - B\alpha)m^2 + Am, \cdots\cdots \end{cases}$$

となる。

（表5）

平滑子なし		平滑子（I）				平滑子（II）			
		(10.10)		(25.10)		(10.10)		(25.10)	
x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n
2.40	2.7817(-3)	4.68	3.9227(-10)	4.88	5.1683(-11)	3.40	9.0750(-6)	3.52	3.8122(-6)
2.44	3.1008(-3)	4.72	4.5705(-10)	4.92	8.8124(-11)	3.44	9.3713(-6)	3.56	4.4034(-6)
2.48	1.5711(-3)	*4.76	2.4446(-10)	*4.96	3.7954(-11)	3.48	3.9170(-6)	3.60	1.3040(-6)

$(h = 0.04)$

§6　Partial instability

$y' = -10y + 9 - 10x$ を一段法のテーラー展開の二次の項までとった方法で計算すると，$y_{n+1} = (1 - 10h + 50h^2)y_n + h(9-$

$10x_n)+50h^2(x_n-1)$ となる。$(1-10h+50h^2)=B$ とおくと $h>0.2$ のとき $B>1$, $h<0.2$ のとき $0<B<1$, そして $y(0)=2$ とすれば真の解は $y=10^{-10x}-x+1$ で $x_n=nh$ とおくと

$$y_{n+1}=1-(n+1)h+(1-10h+50h^2)^n e^{-10h}$$

となり $h>0.2$ ならば不安定となり, $h<0.2$ ならば安定, $|e_n/y_n|\to 0$, このような場合を partial instability というが上の場合もし $y(0)=1$ とすると $x_n=nh$ に対し $y_{n+1}=1-(n+1)h$ となり真の解 $y=-x+1$ となり h がなんであろうと不安定はおこらない。このように partial instability は方法, 方程式初期値に従属する。

この現象は非線型方程式の場合, 極めて注意を要することになる。たとえば $y'=y^6$ において $y(0)=-5$ なる解は常に $y<0$ で, $x\to\infty$ のとき $y\to 0$ である。ところが Euler 法でもなんでも $h=0.0001$ にとると $y(h)>0$ となりそれから先は $y>0$, $x\to\infty$ で $y\to\infty$ になってしまう。

方程式により初期値によって刻み h は小さくしなければならない例となる。しかし, 刻み h が大きければ不安定となり、十分小さければ不安定が起らないということは, 普通のことのように思われるので, 特に名前などつける要があるかどうかと思われる。むしろ初期値によって刻み h は十分小さく採らなければならないという注意のように解すべきではなかろ

うか。そして上の例のように刻みhがいかに大きくとも完全に安定であったり、いかに小さく採ってもいつか不安定になってしまうものの方が注目すべきではなかろうか。

しかし十分小さい刻みhに対し安定となるという考え方は安定の定義がはっきりしないのでそのように考えられているが，実際には一定のhに対し安定でないという方が普通のようである。たとえば $y'=-y$ を Euler 法で近似するとき、$y_n=(1-h)^n y_0$ となるが，誤差 $(1-h)^n-e^{-nh}=e_n$ は $e_n/e^{-nh}\to -1\ (n\to\infty)$．これからみればむしろ十分小さな刻み$h$にして安定となるのがめづらしいのであって，本節の線型方程式とその数値解法は偶然そうなっている。(註)

安定の定義は $\left|\dfrac{e_n}{y_n}\right|\ll 1$，$\left|\dfrac{e_n}{y(x_n)}\right|\ll 1$ も成立するくらいでないといけないのではなかろうか。

(註)　$e_n/y_n\to 1$ も安定だと仮りにすると次のようなことが起る。 $y_{n+2}-y_n=h(\alpha f_{n+1}+\beta f_n)$ は $\alpha+\beta=4$，$\alpha<\beta$（たとえば $\alpha=1,\ \beta=3$）のとき $y'=-y$ に対して，$y(0)=1$ のとき $nh=x_n$ を一定として $n\to\infty$ とすると $y_n\to e^{-2x}$。
そして $e_n=e^{-2nh}-e^{-nh}$（真の解は $y=e^{-x}$）であり，
$\dfrac{e^{-2nh}-e^{-nh}}{e^{-nh}}\to -1$。 ところが上記の方法は Dahlquist の収束でない方法である。

尚、Todd: Survey of Numerical Analysisでは安定の定義なしにnumerical instabilityという語をつかっている。そしてmulttstep法につきDahlqnistの$P(z)=0$の根に関する条件を満足するものを安定と定義しているが、one step法は$P(z)=0$の根に$z=1$だけであるから$y_{n+1}=y_n+hf_n+h\varphi_n$, φ_nに何をつけても安定だということになり妙なことになる。

参考文献

L.Fox: Numerical Solution of ordinary and partial Differential Equations (1962)

P.Henrici: Discrete variable method in ordinary differential equations (1962)

G.Dahlqnist: Convagence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations Math. Scand.4 (1956),p.p.33-53

R.W.Hamming: Stable predictor-corrector methods for ordinary differential equations.J.Assoc.C.M. 6(1959)p.p.37-47

H.J.Stetter: Stabilizing predictor for weakly unstable correctors. Mathematics of Computation 19 (1965),p.p.84-89