数理解析研究所講究録
第39巻 1968年 51-86

一階双曲型方程式系に対する柱状領域における初期-境界値混合問題について

京大. 工. 松村睦豪

§0. 序

高階の双曲型方程式や双曲型方程式系は波動方程式のCauchy問題のwell posednessの一般化を目的として導入され(Petrowsky, Gårding) Petrowsky, Gårding, Leray, Friedrichs, Lax, Mizohata, Yamaguti 等の研究によりCauchy問題のwell posednessの一般論は本質的には完成されたと考えることができる. 一方よく知られているように波動方程式に対してはwell posedな初期-境界値混合問題がある. そこで上のようにして導入された双曲型方程式或いは系に対し初期-境界値問題がどのような境界条件の下でwell posedとなるかが当然問題になる. この問題に対する解答はGårdingやAgmonその他の人々の指摘をまつまでもなく甚だ不満足な状態にある. 実際殆んどComplete theoryが得られている空間一次元の場合, 2階双曲型方程式の場合を除けば一般領域における初期-境界値問題のwell posedなboundary conditionsが見出されているのは一階対称双曲型方程式系だけであろう. 1960年代になって定数係数の双曲型方程式や系の半空間(space-timeではquarter space)における一般

境界値問題がHersh, Agmon, Sarason 等によって研究され始めたがこれらは変数係数の場合に移すことは殆んど不可能と思われ，従って一般領域に対しては何等の解答も与えていない．実際現在のところC^∞係数の高階正規双曲型方程式或いは一階正規双曲型方程式系一般に対しては柱状領域でも混合問題がwell posedとなる境界条件があるかないかもわかっていない。これは楕円型方程式の境界値問題や放物型方程式の初期-境界値問題が究極的に一般化されているのと対照的である．変数係数の高階単独方程式に対する研究はDuffによって企てられたがこれはまさに企てられたと云う表現が適切な結果しか出していない．なお特殊な形の単独高階双曲型方程式に対する最近の仕事にMizohata, Séminaire Leray (1966~1967), Collège de France, 宮武（四階の場合，未発表）があることに注意しよう。[1]

さてM.S. AgranovichはDoklady 1966[1]においてFriedrichs & Laxによる1st order symmetrizable systemsに対する境界値問題の研究[4]に示唆され一階双曲型方程式系の混合問題に対しある種の結果を予告した。これは方程式系が境界上だけで対称性をもっておれば内部では正規双曲型であってもFriedrichs-Lax-Phillipsの意味でのpositive[2]で且minimally non negativeな境界条件を課す混合問題がwell posedであることを示すものである．この結果は定数係数ならば対称系しかなくまた一般の一階双曲系へは程遠いものと考えられるが一つの進歩ではあろう．上記Agranovichの報告は証明が欠けているので混合問題

1) 双曲型方程式の混合問題に関する文献は終りにまとめておいた。
2) 境界条件のpositivityがnon negativityにゆるめられることが最近溝畑先生によって示された。

研究の足がかりをつかみ境界上で必ずしも symmetric になっていない一階双曲型方程式系に対し事情がどうなっているかを調べる為筆者は定松氏（京大工）と共にその証明を試みてみた．これは去る5月（1967年）での講演の詳細である．

§1. 問題の設定

Ω を n 次元 Euclid 空間 R^n の開集合とし，その境界 $\partial\Omega$ は $n-1$ 次元の十分滑らかな Compact manifold とする．[1] R^n の点を $x=(x_1,\cdots x_n)$ で，時間を t で表わそう．

space-time $R^n_{t,x}$ の柱状領域 $[0,T]\times\bar{\Omega}$ の近傍で定義された一階線形双曲型方程式系

$$(1.1)\qquad L[u(t,x)]=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}A_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}-B(t,x)u=f(t,x)$$

を考える．こゝで $u(t,x)$ 及び $f(t,x)$ は複素数値函数を要素とする $m\times 1$ 行列である．また $A_j(t,x)$, $B(t,x)$ は複素数値函数を要素とする m 次正方行列であり，微分可能性については

$[0,T]\ni t \rightsquigarrow A_j(t,\cdot)\in\mathcal{B}^3(\bar{\Omega}$ の近傍$)$ が t について一回連続的微分可能

$[0,T]\ni t \rightsquigarrow B(t,\cdot)\in L^\infty(\bar{\Omega}$ の近傍$)$ が t について連続

を仮定する．

L が $[0,T]\times\bar{\Omega}$ の近傍で双曲型であるとは次の意味とする．(Friedrichs)

$[0,T]\times\bar{\Omega}$ の近傍 $\times(R^n-\{0\})$ で定義された m 次正方行列 $r(t,x,\xi)$ で次の条件を満足するものが存在する．

1) $\partial\Omega$ が compact でない場合でも含ての証明の方法からみて Ω が Browder の意味で uniformly regular であればよいであろう．

(i) $r(t,x,\xi)$ は ξ について positively homogeneous of degree 0 で $t \rightsquigarrow r(t,x,\xi) \in C^{3,\infty}_{x,\xi}$ ($\bar{\Omega}$ の近傍 $\times (\mathbb{R}^n - \{0\})$) が一回連続的微分可能

(ii) $r(t,x,\xi)$ は positive definite Hermitian matrix である:

$$r(t,x,\xi)\zeta\cdot\bar{\zeta} \geq c|\zeta|^2 \quad , \forall \zeta \in \mathbb{C}^m$$

c は t, x, ξ に無関係

(iii) 行列 $r(t,x,\xi)\,a(t,x,\xi)$ は Hermitian となる. こゝで

$$a(t,x,\xi) \equiv \sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j(t,x)$$

である.

$r(t,x,\xi)$ は $a(t,x,\xi)$ の symmetrizer と呼ばれる. 双曲性の由来は方程式 (1.1) が space-time $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ 全体で定義されているとき $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t} \times (\mathbb{R}^n_\xi - \{0\})$ で定義され上の (i) (ii) (iii) を満足する $r(t,x,\xi)$ が存在すれば Cauchy 問題は未来にも, 過去にも well posed となり又有限傳播性をもつことが示されるからである. (但し $A_j(t,x)$ 従って $r(t,x,\xi)$ の x についての regularity は問題を考える函数空間に応じ適当に定めるものとする).

吾々はこゝで方程式 (1.1) が Petrowsky の意味で regularly hyperbolic in $[0,T] \times \bar{\Omega}$ の近傍ならば上の Friedrichs の意味で hyperbolic になることに注意しよう. 実際 (1.1) が regularly hyperbolic である即ち "$\forall (t,x,\xi) \in [0,T] \times (\bar{\Omega}$ の近傍$) \times (\mathbb{R}^n_\xi - \{0\})$ に対し λ についての代数方程式 $\det(\lambda E - a(t,x,\xi)) = 0$ の根 $\lambda_1(t,x,\xi), \cdots, \lambda_m(t,x,\xi)$ は実ですべて相異なりしかも

$$\inf_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega} \text{の近傍} \\ |\xi|=1}} |\lambda_i(t,x,\xi) - \lambda_j(t,x,\xi)| \geq \delta \quad (i \neq j)$$

が成り立つ $\delta>0$ が存在する."

とする そのとき次の条件を満足する m 次正方行列 $N(t,x,\xi)$ が存在する.

(i)′ $N(t,x,\xi)$ は ξ について positively homogeneous of degree 0 で

$[0,T]\ni t \rightsquigarrow N(t,x,\xi)\in C^{3,\infty}_{x,\xi}$ ($\bar{\Omega}$ の近傍 $\times(\mathbb{R}^n-\{0\})$)

が一回連続的微分である.

(ii)′ $N(t,x,\xi)\,a(t,x,\xi)\,N^{-1}(t,x,\xi)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t,x,\xi) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(t,x,\xi)\end{pmatrix}$

(iii)′ $|\det N(t,x,\xi)|\geqq\delta'$

そこで $r(t,x,\xi)=N^*(t,x,\xi)\,N(t,x,\xi)$ ととればよい。

<u>Remark</u>

逆に $a(t,x,\xi)$ に対し (i) (ii) (iii) を満足する $r(t,x,\xi)$ が存在したとする 行列論でよく知られているように positive definite Hermitian matrix はある行列 $N(t,x,\xi)$ を用い $r(t,x,\xi)=N^*(t,x,\xi)\,N(t,x,\xi)$ と表わせるがこの N は (i)′, (ii)′, (iii)′ を満足し $\lambda_1(t,x,\xi),\cdots,\lambda_m(t,x,\xi)$ は real となる. 特に $r(t,x,\xi)$ の要素が実数値函数のとき $r(t,x,\xi)$ は対称行列であるがこのときは $N(t,x,\xi)=\sqrt{r(t,x,\xi)}$ ととればよい.

さて一階双曲型作用素系 $L=E\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-B$ に対する柱状領域 $[0,T]\times\bar{\Omega}$ における初期-境界値混合問題は粗く云って方程式

(1.2) $\qquad L[u(t,x)]=f(t,x)\ ,\ 0<t\leqq T\ ,\ x\in\Omega$

を満足する解 $u(t,x)$ で $t=0$ で初期条件

(1.3) $\qquad u(0,x)=g(x)\ ,\ x\in\Omega$

をみたし, そして Ω の境界 $\partial\Omega$ 上で境界条件

(1.4) $$P\,u(t,x) = h(t,x)\ ,\quad 0<t\leq T,\quad x\in\partial\Omega$$

をみたすものを求めることから成る。

吾々がこゝで考える境界条件 P は次のような linear boundary conditions である。

$P(t,x)$ は complex valued function よりなる $l\times m$ 行列でその rank は常に l に等しいものとする。従って $h(t,x)$ は $l\times 1$ 行列である。

又は Sarason 式に $P^2=P$ を満足する m 次正方行列（即ち projection in $\mathbb{C}^m$ along ker P）をとり

(1.4)' $$P(t,x)u(t,x) = h(t,x) \in \text{Range of } P(t,x)\ ,\quad x\in\partial\Omega$$

なる形で formulate してもよい。

吾々は上記混合問題に対し symmetrizer $r(t,x,\xi)$ が boundary $\partial\Omega$ 上で即ち $x\in\partial\Omega$ のとき ξ に関係しないことを仮定し, boundary conditions の strict positivity の下で energy 不等式が成り立つことを示す。そして更に boundary conditions の minimal non negativity 及び $\det(a(t,x,\nu))\neq 0$ on $\partial\Omega$（但し ν は点 $x\in\partial\Omega$ における単位内法線 vector）を仮定し, A_j, B, P が時間 t に independent な場合に L^2-解の存在を示す。

§2. 若干の準備

条件

i) $\rho(x_n)\geq 0$

ii) $\rho(x_n)=0$ for $|x_n|\geq 1$

iii) $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x_n)\,dx_n=1$

を満足する函数 $\rho \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ をとり

$$(2.2) \qquad \rho_\varepsilon(x_n) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right)$$

とおく. $u(t,x)$ を時間 t と点 $x=(x_1\cdots x_n)=(x';x_n)$ の函数としよう. そのとき記述を簡単にする為 $\rho_\varepsilon \underset{x_n}{*} u(t,x)$ を単に $\rho_\varepsilon * u(t,x)$ と書くことにする. 即ち

$$(2.3) \qquad \rho_\varepsilon * u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x_n - y_n)\, u(t,x';y_n)\, dy_n$$

である. $u(t,x) \in C([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})$ 或いは $\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ に対し

$$(2.4) \qquad \widetilde{u(t,x)} = \begin{cases} u(t,x) & x_n \geqq 0 \\ 0 & x_n < 0 \end{cases}$$

と定義する. このとき $\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u(t,x)} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,x)}$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ だから

$$(2.5) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho_\varepsilon * \widetilde{u(t,x)}\right) = \rho_\varepsilon * \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,x)} \quad (j=1,2,\cdots,n-1)$$

が成り立つ. 一方

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\widetilde{u(t,x)} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_n}(t,x)} + u(t,x',0)\otimes\delta(x_n)$$

であるから

$$(2.6) \qquad \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\rho_\varepsilon * \widetilde{u(t,x)}\right) = \rho_\varepsilon * \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_n}(t,x)} + \rho_\varepsilon(x_n)\, u(t,x',0)$$

が成り立つ.

<u>Lemma 2.1</u>

(1) $v(x') \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ に対し $\| x_n \rho_\varepsilon(x_n) v(x') \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq \sqrt{\varepsilon}\, \| v \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$
が成り立つ.

(2) $a \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$, $v(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\| [a(x), \rho_\varepsilon *]\, v(x) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq \varepsilon\, | a |_{\mathcal{B}^1}\, \| v \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ. ここで $[a(x), \rho_\varepsilon *]$ は $a(x)$ と $\rho_\varepsilon *$ との

Commutator $a(x)(\rho_\varepsilon * v(x)) - \rho_\varepsilon * (a(x)\,v(x))$ を表わす。

次に Calderón と Zygmund による singular integral operators 及びそれに関する Calculus を一般的にした pseudo-differential operators に関する若干の結果に触れておく。[1] pseudo-differential operators やその symbol の定義は人の趣味や用途によって二，三あるが吾々は Fourier integral operators の立場から定義する。[2]

$\sigma_j\ (j=0,1,\cdots)$ を $\lim_{j\to\infty}\sigma_j=-\infty$ なる狭義単調減少実数列とする。そして $h_j(x,\xi)\ (j=0,1,\cdots)$ を

(i) $\mathbb{R}^n_x\times(\mathbb{R}^n_\xi-\{0\})$ で定義され (x,ξ) について C^∞,

(ii) $h_j(x,\xi)$ は ξ について positively homogeneous of degree σ_j,

(iii) $h_j(x,\xi)$ は $|\xi|=1$ 上で $|x|\to\infty$ のとき極限 $h_j(\infty,\xi)$ を有し任意の整数 l, multi-indices μ,ν に対し

$$(1+|x|^l)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu\left(h_j(x,\xi)-h_j(\infty,\xi)\right)\to 0 \quad \text{as } |x|\to\infty$$

uniformly in ξ $(|\xi|=1)$

を満足する函数列としよう。

1) Calderón と Zygmund による singular integral operators とその Calculus をそのような形に拡張したのは（L^2-的な枠内で）Kohn-Nirenberg [6] と Hörmander [5] による。しかし L^2 においての取り扱いでも問題によっては Calderón と Zygmund による formulation で十分でしかも便利なことも多い。

2) Singular integral operators をそれらが x 空間で singular kernel をもつことを explicit に出さず Fourier integral operators の立場を強調した形での取り扱いは Mizohata; Unicité du prolongement …… 京大紀要 31 (1958) で始められ Yamaguti 京大紀要 32 (1959) [12] により更に発展された。こゝでは Kohn-Nirenberg に従った。

そのとき $\beta(\xi)$ を $\xi=0$ のまわりで 0 で $|\xi|\geqq 1$ で 1 に等しい C^∞ な函数とすれば任意の整数 $N\geqq 1$ に対し

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ni u \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left\{\beta(\xi)\sum_{j=0}^{N-1} h_j(x,\xi)\right\}\hat{u}(\xi)\,d\xi,$$

$$\hat{u}(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(x)\,dx.$$

は $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ への linear operator を定義する.

さて一般に $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ への linear operator H で任意の整数 N に対し

$$u \rightsquigarrow Hu-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left\{\beta(\xi)\sum_{j=0}^{N-1} h_j(x,\xi)\right\}\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

が $\mathcal{S}$ における高々 order N の operator[1] となるものを $\sum_{j=0}^{\infty} h_j(x,\xi)$ を (formal) symbol とする pseudo-differential operator と呼ぶ.

$h_0(x,\xi)\not\equiv 0$ のとき $h_0(x,\xi)$ を operator H の leading or principal symbol と呼ぶ. $h_0(x,\xi)$ の ξ に関する degree σ_0 が H の order である.

条件 (i), (ii), (iii) を満足する函数列 $h_j(x,\xi)$ が与えられたとき $C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ に属する函数 $h(x,\xi)$ で任意の整数 l, multi-indices μ,ν に対し

$$(2.7)\qquad (1+|x|^l)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu}\left(h(x,\xi)-\sum_{j=0}^{N-1}h_j(x,\xi)\right)=O(|\xi|^{\sigma_N-|\nu|})$$
$$\text{as } |\xi|\to\infty$$

但し order relation は $x\in\mathbb{R}^n$ について一様とする.

を満足するものが存在し

$$(2.8)\qquad (Hu)(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}h(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi,\quad u\in\mathcal{S}$$

によって定められる $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ への linear operator H は $\sum_{j=0}^{\infty} h_j(x,\xi)$ を

1) $\mathcal{S}$ における linear operator K が高々 order N をもつとは $\forall k$: integer $\geqq 0$ に対し
$$\|(1+\Lambda)^k K\varphi\|\leqq \text{Const.}\,\|(1+\Lambda)^{k+N}\varphi\| \quad \text{for all } \varphi\in\mathcal{S},\quad 1+\Lambda=\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|)*$$
が成り立つことを云う.

(formal) symbol とする p.d.o.[1] であることが証明できる。([5], [6] 参照)
relation (2.7) を

$$(2.9) \qquad h(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x,\xi) \quad \text{as } |\xi| \to \infty$$

で記す。

同一の symbol をもつ p.d.o. はたくさんあるがその任意の2つの差は order $-\infty$ である。云い換えれば $\forall k$: integer に対し $\exists C_k > 0$ が存在し $\|(1+\Lambda)^k (H-K) f\| \leq C_k \|f\|$ for all $f \in \mathcal{S}$ が成り立つ。

$h_j(x,\xi)$ が有限個で各々が ξ についての多項式ならば H は order σ_0 の微分作用素である。(勿論 order $-\infty$ の operator を modulo として)。

Theorem 2.1

(1) H を order σ の p.d.o. とする。そのとき H は

$$\mathcal{D}^{s}_{L^2}(\mathbb{R}^n) = \{u ; (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad \text{を} \quad \mathcal{D}^{s-\sigma}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$$

への有界作用素を定める。(s は任意の実数)。特に order が 0 のとき $L^2(\mathbb{R}^n)$ における有界作用素になる。

(2) H, K をそれぞれ $h(x,\xi)$, $k(x,\xi)$ を symbol とする p.d.o. としよう。そのとき $H \cdot K$ は

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu} h(x,\xi) \right) \left(D_x^{\nu} k(x,\xi) \right), \qquad D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

を symbol とする p.d.o. である。

(3) H^* を H の内積 $(f, \psi) = \int f \bar{\psi}\, dx$ に関する formal adjoint

1) 簡単の為以後 pseudo-differential operator を p.d.o. と略記する。

operator とする.[1] そのとき H^* は

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} D_x^{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu} \overline{h(x,\xi)}$$

を symbol とする p.d.o. である.($h(x,\xi)$ が行列のときは ${}^t\overline{h(x,\xi)}$ で置きかえる).

Corollary

(1) $\displaystyle\sum_{|\nu|=r} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\nu} h(x,\xi)\right) \cdot \left(D_x^{\nu} k(x,\xi)\right)$ を symbol とする p.d.o. を J_r で表わすとき

$$HK - \sum_{r=0}^{N-1} J_r \quad \text{の order は高々} \quad \sigma_h + \sigma_k - N \quad \text{である.}$$

(2) $\displaystyle\sum_{|\nu|=r} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} D_x^{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} \overline{h(x,\xi)}$ を symbol とする p.d.o. を I_r で表わすとき

$$H^* - \sum_{r=0}^{N-1} I_r \quad \text{の order は高々} \quad \sigma_h - N \quad \text{である.}$$

特に $h(x,\xi)k(x,\xi)$ を symbol とする p.d.o. は $H\circ K$ で，また $\overline{h(x,\xi)}$ を symbol とする p.d.o. は $H^{\#}$ で表わされる. Calderón と Zygmund は $HK - H\circ K$, $H^* - H^{\#}$ の order が少くとも一つだけ下ることを示した. これを上の一般な形にしたのは essentially には 山口 [12] と筆者の Proc. Japan Acad. 37 (1961) と [7] による.

Remark 吾々が後で用いるのは主に H が一階の微分作用素で K が order 0 の p.d.o. (or sing. int. op.) の行列の場合や H, K 共 order 0 の場合で $HK-KH$ や $H^*-H^{\#}$ の order が少くとも 1つ下ることしか

1) 即ち $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$ に対し $(H\varphi, \psi) = (\varphi, H^*\psi)$ が成り立つとする.

使わない。その為には $h(x,\xi)$, $h(x,\xi)$ は x に関し $\mathcal{B}^2$ に属していることを仮定すればよい。((iii) は必要ではない)

Lemma 2.2 "Gårding type の不等式"

G を $\mathbb{R}^n$ の領域とする。$h(x,\xi)$ を ξ について homogeneous of degree 0 の symbol をもつ行列で、$x\in G$ に対し Hermitian かつ positive definite

$$h(x,\xi)\,\zeta\cdot\overline{\zeta} \geqq c\,|\zeta|^2 \qquad c \text{ は } x\in G,\ \xi \text{ に無関係な正の定数}$$

であるとしよう。そのとき

$$(2.10)\qquad \mathrm{Re}\,(H\varphi,\varphi) \geqq c'\,\|\varphi\|^2 - \mathrm{Const}\,\|(1+\Lambda)^{-\frac{1}{2}}\varphi\|^2, \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(G_1)$$

が成り立つ。こゝで G_1 は $\overline{G_1}\subset G$ なる領域とする。

証明は 溝畑 [9] 或いは [6] 参照。

次の補助定理は pseudo-differential operator の quasi-local property を示すものである。

Lemma 2.3

V, G を二つの有界な開集合で $\overline{V}\subset G$ とする。P をその symbol $p(x,\xi)$ が $x\in G$ のとき 0 に等しいような p.d.o. としよう。H, K を任意の p.d.o. とするとき適当な $C>0$ をとれば

$$(2.11)\qquad \|H\cdot P\cdot K\cdot\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C\,\|\varphi\|_{L^2(V)} \quad \text{for all } \varphi\in C_0^\infty(V)$$

が成り立つ。又 P を P^* で置きかえてもよい。こゝで C は φ には関係せず、P, H, K と V の diameter に関係する定数である。そして diameter of V を十分小さくとることにより C はいくらでも小さくとれる。

証明は 溝畑 [9] 或いは Matsumura [7] 参照。

§3. Energy不等式とその証明

この節で §1で述べた意味での一階双曲型作用素系Lに対する柱状領域 $[0,T]\times\Omega$ における混合問題 (1.2)−(1.4) に対し次の条件の下で energy不等式を確立する.

(I) $r(t,x,\xi)$ は領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上で即ち $x\in\partial\Omega$ のとき ξ に無関係である: $r(t,x)\equiv r(t,x,\xi)$, $x\in\partial\Omega$.

(II) "境界条件のpositivity"　$x\in\partial\Omega$ としよう. $P(t,x)$ を $\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^l$ なる linear operator とみての kernel を $\ker P(t,x)$ と記すとき

(3.1)　$$Q(t,x,\xi)\equiv r(t,x)\,a(t,x,\nu)\,\xi\cdot\bar{\xi}\geq\delta_0|\xi|^2,\quad\forall\xi\in\ker P(t,x)$$

が成り立つ. こゝで ν は点 $x\in\partial\Omega$ における単位内法線 vector で, δ_0 は t,x に関係しない正の定数である.

Remark　条件(I)は一階双曲型作用素系Lが境界上で対称即ち $A_j(t,x)$ $(j=1,\cdots,n)$ が $x\in\partial\Omega$ のとき Hermitian matrices であれば $r(t,x)=E=$単位行列 となりみたされる. 又 $r(t,x)$ が (t,x) に関係する場合も従属変数(未知函数 u)の変換により $r(t,x)=E$ の場合に帰着できるので条件(I)は本質的には境界上で対称なことになる. しかし証明はいづれの場合でも同じなので(I)の下で証明する.

さて吾々は $\partial\Omega$ が compact であることを仮定しているが後の証明でわかるように quarter space $\{(t,x)\,;\,t\geq 0,\ x_n\geq 0,\ x\in\mathbf{R}^n\}$ の場合も有効である. この場合の簡単な例をあげておこう. 次のものは山口先生による例である.

Example

$$L = E\frac{\partial}{\partial t} - A_1\frac{\partial}{\partial x_1} - A_2\frac{\partial}{\partial x_2} - B$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \phi(x_2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\phi(x_2)$ は $x_2=0$ のとき 0 となる $\mathcal{B}^1(R^1)$ 函数

$$\Omega = \overline{R^2_+} = \{(x_1, x_2) ; x_2 \geqq 0\}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0<\alpha<1$$

実際 L は $R^1_t \times R^2_x$ 全体でで規双曲型である．

$$\det(\lambda E - A_1\xi_1 - A_2\xi_2) = (\lambda - \tfrac{1}{2}\xi_2)(\lambda^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)$$

また $r(t,x)=E$ ととめる．$x=(x_1,0)$

$$Q(t,x,\xi) = A_2\,\xi\cdot\overline{\xi} = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 + \frac{1}{2}|\xi_3|^2$$

$$\ker P = \{(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3) ;\ \xi_2 = \sigma\xi_1,\ \xi_3 = 0\}$$

より $Q(t,x,\xi)$ は $\ker P$ 上でで定値となる．

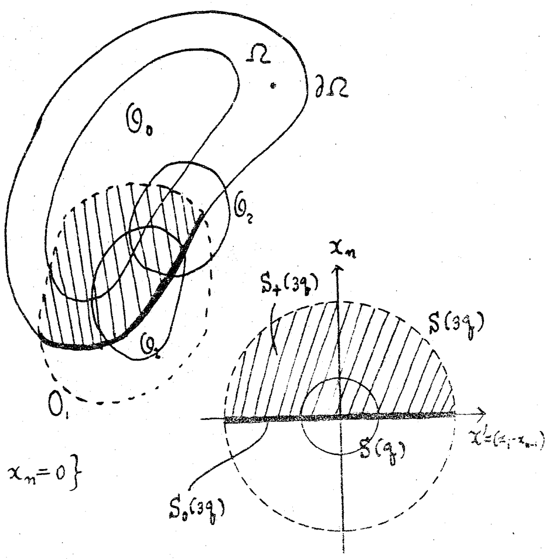
注意. 例えば $\phi(x_2)=\mathrm{Const}\neq 0$ のとき L は定数係数であるが上のような半空間の場合でも $r(t,x,\xi)$ が境界上で ξ に関係し吾々の方法では今のところ取り扱えないものである．

Theorem 3.1 条件 (I) (II) の下で混合問題 (1.2)―(1.4) の解 $u(t,x)\in C^1([0,T]\times\overline{\Omega})$ に対し次の energy 不等式が成り立つ．

$$\| u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \| u(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} d\tau \leqq C\left\{ \| g(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left[\| f(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \| h(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] d\tau \right\} \tag{3.2}$$

こゝで C は $t\in[0,T]$ にも u にも関係しない定数である．

(証明) 次の性質をもつ$\partial\Omega$の Covering $\{O_i\}_{1\le i\le N}$ をとる. 各 i に対し O_i を sphere $S(3q)=S^{n-1}(0,3q)=\{x;\ |x|<3q\}$ (qは十分小さな正の数) の上への diffeomorphism ϕ_i で



$$\phi_i(O_i\cap\Omega)=S_+(3q)=\{x;\ x\in S(3q),\ x_n>0\}$$

$$\phi_i(O_i\cap\partial\Omega)=S_0(3q)=\{x;\ x\in S(3q),\ x_n=0\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\psi_i(S(q))\supset\partial\Omega$$

を満足するものが存在する. こゝで ψ_i は ϕ_i の inverse diffeomorphism を表わす. $\psi_i(S(q))=\Theta_i$ とおく. そして open set Θ_0 を $\overline{\Theta}_0\subset\Omega$ で $\{\Theta_i\}_{0\le i\le N}$ が $\overline{\Omega}$ の Covering をつくるようにとる. そして Covering $\{\Theta_i\}_{0\le i\le N}$ of $\overline{\Omega}$ に従属する単位の分解 $\{\alpha_i\}_{0\le i\le N}$ on $\overline{\Omega}$

$$\alpha_i\in C_0^\infty(\Theta_i),\quad \alpha_i(x)\ge 0,\quad \sum_{i=0}^{N}\alpha_i^2(x)=1 \text{ on } \overline{\Omega} \tag{3.3}$$

を1つとり固定しよう. ψ_i^*でψ_iによって惹き起される函数の変換を表わすことにし

$$\widetilde{\psi_i^*(\alpha_i u)}=\begin{cases}\psi_i^*(\alpha_i u) & \text{on } S_+(3q)\cup S_0(3q)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}\qquad (i=1,\cdots,N)$$

$$\widetilde{\alpha_0 u}=\begin{cases}\alpha_0 u & \text{in } \Omega\\ 0 & \mathbf{R}^n-\Omega\end{cases}$$

と定める.

さて吾々は微分作用素 L が $\overline{\Omega}$ の近傍で定義されていることを仮定した. 従って L は各 O_i 上で定義されているとしてよいから $1\le i\le N$ に対しては上のような変換によって $S(3q)$ で定義された微分

作用素 L_i に移る．このとき条件 (I), (II) は不変に保たれる．$\overline{S(2q)}$ の近傍で 1 となる $C_0^\infty(S(3q))$ の函数を L_i に乗じたものを改めて L_i と書くことにすると L_i は $\mathbb{R}^n$ 全体で定義された微分作用素となる．一方 $S(3q)$ における $r_i(t,x,\xi)$ もそのように修正しておくと $\mathbb{R}^n$ 上の p.d.o. $\mathcal{R}_i(t)$ の symbol になる．但しこのように L_i 及び r_i を修正したとき hyperbolicity の条件 (ii) (iii) は $x\in S(2q)$ のときそして条件 (I) (II) は $x\in S_0(2q)$ のときに満足されることに注意しよう.[1]　$i=0$ に対しても $\overline{\Omega}$ の近傍で 1 となる C^∞ 函数を乗じ $r_0(t,x,\xi)$ や L を $\mathbb{R}^n$ 全体に拡張しておく．

$r_i(t,x,\xi)$ を symbol とする $\mathbb{R}^n_x$ 上の p.d.o. (or sing. int. op.) を $\mathcal{R}_i(t)$ とし[2]

$$(3.5)\qquad \mathcal{E}_i(t)=\frac{1}{2}\left(\mathcal{R}_i(t)+\mathcal{R}_i^*(t)+\beta(1+\Lambda)^{-1}\right),\quad \beta>0$$

とおく．order zero の p.d.o. $\mathcal{E}_i(t)$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の bounded Hermitian operator である．

<u>Lemma 3.1</u>

$\mathcal{E}_i(t)=\mathcal{R}_i(t)+\mathcal{C}_i(t)$ と書くとき $\mathcal{C}_i(t)$ は次の性質をもつ．$\mathcal{H},\mathcal{K}$ をその order の和が ≤ 1 である任意の p.d.o. とするとき[3] 適当な定数 $C>0$ が存在し $\forall\phi\in\dot{C}_0^\infty(S(q))$ （但し $i=0$ のときは $S(q)$ を Θ_0 で置きかえる）に対し

$$(3.6)\qquad \begin{aligned}&\|\mathcal{H}\,\mathcal{C}_i(t)\,\mathcal{K}\,\phi\|\leq C\,\|\phi\|\\ &\|\mathcal{H}\,\mathcal{C}_i^*(t)\,\mathcal{K}\,\phi\|\leq C\,\|\phi\|\end{aligned}$$

1) 正規双曲型のとき $S(2q)$ で元の作用素と一致する全空間で定義された正規双曲型作用素で (i) (ii) (iii) が全空間で満足され (I) (II) が超平面 $x_n=0$ 全体で満足するものがつくれる。

2), 3) 正確には p.d.o を要素とする m 次正方行列であるが以後いちいち断らない。

が成り立つ．又 $\mathcal{E}_i(t) = \mathcal{R}_i^*(t) + \mathcal{S}_i(t)$ と書くとき $\mathcal{S}_i(t)$ も同様な性質をもつ

∵ Th.2.1 より

$$\mathcal{E}_i(t) \text{ の symbol} = \frac{r_i(t,x,\xi) + {}^t\overline{r_i(t,x,\xi)}}{2} + (\text{degree} \leqq -1 \text{ の項})$$

$$= r_i(t,x,\xi) + \frac{{}^t\overline{r_i(t,x,\xi)} - r_i(t,x,\xi)}{2} + (\text{degree} \leqq -1 \text{ の項})$$

よって

$$\mathcal{C}_i(t) \text{ の symbol} = \frac{{}^t\overline{r_i(t,x,\xi)} - r_i(t,x,\xi)}{2} + (\text{degree} \leqq -1 \text{ の項})$$

双曲性の条件 (ii), (iii) と r_i が $S(2q)$ の外で修正されたことより $x \in S(2q)$ ならば ${}^t\overline{r(t,x,\xi)} - r(t,x,\xi) = 0$

従って Lemma 2.3 より $V = S(q)$, $G = S(2q)$ ととると $\varphi \in C_0^\infty(S(q))$ ならば (3.6) の最初の式が成り立つ．他も同様．但し Ω が外部領域のとき $i=0$ に対しては全空間の単位分解を用いて証明する．

Lemma 3.2

$\beta > 0$ を十分大にとれば $\exists C > 0$ が存在し $\forall \varphi \in L^2(R^n)$ $\operatorname{supp}\varphi \subset S(q)$ に対し

$$\text{(3.7)} \qquad \frac{1}{C^2}\|\varphi\|^2 \leqq (\mathcal{E}_i(t)\varphi, \varphi) \leqq C^2\|\varphi\|^2$$

が成り立つ．但し $i=0$ に対しては $S(q)$ を Θ_0 で置きかえる．

∵ $\varphi \in C_0^\infty(S(q))$ に対し $(\mathcal{E}_i(t)\varphi, \varphi) \geqq \mathrm{Const}\,\|\varphi\|^2$ が成り立つことのみ示せばよい． $\mathcal{E}_i(t) = \mathcal{R}_i(t) + \mathcal{C}_i(t)$ と書く． $r_i(t,x,\xi)$ が $x \in S(2q)$ のとき Hermitian positive definite matrix であることより Lemma 2.2 を用いると $\varphi \in C_0^\infty(S(q))$ ならば

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{R}_i(t)\varphi, \varphi) \geqq C\|\varphi\|^2 - \mathrm{Const}\,\|(1+\Lambda)^{-\frac{1}{2}}\varphi\|$$

が成り立つ．一方 Lemma 3.1 で $\mathcal{H} = (1+\Lambda)^{\frac{1}{2}}E$, $\mathcal{K} = E$ (E: 単位行列) ととると

$$|(\mathcal{C}_i(t)\varphi, \varphi)| = |((1+\Lambda)^{\frac{1}{2}}\mathcal{C}_i(t)\varphi, (1+\Lambda)^{-\frac{1}{2}}\varphi)|$$

$$\leqq \text{Const}\,\|\varphi\|\cdot\|(1+\Lambda)^{-\frac{1}{2}}\varphi\| \leqq \varepsilon\,\|\varphi\|^2 - \text{Const}\,\|(1+\Lambda)^{-\frac{1}{2}}\varphi\|^2$$

よってβを十分大にとると

$$(\mathcal{E}_i(t)\,\varphi,\varphi) \geqq \text{Const}\,\|\varphi\|^2$$

が成り立つ.

さて $u, v \in L^2(\Omega)$ に対し

$$(3.8)\qquad (u,v)_{\mathcal{E}(t)} = \left(\mathcal{E}_0(t)\,\widetilde{\alpha_0 u}, \widetilde{\alpha_0 u}\right)_{L^2(R^n)} + \sum_{i=1}^{N}\left(\mathcal{E}_i(t)\,\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u)}, \widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\right)_{L^2(R^n)}$$

とおくと Lemma 3.2 より $\|u\|_{\mathcal{E}(t)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{E}(t)}$ は $L^2(\Omega)$ 上で $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ と同値な norm を定めることがわかる.

以上の準備の下で定理3.1の energy 不等式(3.2)の証明に移ろう。混合問題(1.2)—(1.4)の C^1-solution $u(t)=u(t,x)$ に対し その energy $\|u(t)\|^2_{\mathcal{E}(t)}$ の時間的変化を測る $(t>0)$.

$$(3.9)\qquad \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\mathcal{E}(t)} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_0(t)\,\widetilde{\alpha_0 u}, \widetilde{\alpha_0 u}\right)_{L^2(R^n)} + \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_i(t)\,\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u)}, \widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\right)_{L^2(R^n)}$$

であるが右辺第一項は $\alpha_0(x)u(t,x)$ が $\partial\Omega$ の近傍では恒等的に 0 であることより Cauchy 問題のときと全く同様に処理される項である. そこで

$$(3.10)\qquad \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_i(t)\,\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}, \widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}\right),\quad 1\leqq i\leqq N$$

の評価だけを示そう.

$$= \mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_i(t)\,\widetilde{\Psi_i^*\left(\tfrac{d}{dt}(\alpha_i u(t))\right)}, \widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}\right)$$

$$+ \mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_i(t)\,\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}, \widetilde{\Psi_i^*\left(\tfrac{d}{dt}(\alpha_i u(t))\right)}\right) + \mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_i'(t)\,\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}, \widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}\right)$$

$\mathcal{E}_i'(t)$ は $\frac{d}{dt}(\text{symbol}(\mathcal{E}_i(t)))$ を symbol とする p.d.o. であり 従って第三項は

$$(3.11)\qquad \mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_i'(t)\,\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}, \widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u(t))}\right) \leqq \text{Const}\,\|\alpha_i u(t)\|^2$$

と評価される.

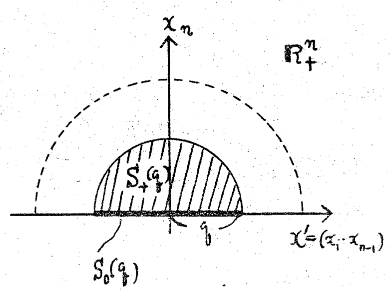
次に第一項，第二項の評価を行う．吾々は記号を簡易化する為

$$\psi_i^*(\alpha_i u(t)) \to u(t),\quad \psi_i^*(f_i(t)) = \psi_i^*\Big(\alpha_i f(t) - \Big(\sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\Big) u(t)\Big) \to f(t)$$

(3.12) $$\psi_i^*(\alpha_i g) \to g,\quad \psi_i^*(\alpha_i h(t)) \to h(t),\quad \mathcal{E}_i(t) \to \mathcal{E}(t)$$

$$L_i \to L = E\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^n A_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} - B(t,x)$$

と書くことにすると第一項，第二項の評価は



(3.13) $$f(t),\ g \in C_0(S_+(q)),\quad h \in C_0(S_0(q))$$

に対する混合問題

(3.14) $$\begin{cases} L[u(t,x)] = f(t,x) & 0<t\leq T,\ x\in S_+(q) \\ u(0,x) = g(x) & x\in S_+(q) \\ P(t,x')u(t,x',0) = h(t,x') & x'\in S_0(q) \end{cases}$$

の解 $u(t)=u(t,\cdot)\in C_0^1(S_+(q)\cup S_0(q))$ に対し

(3.15) $$\mathrm{Re}\Big(\mathcal{E}(t)\frac{d\widehat{u(t)}}{dt}, \widehat{u(t)}\Big)_{L^2(R^n)} + \mathrm{Re}\Big(\mathcal{E}(t)\widehat{u(t)}, \frac{d}{dt}\widehat{u(t)}\Big)_{L^2(R^n)}$$

を評価することになる．ここで $\widehat{u(t)}$ は (2.4) によって定められた函数である．

(3.15) は

(3.16) $$\lim_{\varepsilon\to 0+}\Big\{\mathrm{Re}\Big(\mathcal{E}(t)\rho_\varepsilon*\frac{d}{dt}\widehat{u(t)}, \rho_\varepsilon*\widehat{u(t)}\Big)_{L^2(R^n)} + \mathrm{Re}\Big(\mathcal{E}(t)\rho_\varepsilon*\widehat{u(t)}, \rho_\varepsilon*\frac{d}{dt}\widehat{u(t)}\Big)_{L^2(R^n)}\Big\}$$

に等しい．そこで

$$\frac{d}{dt}\widehat{u(t)} = \widehat{\frac{du(t)}{dt}} = \sum_{j=1}^n A_j\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} + B\hat{u} + \hat{f} \qquad 0<t\leq T,\ x\in R^n_+$$

より (2.5), (2.6) を用いると

$$\rho_\varepsilon * \frac{d\widehat{u}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\rho_\varepsilon*\widehat{u(t)} = \Big(\sum_{j=1}^n A_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} + B(t,x)\Big)\rho_\varepsilon*\widehat{u(t)}$$

$$- A_n(t,x)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,u(t,x',0) + \sum_{j=1}^{n}\left\{\rho_\varepsilon * \Big(A_j \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}\Big) - A_j\Big(\rho_\varepsilon * \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}\Big)\right\}$$
$$+ \rho_\varepsilon * (B\tilde{u}) - B(\rho_\varepsilon * \tilde{u}) + \rho_\varepsilon * \tilde{f}$$

と変形される. Lemma 2.1 の (1) より $\varepsilon \to 0$ のとき

$$\| (A_n(t,x) - A_n(t,x',0))\,\rho_\varepsilon(x_n)\,u(t,x',0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

が従うことと Lemma 2.1 の (2) を用いて

(3.17) $$\rho_\varepsilon * \frac{d\widehat{u(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho_\varepsilon * \widehat{u(t)}) = \Big(\sum_{j=1}^{n} A_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} + B(t,x)\Big)(\rho_\varepsilon * \widehat{u(t)})$$
$$+ \rho_\varepsilon * \widehat{f(t)} - A_n(t,x',0)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,u(t,x',0) + O_\varepsilon$$

O_ε は $\varepsilon \to 0$ のとき $\|O_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ となる量を表わす.

を得る.

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} + B(t,x), \quad \rho_\varepsilon * \widehat{u(t,x)} = \rho_\varepsilon * \widehat{u(t)} = u_\varepsilon(t)$$
$$\rho_\varepsilon * \widehat{f(t,x)} = f_\varepsilon(t), \quad A_n(t,x',0)\,u(t,x',0) = w(t,x')$$

と記すことにすれば (3.17) は

(3.18) $$\rho_\varepsilon * \frac{d}{dt}\widehat{u(t)} = \mathcal{A}(t)\,u_\varepsilon(t) + f_\varepsilon(t) - \rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x',0) + O_\varepsilon \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

と書ける. これを (3.16) に代入すると

(3.19) $$\mathrm{Re}\Big(\mathcal{E}(t)\frac{du_\varepsilon}{dt}(t), u_\varepsilon(t)\Big) \leq \mathrm{Re}\big(\mathcal{E}(t)\mathcal{A}(t)u_\varepsilon, u_\varepsilon\big)$$
$$- \mathrm{Re}\big(\mathcal{E}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'), u_\varepsilon\big) + \mathrm{Const}\big(\|f_\varepsilon\|\cdot\|u_\varepsilon\| + \|O_\varepsilon\|\cdot\|u_\varepsilon\|\big)$$

同様に

(3.20). $$\mathrm{Re}\Big(\mathcal{E}(t)u_\varepsilon(t), \frac{du_\varepsilon}{dt}(t)\Big) \leq \mathrm{Re}\big(\mathcal{E}(t)u_\varepsilon, \mathcal{A}(t)u_\varepsilon\big)$$
$$- \mathrm{Re}\big(\mathcal{E}(t)u_\varepsilon, \rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x')\big) + \mathrm{Const}\big(\|f_\varepsilon\|\,\|u_\varepsilon\| + \|O_\varepsilon\|\cdot\|u_\varepsilon\|\big)$$

(3.11), (3.15), (3.16) (3.19) (3.20) を合せると

(3.21) $$\frac{d}{dt}\big(\mathcal{E}(t)\widehat{u(t)}, \widehat{u(t)}\big) \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\Big\{\mathrm{Re}\big((\mathcal{E}(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{E}(t))u_\varepsilon, u_\varepsilon\big)$$

$$- \mathrm{Re}\,(\mathcal{E}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\,u_\varepsilon) - \mathrm{Re}\,(\mathcal{E}(t)\,u_\varepsilon,\,\rho(x_n)\,w(t,x'))$$

$$+ \ \mathrm{Const}\,(\|u_\varepsilon\|^2 + \|f_\varepsilon\|^2 + \|0_\varepsilon\|^2)\Big\}$$

を得る．右辺第一項を評価しよう．

$$\mathcal{E}(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{E}(t) = (\mathcal{R}(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{R}(t)) + (\mathcal{C}(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{C}(t))$$

と書ける．$u_\varepsilon \in C_0^1(S(q))$ に注意すれば Lemma 2.3 より

$$\|(\mathcal{C}(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{C}(t))\,u_\varepsilon(t)\| \leq \mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|$$

一方　$\mathcal{R}(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{R}(t)$ の symbol は $\mathcal{A}(t)$ の symbol $= i\,a(t,x,\xi) + B(t,x)$ より　$[i\,r(t,x,\xi)\,a(t,x,\xi) + (-i\,{}^t\overline{a(t,x,\xi)})\,r(t,x,\xi)] + (\text{degree} \leq -1 \text{ の項})$ なる形である．こゝで hyperbolicity の仮定 即ち $x \in S(2q)$ のとき行列 $r(t,x,\xi)$ 及び $r(t,x,\xi)\,a(t,x,\xi)$ が Hermite 行列であることを用いると

$$i\,r(t,x,\xi)\,a(t,x,\xi) - i\,{}^t\overline{a(t,x,\xi)}\,r(t,x,\xi) = 0 \quad \text{if } x \in S(2q)$$

よって Lemma 2.3 より

$$\|(\mathcal{R}(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{R}(t))\,u_\varepsilon(t)\| \leq \mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|$$

が成り立つ．かくして

$$(3.22)\qquad \frac{d}{dt}(\mathcal{E}(t)\widehat{u(t)},\,\widehat{u(t)}) \leq \mathrm{Const}\,\{\|\widehat{u(t)}\|^2 + \|\widehat{f(t)}\|^2\}$$
$$+ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\{-\mathrm{Re}\,(\mathcal{E}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\,u_\varepsilon(t))$$
$$- \mathrm{Re}\,(\mathcal{E}(t)\,u_\varepsilon(t),\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'))\}$$

を得る．残された boundary term

$$(3.23)\qquad J = -\mathrm{Re}\,(\mathcal{E}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\,u_\varepsilon(t)) - \mathrm{Re}\,(\mathcal{E}(t)\,u_\varepsilon(t),\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'))$$

を考えよう．一階双曲型方程式系の初期－境界値問題の取り扱いの困難さはこの項の処理にあるが仮定 (I) の下では比較的簡単に処理

できることを示そう。 $\mathcal{E}(t)=\mathcal{R}(t)+\mathcal{C}(t)$, $\mathcal{E}(t)=\mathcal{R}^*(t)+\mathcal{S}(t)$ を用いると

$$(3.24)\qquad J = -2\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{R}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\ u_\varepsilon(t)) - \mathrm{Re}\,(\mathcal{C}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\ u_\varepsilon(t)) - \mathrm{Re}\,(\mathcal{S}(t)\,u_\varepsilon(t),\ \rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'))$$

と書ける。さて $\delta(x_n)\in\mathcal{D}^{-1}_{L^2}(R^1)$ であるから $\rho_\varepsilon(x_n)$ は $\mathcal{D}^{-1}_{L^2}(R^1)$ の topology で考えれば有界函数族となることに着目し

$$|(\mathcal{C}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\ u_\varepsilon(t))| = ((1+\Lambda_n)^{-1}\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\ (1+\Lambda_n)\,\mathcal{C}^*(t)\,u_\varepsilon(t))$$
$$\le \|(1+\Lambda_n)^{-1}\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x')\|\cdot\|(1+\Lambda_n)\,\mathcal{C}^*(t)\,u_\varepsilon(t)\|$$

と評価する。そのとき Lemma 3.1 より

$$\|(1+\Lambda_n)\,\mathcal{C}^*(t)\,u_\varepsilon(t)\| \le \mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|$$

又

$$\|(1+\Lambda_n)^{-1}\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x')\| = \|(1+\Lambda_n)^{-1}\rho_\varepsilon(x_n)\|_{L^2(R^1)}\,\|w(t,x')\|_{L^2(R^{n-1})}$$ [2)]
$$\le \mathrm{Const}\,\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$ (Const は ε に関係しない)

よって $\delta>0$ を任意に与えると

$$(3.25)\qquad |(\mathcal{C}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\ u_\varepsilon(t))| \le \delta\,\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})} + \mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|^2$$

なる評価を得る。同様にして

$$(3.26)\qquad |(\mathcal{S}(t)\,u_\varepsilon(t),\ \rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'))| \le \delta\,\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})} + \mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|^2$$

が成り立つ。

次に残された $2\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{R}(t)\,\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x'),\ u_\varepsilon(t))$ を考えよう。
$r(t,x',0,\xi)$ を symbol とする p.d.o. of order 0 を $\mathcal{R}^0(t)$ で表わそう。
$\beta(x')$ を $S_0(q)$ の近傍で 1 となる $C_0^\infty(S_0(2q))$ の函数とする。そのとき
$r(t,x',0,\xi)$ は $x'\in S_0(2q)$ のとき ξ_n に関係しないから (仮定 I)

1) $(1+\Lambda_n) = \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi_n|)*$
2) $w(t,x') = A_n(t,x',0)\,u(t,x',0)$

$\beta(x')\mathcal{R}^0(t)$ は (t,x') の函数となる そこでこれを $\Omega(t,x')$ で記す．$\Omega(t,x')$ は $x\in S_0(q)$ のとき positive definite Hermitian matrix である

$$(3.27)\qquad 2\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{R}(t)\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x'),u_\varepsilon(t))=2\,\mathrm{Re}\,(\Omega(t,x')\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x'),u_\varepsilon(t))$$
$$+2\,\mathrm{Re}\,([\mathcal{R}(t)-\mathcal{R}^0(t)+(1-\beta(x'))\mathcal{R}^0(t)]\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x'),u_\varepsilon(t))$$

と変形する．ところが

$$\mathcal{R}(t)-\mathcal{R}^0(t)\text{ の symbol }=r(t,x',x_n,\xi)-r(t,x',0,\xi)=x_n r^1(t,x',x_n,\xi)$$

と表わされるから $r^1(t,x,\xi)$ を symbol とする p.d.o. を $\mathcal{R}^1(t)$ で表わせば

$$\mathcal{R}(t)-\mathcal{R}^0(t)=x_n\mathcal{R}^1(t)=\mathcal{R}^1(t)\,x_n+[x_n,\mathcal{R}^1(t)]\ ^{1)}$$

と書ける．こゝで Commutator $[x_n,\mathcal{R}^1(t)]$ は p.d.o. of order -1 であり又 $(1-\beta(x'))\mathcal{R}^0(t)$ の symbol は $x\in S(q')$ $({}^\exists q'>q)$ のとき 0 である．従って (3.25) の左辺の処理と同様で

$$(3.28)\qquad 2|(\{(1-\beta(x'))\mathcal{R}^0(t)+[x_n,\mathcal{R}^1(t)]\}\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x'),u_\varepsilon(t))|$$
$$\leq\delta\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}+\mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|^2$$

が成り立つ．また Lemma 2.1 の (1) より

$$(3.29)\qquad |(\mathcal{R}^1(t)(x_n\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x')),u_\varepsilon(t))|$$
$$\leq\varepsilon\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}+\mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|^2$$

かくして (3.24)－(3.29) より

$$(3.30)\qquad J\leq-2\,\mathrm{Re}\,(\Omega(t,x')\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x'),u_\varepsilon(t))$$
$$+(3\delta+\varepsilon)\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}+\mathrm{Const}\,\|u_\varepsilon(t)\|^2$$

なる評価をもつ．

1) 正確には Lemma 2.3 を用い x_n を $\phi(x_n)\in C_0^\infty(R^1)$　$\phi(x_n)=x_n$ for $|x_n|<2q$ で置きかえておかねばならない．

Lemma 3.3

(3.31)
$$\lim_{\varepsilon\to 0+} 2\,\mathrm{Re}\,(r(t,x')\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x'), u_\varepsilon(t)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} r(t,x')\,A_n(t,x',0)\,u(t,x',0)\cdot\overline{u(t,x',0)}\,dx'$$

が成り立つ。

（証明）
$$2\,\mathrm{Re}\,(r(t,x')\rho_\varepsilon(x_n)w(t,x'), u_\varepsilon(t))$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n} r(t,x')\rho_\varepsilon(x_n)\,w(t,x')\cdot\overline{u_\varepsilon(t,x',x_n)}\,dx'\,dx_n$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right)\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} r(t,x')w(t,x')\left(\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x_n-y_n}{\varepsilon}\right)\overline{u(t,x',y_n)}\,dy_n\right)dx'\right\}dx_n$$

こゝで $x_n=\varepsilon s$ とおくと

$$= 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s)\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} r(t,x')w(t,x')\left(\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{\varepsilon s-y_n}{\varepsilon}\right)u(t,x',y_n)\,dy_n\right)dx'\right\}dx_n$$

となる。次に $\varepsilon s-y_n=\varepsilon\tau$ とおくと

$$\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{\varepsilon s-y_n}{\varepsilon}\right)u(t,x',y_n)\,dy_n = \int_{-\infty}^{s}\rho(\tau)\,u(t,x',\varepsilon(s-\tau))\,d\tau$$

こゝで積分区間は $(-\infty,s)$ だから $s-\tau\geqq 0$ よって $\varepsilon\to 0+$ のとき

$$u(t,x',\varepsilon(s-\tau)) = u(t,x',0+)$$

従って $\varepsilon\to 0+$ のとき

$$\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{\varepsilon s-y_n}{\varepsilon}\right)u(t,x',y_n)\,dy_n \longrightarrow u(t,x',0)\int_{-\infty}^{s}\rho(\tau)\,d\tau$$

となる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s)\left(\int_{-\infty}^{s}\rho(\tau)\,d\tau\right)ds = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\tau)\,d\tau\right)^2 = \frac{1}{2}\quad(\text{部分積分による})$$

に注意し $w(t,x')=A_n(t,x',0)\,u(t,x',0)$ であったこと及び $\mathrm{Supp}\,u(t,x',0)\subset S_0(q)$ で $r(t,x')A_n(t,x',0)$ が $x'\in S_0(q)$ のとき Hermite 行列であることより $\frac{1}{2}\mathrm{Re}$ がとれ所要の (3.31) が成り立つ。

(3.22), (3.23), (3.30), (3.31) より

$$(3.32)\qquad \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}(t)\,\widehat{u(t)},\,\widehat{u(t)}\right) \leqslant Const\left\{\|\widehat{u(t)}\|^2+\|\widehat{f(t)}\|^2\right\}+3\delta\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$
$$-\int_{R^{n-1}} r(t,x')\,A_n(t,x',0)\,u(t,x',0)\cdot\overline{u(t,x',0)}\,dx'$$

を得る.

さて境界条件 $P(t,x')\,u(t,x',0)=h(t,x')$ より

$$(3.33)\qquad u(t,x',0)=v(t,x')+S(t,x')\,h(t,x')$$

と表わされる. こゝで $v(t,x')\in\ker P(t,x')$ で $S(t,x')$ は $P(t,x')$ の要素を用いて作られる $l\times l$ 行列である. (3.33)より

$$(3.34)\qquad \|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}\leqslant 2\|v(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}+Const\,\|h(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$

が成り立つ. 一方

$$r(t,x')\,A_n(t,x',0)\,u(t,x',0)\cdot\overline{u(t,x',0)}$$
$$\geqslant r(t,x')\,A_n(t,x',0)\,v(t,x')\cdot\overline{v(t,x')}-Const\,|v(t,x')|\cdot|h(t,x')|$$
$$-Const\,|h(t,x')|^2$$

こゝで仮定(II) 即ち境界条件の positivity

$$r(t,x')\,A_n(t,x',0)\,\xi\cdot\overline{\xi}\geqslant\delta_0|\xi|^2,\quad \text{if }\ \xi\in\ker P(t,x')$$

と不等式

$$Const\,|v(t,x')|\cdot|h(t,x')|\leqslant\frac{\delta_0}{2}|v(t,x')|^2+Const\,|h(t,x')|^2$$

を用いれば

$$r(t,x')\,A_n(t,x',0)\,u(t,x',0)\cdot\overline{u(t,x',0)}\geqslant\frac{\delta_0}{2}|v(t,x')|^2-Const\,|h(t,x')|^2$$

が成り立つ. 従って

$$(3.35)\qquad \int_{R^{n-1}} r(t,x')\,A_n(t,x',0)\,u(t,x',0)\cdot\overline{u(t,x',0)}\,dx'$$
$$\geqslant\frac{\delta_0}{2}\|v(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}-Const\,\|h(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$

を得る. (3.34), (3.35) を (3.32) に代入すると

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}(t)\widehat{u(t)},\widehat{u(t)}\right) \leqq Const\left\{\|\widehat{u(t)}\|^2+\|\widehat{f(t)}\|^2\right\}+\left(6\delta-\frac{\delta_0}{2}\right)\|v(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$
$$+Const\,\|h(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$

δは十分小さくとれるから $6\delta-\frac{\delta_0}{2}=-\frac{\delta_1}{2}$ $(\delta_1>0)$ とできる. 又 (3.33) より

$$\|v(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})} \geqq 2\,\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}-Const\,\|h(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$

であるから

$$(3.36)\qquad \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}(t)\widehat{u(t)},\widehat{u(t)}\right) \leqq Const\left\{\|\widehat{u(t)}\|^2+\|\widehat{f(t)}\|^2+\|h(t,x')\|^2_{L^2(R^{n-1})}\right\}$$
$$-\delta_1\,\|u(t,x',0)\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$

を得た. こゝで (3.12) に帰ろう. (3.36) は $1\leqq i\leqq N$ として

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_i(t)\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i u)},\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\right) \leqq Const\left\{\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\|^2+\|\widehat{\Psi_i^*(f_i)}\|^2\right.$$
$$\left.+\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i h)}\|^2_{L^2(R^{n-1})}\right\}-\delta_1\,\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$

を意味している. 一方

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_0(t)\widehat{\alpha_0 u},\widehat{\alpha_0 u}\right) \leqq Const\,\|\widehat{\alpha_0 u}\|^2+\|\widehat{f}_0\|^2 \qquad f_0=L[\alpha_0 u]$$

が成り立つから (3.9) より

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\mathcal{E}(t)} \leqq Const\left\{\left(\|\widehat{\alpha_0 u}\|^2+\sum_{i=1}^{N}\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\|^2\right)+\left(\|\widehat{f}_0\|^2+\sum_{i=1}^{N}\|\widehat{\Psi_i^*(f_i)}\|^2\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{N}\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i h)}\|^2_{L^2(R^{n-1})}\right\}-\delta_1\sum_{i=1}^{N}\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\|^2_{L^2(R^{n-1})}$$

を得る. しかるに

$$\|\widehat{\alpha_0 u}\|^2+\sum_{i=1}^{N}\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i u)}\|^2 \leqq Const\sum_{i=0}^{N}\|\alpha_i u\|^2_{L^2(\Omega)}=Const\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

また $f_i=\alpha_i f-\left(\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\right)u$ $(i=0,1,\cdots,N)$ を思い起せば

$$\|\widehat{f}_0\|^2+\sum_{i=1}^{N}\|\widehat{\Psi_i^*(f_i)}\|^2 \leqq Const\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

が成り立つ

$$\sum_{i=1}^{N}\|\widehat{\Psi_i^*(\alpha_i h)}\|^2_{L^2(R^{n-1})} \leqq Const\,\|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \| \widetilde{\psi_i^* (\alpha_i u)} \|^2_{L^2(R^{n-1})} \geqq \text{Const} \| u(t) \|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

であるから

$$\frac{d}{dt} \| u(t) \|^2_{\mathcal{E}(t)} \leqq \text{Const} \left(\| u(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| h(t) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right)$$
$$- \delta \ \| u(t) \|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

を得, これを

$$\| u(t) \|^2_{\mathcal{E}(t)} - \| u(0) \|^2_{\mathcal{E}(0)} = \int_0^t \frac{d}{d\tau} \| u(\tau) \|^2_{\mathcal{E}(\tau)} d\tau$$

に代入すると

$$\leqq \text{Const} \int_0^t \left(\| u(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| h(\tau) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) d\tau$$
$$- \delta \int_0^t \| u(\tau) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} d\tau$$

こゝで $\| u(t) \|_{\mathcal{E}(t)} \sim \| u(t) \|_{L^2(\Omega)}$ を用い上式を書き直すと

$$\| u(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \| u(\tau) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} d\tau$$
$$\leqq \text{Const} \int_0^t \| u(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + \text{Const} \left\{ \| u(0) \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left(\| f(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| h(\tau) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) d\tau \right\}$$
$$\leqq \text{Const} \int_0^t \left[\| u(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^\tau \| u(s) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} ds \right] d\tau$$
$$+ \text{Const} \left\{ \| g \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left(\| f(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| h(\tau) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) d\tau \right\}$$

となる.

そこで
$$\psi(t) \equiv \| u(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \| u(\tau) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} d\tau$$
$$\theta(t) = \text{Const} \left\{ \| g \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left(\| f(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| h(\tau) \|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) d\tau \right\}$$

とおきよく知られた事実

$$\psi(t) \leqq C \int_0^t \psi(\tau) d\tau + \theta(t) \Rightarrow \psi(t) \leqq e^{ct} \theta(t)$$

を用いれば所要の energy 不等式 (3.2) を得, 定理 3.1 の証明が完結した.

吾々はさきに混合問題(1.2)―(1.4)の C^1-solution $u(t,x)$ について議論したが

i) $u(t,\cdot)\in H^1(\Omega)=\{v(x)\ ;\ v, \frac{\partial v}{\partial x_j}\in L^2(\Omega), j=1,\cdots,n\}$ 1)

ii) $(0,T]\ni t \rightsquigarrow u(t,\cdot)\in L^2(\Omega)$ は t について一回連続的微分可能

なる解 $u(t,x)$ に対しても energy 不等式(3.2)が成り立つ.

実際このとき $u(t,x)$ は境界 $\partial\Omega$ 上への trace $u(t,\cdot)|_{\partial\Omega}\in L^2(\partial\Omega)$ を有し $Pu|_{\partial\Omega}=h\in L^2(\partial\Omega)$ となる. 又明らかに $f(t,\cdot), g\in L^2(\Omega)$. そして $u(t,\cdot)\in H^1(R^n_+)$ のとき $u(t,x',0)$ を $x_n=0$ 上への trace の意味にとれば

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\widetilde{u(t,x)}=\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_n}(t,x)}+u(t,x',0)\otimes\delta(x_n)$$

が成り立ち 従って(2.6)式が有効である. これらのことに注意すれば吾々の先の議論を全く平行的にすゝめることができるからである.

§4. 解の存在について

吾々は前節で混合問題(1.2)―(1.4)の $C^1(\bar{\Omega})$ or $H^1(\Omega)$-solution が存在すれば一意的であり, そして data f, g, h に連続的に依存することを見た. しかしこのような解の存在は一般に期待できるか否かわからない. そこで先ず L^2-solution の存在を問題にするが L^2-solution に対しては領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ への trace が意味をもたないので混合問題を発展方程式的に formulate し直し 境界条件を

1) $\Omega=R^n$ のとき $H^1(R^n)$ は前に用いた $\mathcal{D}^1_{L^2}(R^n)$ と一致する. $H^1(\Omega)$ は又 $W^1_2(\Omega)$, $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ で表わされることもある.

homogeneous にしてそれをみたすということを弱い意味に解釈せねばならない．前と同じく

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} + B(t,x) \tag{4.1}$$

とおく．そして行列微分作用素 $\mathcal{A}(t)$ を定義域

$$D(\mathcal{A}(t)) = \{v\,;\ \bar{\Omega} \text{ で } C^\infty \text{ で境界 } \partial\Omega \text{ 上で } P(t,x)v(x)=0 \text{ を満足する}\} \tag{4.2}$$

をもつ $L^2(\Omega)$ における linear operator と考える．そのとき $D(\mathcal{A}(t))$ は明らかに $L^2(\Omega)$ で dense である．また $\mathcal{A}(t)$ は pre-closed operator であるから $L^2(\Omega)$ の linear operator としての closed extension が存在するがこれを $\mathbf{A}(t)$ で表わすことにする．このとき混合問題

$$\begin{cases} L[u(t,x)] = f(t,x), & 0<t\leq T,\ x\in\Omega \\ u(0,x) = g(x), & x\in\Omega \\ P(t,x)u(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の解 $u(t,x)$ とは発展方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = \mathbf{A}(t)u(t) + f(t) & f(t)\in L^2(\Omega) \\ u(0) = g \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{4.3}$$

の解即ち

1) $(0,T] \ni t \rightsquigarrow u(t) \in L^2(\Omega)$ が一回連続的微分可能

2) $u(t) \in D(\mathbf{A}(t))$

なる $u(t)$ で (4.3) を満足するものであると解釈する．

このとき energy 不等式は次の形になる．

$[0,T] \ni t \rightsquigarrow f(t) \in L^2(\Omega)$ が連続である $f(t)$ と $g \in L^2(\Omega)$ に対する(4.3)の解 $u(t) \in D(\mathbf{A}(t))$ に対し energy 不等式

$$(4.4) \qquad \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \mathrm{Const}\left\{\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau\right\}$$

が成り立つ.

さて十分多くの $f(t)$ と g に対し発展方程式(4.3)の解が常に存在することを保証する為には境界条件について(II)に更に条件を必要とする. まず境界条件に関し positivity の条件だけからは解の存在が一般に期待できないであろうことは容易に推察がつく. 実際 linear boundary conditions を次々に課してゆけば (即ち $\ell \times m$ 行列 P の ℓ が大になる) linear mapping $P(t,x)$ の kernel の次元は減少する. 従って吾々は positivity を満足させながら境界条件を過剰にできるからである. そこで境界条件を課し過ぎることを排除する次の条件を設ける.

(III) "<u>boundary conditions の minimal non-negativity</u>"

P から境界条件を一つでもとり除けば quadratic form (3.1)

$$Q(t,x,\zeta) = \mathcal{N}(t,x)\, a(t,x,\gamma)\, \zeta \cdot \bar{\zeta} \qquad , \quad x \in \partial\Omega$$

は $\ker P(t,x)$ 上で non-negative とはならない. 云い換えれば $\ker P(t,x)$ を真部分空間として含む $\mathbf{C}^m$ の任意の subspace $\mathcal{M}(t,x)$ 上で $Q(t,x,\zeta)$ は non-negative とはならない. 即ち適当な $\zeta \in \mathcal{M}(t,x)$ で $Q(t,x,\zeta) < 0$ となるものが存在する.

従ってこの条件は boundary space "$\ker P(t,x)$ に関する <u>maximal</u>

non-negativity" とも呼ばれる.

吾々は更に

(IV) boundary $\partial\Omega$ は noncharacteristic for $\mathcal{A}(t)$ である即ち

$$\det\ (a(t,x,\gamma)) \neq 0 \quad \text{on } \partial\Omega \text{ が成り立つ}$$

ことを仮定しよう.

この条件の下で maximally non-negative space $\ker P(t,x)$ の次元 $m-l$ は行列 $a(t,x,\gamma)$ の正の固有値の個数に等しいことが容易に証明される.

吾々は吾々の問題を発展方程式の一般論にのせることにより解の存在を導き出したい. しかし双曲型方程式の場合 係数 $A_j(t,x)$ $(j=1,\cdots,n)$, $B(t,x)$ 及び boundary operator $P(t,x)$ が t に関係する場合 $A(t)$ の定義域が t と共に急激に変ることが起るので既成のものに帰着せしめるのは困難である. 又 Cauchy 問題のとき Mizohata [8] によって用いられた Cauchy の折線法に基くやり方も つくられた近似列の極限が boundary value problem の解であることを示すところで障害にぶつかる. そこで こゝでは

(V) $A_j(t,x)$ $(j=1,\cdots,n)$, $B(t,x)$, $P(t,x)$ は t に関係しない場合 のみを考えることにする.

Theorem 4.1

§1 に述べた意味での一階双曲型作用素系 L および 境界作用素 P に関し 条件 (I) ― (V) がみたされているとしよう. そのとき $[0,T] \ni t \rightsquigarrow f(t)$, $\mathbf{A}f(t) \in L^2(\Omega)$ が連続となる

任意の $f(t)$ と任意の $g \in D(\mathbf{A})$ に対し問題 (4.3)

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \mathbf{A}\,u(t) + f(t) \\ u(0) = g \end{cases}$$

の解 $u(t) \in D(\mathbf{A})$ が一意的に存在し energy 不等式 (4.4) をみたす.

"証明の sketch"　方針は Hille-Yoshida の定理が適用できることを示す.

第一段

まず条件 (I) と (II) の下で適当な $\beta > 0$ をとれば $\lambda > \beta$ なる任意の実数 λ に対し

(4.5)　$$\| (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) u \|_{\mathcal{E}} \geqq (\lambda - \beta) \| u \|_{\mathcal{E}} \qquad \forall u \in D(\mathbf{A})$$ [1)]

が成り立つことを云う. それには

(4.6)　$$(\mathbf{A} u, u)_{\mathcal{E}} + (u, \mathbf{A} u)_{\mathcal{E}} \leqq \mathrm{Const}\, \| u \|_{\mathcal{E}}^2$$

が云えればよい. ここで $(\ ,\ )_{\mathcal{E}}$, $\| \cdot \|_{\mathcal{E}}$ は (3.8) で定義された $L^2(\Omega)$ 上の一つの内積及びそれから導かれる norm で $(\ ,\ )_{L^2(\Omega)}$, $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$ と同値なものである. (4.6) の証明は

$$(u, v)_{\mathcal{E}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \left(\mathcal{E}_0 \widetilde{\alpha_0 u}, \widetilde{\alpha v} \right)_{L^2(R^n)} + \sum_{i=1}^{\nu} \left(\mathcal{E}_i \rho_\epsilon * \left(\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i u)} \right), \rho_\epsilon * \left(\widetilde{\Psi_i^*(\alpha_i v)} \right) \right)_{L^2(R^n)} \right\}$$

に注意すれば energy 不等式の証明の中で既になされている.

不等式 (4.5) より $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) D(\mathbf{A})$ は a closed subspace of $L^2(\Omega)$ で $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ が $D(\mathbf{A})$ を $L^2(\Omega)$ の中への one-to-one mapping であることが従う.

Remark. 境界条件が strictly positive なとき $|(\mathbf{A}u, u)_{\mathcal{E}} + (u, \mathbf{A}u)_{\mathcal{E}}| \leqq \mathrm{Const}\, \| u \|_{\mathcal{E}}^2$ が従わないので (4.5) は $\| (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) u \|_{\mathcal{E}} \geqq (|\lambda| - \beta) \| u \|_{\mathcal{E}}$ となる

1) $\mathbf{I}$ は identity operator

形にはならない．即ち t に関し reversible ではない．云い換えれば過去には一般にはとけない．しかし序で注意したように strict positivity が non-negativity にゆるめられることが溝畑先生によって示されているのでその場合には reversible な場合も含んでいる．

第二段

$(\lambda I - A)$ は $D(A)$ を $L^2(\Omega)$ の上へ移すことを示す．

Closed operator A の $L^2(\Omega)$ における (strict) adjoint operator を A^* で表わそう．又微分作用素系 $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + B(x)$ の formal adjoint operator を $\mathcal{A}^{(*)}$ で表わす：

$$\mathcal{A}^{(*)} = -\sum_{j=1}^{n} {}^t\overline{A_j(x)}\frac{\partial}{\partial x_j} + \left(B(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, {}^t\overline{A_j(x)}}{\partial x_j} \right).$$

そのとき条件(III) 即ち $\ker P(x)$ の maximal non-negativity for L or $\mathcal{A}$ から adjoint boundary space $(a(x,\gamma)\ker P(x))^{\perp}$ [1] が $L^{(*)}$ or $\mathcal{A}^{(*)}$ に対して strict positivity をもつことが従う．

証明は簡単である．Friedrichs-Lax [4] 参照．

また条件(IV)を用い $\mathcal{A}^{(*)}$ を定義域

$$D(\mathcal{A}^{(*)}) = \left\{ v(x);\quad v \in C^{\infty}(\bar{\Omega}),\quad v(x)\big|_{x\in\partial\Omega} \in (a(x,\gamma)\ker P(x))^{\perp} \right\}$$

をもつ pre-closed linear operator in $L^2(\Omega)$ とみてその closed extension が A^* と一致することを示すことができる．

かくして A^* に対しても第一段が適用され

$$\|(\lambda I - A^*)v\|_{\mathcal{E}_1} \geqq (\lambda - \beta_1)\|v\|_{\mathcal{E}_1}, \quad \forall v \in D(A^*), \quad \forall \lambda > \beta_1 > 0$$

が成り立つことになる．

1) $\perp$ は C^m において直交補空間をとることを意味する．

これより $(\lambda I-A)$ は $D(A)$ を $L^2(\Omega)$ の上へ移すことが従う.

第一段, 第二段より $L^2(\Omega)$ 上の有界作用素 $(\lambda I-A)^{-1}$ が存在し

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda-\beta} \qquad (\lambda > {}^{\exists}\beta > 0)$$

が成り立つ. 従って Hille-Yoshida の定理が適用できる.

すなわち A を生成作用素とする semi-group $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が一意的に存在し

$[0,T] \ni t \rightsquigarrow f(t), Af(t) \in L^2(\Omega)$ が連続である $f(t)$ と $g \in D(A)$ に対し発展方程式 (4.3) の解 $u(t) \in D(A)$ は

$$u(t) = T_t g + \int_0^t T_{t-s} f(s)\, ds$$

で与えられる.

最後に次のことを注意しておこう.

双曲型作用素 L に対しその propagation speed は $\overline{\Omega}$ の近傍で決して 0 にならない. 云い換えれば $\mathcal{A}$ は elliptic operator 即ち

$$\det(a(x,\xi)) \neq 0 \qquad \forall\, |\xi| = 1$$

が成り立つとする. このとき boundary space $\ker P(x)$ の L or $\mathcal{A}$ に対する strict positivity から Coerciveness for $\mathcal{A}$ が従う[1]. 即ち

$$\forall\, v \in D(\mathcal{A}) = \{v \,;\, v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad , \quad v(x)|_{\partial\Omega} \in \ker P(x)\}$$

に対し,

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left\{\|\mathcal{A} v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right\}$$

が成り立つ. これより上の場合には $H^1(\Omega)$-solution の存在を示すことができる.

1) non-negative なときには必ずしも coercive にはならない. 実際このときには反例がある.

双曲型方程式の初期―境界値混合問題に関する研究

i) 空間一次元の場合

Campbell & Robinson (Proc. London Math. Soc. 1955)
Thomée (Math. Scand. 1957, 58), Peyser (J. Math. Mech. 1957).

ii) 2階双曲型方程式の場合

Kryzanski & Schauder (Studia Math. 1936)
Ladyzenskaya, Lions (本), Duff (Cand. J. 1956, 57)
Rogak (Arch. Rat. Mech. Anal. 1966), Lee (J. Math. Anal & Appl. 1966).
Mizohata & Ikawa (to appear), その他 ...

iii) 一階対称双曲型方程式系.

Friedrichs, Lax, Phillips, Sarason (C.P.A.M. 1962).

iv) 定数係数で領域が半空間の場合

Shirota (1957 学会講演, manuscript), Agmons (C.N.R.S. 1962),
Hersh (J. Math. Mech. 1963, Arch. Rat. Mech. Anal. 1964),
Sarason (Arch. Rat. Mech. Anal. 1965).

v) (特殊な形の)高階変数係数の場合

Mizohata (Séminaire Leray (1966〜1967) Collège de France)
Miyatake (4階の場合)
Duff (Cand. J. 1959).

vi) 解析的係数の場合

Duff (Cand. J. 1958, 59), Eisen (Cand. J. 1966)
Mel'nik (Doklady, 1966).

参考文献

(1) M.S.Agronovic , Positive problems of mixed type for certain hyperbolic systems. Soviet Math., 7,539-542 (1966) (Doklady 1966,167, No.6).

(2) A.P.Caldéron and A.Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer.J.Math., 79,901-921 (1957).

(3) K.O.Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, Comm.Pure Appl.Math., 11,333-418 (1958).

(4) K.O.Friedrichs and P.D.Lax, Boundary value problems for first order operators, Comm.Pure Appl.Math., 18,355-388 (1965).

(5) L.Hörmander, Pseudo-differential operators, Comm.Pure Appl. Math., 18,501-517 (1965).

(6) J.J.Kohn and Nirenberg, An algebra of pseudo-differential operators, Comm.Pure Appl.Math., 18,269-305 (1965).

(7) M.Matsumura, Existence locale de solutions pour quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles, Jap.J.Math., 32,13-49 (1962).

(8) S.Mizohata, Systèmes hyperboliques, J.Math.Soc.Japan, 11, 205-233 (1959).

(9) ———, 偏微分方程式論, 岩波 (1965)

(10) R.S.Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans.Amer.Math.Soc., 90, 193-254,(1959).

(11) M.Yamaguti, Sur l'inégalité d'énergie pour le système hyperbolique, Proc.Japan Acad., 35,37-41 (1959).

(12) M.Yamaguti, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem.Coll.Sci.Univ.Kyoto, 32,121-151.

(13) K.Yoshida, An operator theoretical integration of the wave equation, J.Math.Soc.Japan, 8,79-92 (1956).