数理解析研究所講究録
第37巻 1968年 67-69

差分法による初期値問題の数値解法
――― 安定性の理論 ―――

東大 理　藤田 宏

（口頭で説明する記号も用いて主目標だけを記す.）

1. 理論面に関する限り差分法による初期値問題の数値解法の中心課題は安定性の理論である. ところで安定性（stability）とは何か. これがいまだに論争の対象となり得る. 理論的に優雅な成功をおさめた Lax-Richtmyer のそれは多くの実際家, ロシヤ学派, 実際家に同情的な Forsythe, Wasow 等の理論家（von Neumann も含まれる！）を満足させているとはいえない. 我々のシンポジウムで以前に論争めいた討論があったことも事実である.

筆者の目的は Lax, Richmyer, Forsythe, Wasow および地下の von Neumann をすべて満足させる安定性の理論を構成する――ことを試みることである. その key point は Banach 空間の枠にとらわれず, より広い関数

空間をも採用することである．

実際計算からはやゝ遠くなるが，簡単の為に $u=u(t,x)$ ($t\geq 0$ ， $x\in R^m$) に対する Cauchy 問題のように，差分方程式の解も空間変数 x に関して R^m 上で定義されている場合を考える．

2. Lax-Richtmyer の理論の復習．（省略）

3. 関数空間 $\mathfrak{X}$ における作用素 G_h は $u(n\tau)=G_h^n u(0)$ によって差分方程式の解 $u(n\tau)$ ($n=0,1,\cdots$) を与える解作用素であるとする．τ, h を 0 にするに際しては（簡単の為に）

(*) $$\tau = K h^{\gamma} \qquad (0<h\leq h_0)$$

が正定数 K, γ に関して成立しているものとする．$\mathfrak{X}$ は一般に点列完備な線形位相空間（l. c. l. t. s）である．このとき，

（定義） $\{G_h^n\ ;\ 0\leq n\tau\leq 1\}$ が $\mathfrak{X}$ の中の作用素の系として同等連続（equi-continuous）であるとき，考えている差分方程式は $\mathfrak{X}$-stable であるという．

4. Rough な表現であるが次の定理が成立する．

（定理） Stability + consistency $\Rightarrow$ convergence.

（定理） Consistency + convergence + well-posedness $\Rightarrow$ stability.

5. 定数係数の Cauchy 問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha| \le \nu} A_\alpha D^\alpha u, \qquad u|_{t=0} = a$$

および，これに対応する explicit 定数係数差分方程式を考える．u は N-vector function である．この差分方程式の amplification matrix を $\hat{G}(h, h\xi)$ $(0 < h \le h_0,\ \xi \in R^m)$ とおく．また (*) を仮定する．このとき次の諸条件を導入する．

(N)　von Neumann の条件．

(FW)　ある正数 β，M が存在して $|\hat{G}(h, h\xi)^n| \le M h^{-\beta}$，$(0 \le n\tau \le 1)$，が成立する．

(J)　ある正数 α，M が存在して $|\hat{G}(h, h\xi)^n| \le M(1+|\xi|)^\alpha$，$(0 \le n\tau \le 1)$，が成立する．

安定性を云々する空間として次のようにとる．

$$\mathscr{X} = H^\infty(R^m) = \{u = u(x) \mid (1-\Delta)^j u \in L_2(R^m),\ j = 0, 1, \cdots\}$$

$H^\infty(R^m)$ は自然なセミノルムのもとで Fréchet 空間をなしている．なお (*) での γ は有理数と仮定する（本質的でないと思うが．）このとき，次の主要定理が成立する．

(定理) Cauchy 問題が H^∞ で well-posed であり，一方，consistency があるならば次の同値関係が成立する．

(N) $\Leftrightarrow$ (FW) $\Leftrightarrow$ (J) $\Leftrightarrow$ H^∞-stability $\Leftrightarrow$ convergence．