数理解析研究所講究録
第 39 巻 1968 年 131-136

Contraction Semi-group の摂動

東大理　吉田耕作

§1　作用素の分数巾の利用

(C_0)型の contraction semi-group in a B-space X (以下 (C_0)型の c.s.-g. と書く) $\{T_t; t \geqq 0\}$ の infinitesimal generator (以下 i.g. と書く)をA とする. Xにおける線型作用素B を Aに加へた$(A+B)$がまた(C_0)型の s.-g. の i.g. になるための十分條件について詳しい研究が E. Hille-R.S. Phillips [1] に述べられているが, 稍々一般的に過ぎて面倒である.

ここでは"作用素の分数巾" (例へば K. YOSIDA, [1]) を使っての一つの扱い方を述べる.

<u>定理 1.</u> A, Bを B-space Xにおける(C_0)型の c.s.-g. の i.g. とする. $\hat{A}_\alpha$ $(0<\alpha<1)$を"Aの分数巾"とし,

(1)　$D(B) \supset D(\hat{A}_\alpha)$

と假定すれば, $(A+B)$がまた(C_0)型の c.s.-g. の i.g. になる.

<u>証明の方針</u>　$D(\hat{A}_\alpha) \supseteq D(A)$ かつ

(2)　$(-A)^\alpha x = -\hat{A}_\alpha x = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I-A)^{-1}(-Ax)\,d\lambda$

　　$(x \in \mathfrak{D}(A)$ のとき$)$

なることを用い

(3)　$\|\hat{A}_\alpha x\| \leqq \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\,\|Ax\|^{\alpha}\cdot\|x\|^{1-\alpha}$,　$x \in D(A)$

これから，任意の $a>0$ に対して適当に $b>0$ をとれば

(3)'　$\|\hat{A}_\alpha x\| \leqq a\|Ax\| + b\|x\|$,　$x \in D(A)$

一方において仮定 $D(B) \supseteq D(\hat{A}_\alpha)$ と閉グラフ定理により，正数 c により

(4)　$\|Bx\| \leqq c(\|\hat{A}_\alpha x\| + \|x\|)$,　$x \in \mathfrak{D}(\hat{A}_\alpha)$

ゆえに

(5)　$\|Bx\| \leqq ac\|Ax\| + c(b+1)\|x\|$,　$x \in \mathfrak{D}(A)$

したがって $\lambda>0$ として，$x \in X$ ならば

(6)　$\|B(\lambda I-A)^{-1}x\| \leqq ac\|A(\lambda I-A)^{-1}x\| + c(b+1)\|(\lambda I-A)^{-1}x\|$

$A(\lambda I-A)^{-1} = \lambda(\lambda I-A)^{-1} - I$ と $\|\lambda(\lambda I-A)^{-1}\| \leqq 1$ (これは T_t が contraction s.-gr. of class (C_0) ということからわかる) によって

(7)　$\|B(\lambda I-A)^{-1}\| < 1$　for $2ac + \lambda^{-1}c(b+1) < 1$

このような $\lambda>0$ に対して，$(I-B(\lambda I-A)^{-1})^{-1}$ が有界な逆をもつ したがって $R((I-B(\lambda I-A)^{-1}) = X$. したが

って $R(\lambda I-A)=X$ により

$$R(\lambda I-A-B)=R((I-B(\lambda I-A)^{-1})(\lambda I-A))=X$$

一方において A, B ともに c. s.-gr. の i.g. だから $(\lambda-A-B)^{-1}$ の存在は $\|\lambda(\lambda-A-B)^{-1}x\|\leqq\|x\|$, $x\in R(\lambda-A-B)$, とともにわかっている。

だから有界な逆 $(\lambda I-A-B)^{-1}$ が存在しかつ $\|\lambda(\lambda I-A-B)^{-1}\|\leqq 1$ がいえる。

<u>系</u>　A がなる holomorphic s.-gr. の i.g. ならば, (A+B) も holomorphic s.-gr. の i.g. になる。

<u>Proof</u>　$\overline{\lim\limits_{|\tau|\uparrow\infty}}|\tau|\,\|((\sigma_0+i\tau)I-A)^{-1}\|<\infty$

と假定すれば, 上の証明のやり方で

$$\|\tau((\sigma_0+i\tau)I-A-B)^{-1}\|\leqq\|(I-B((\sigma_0+i\tau)I-A)^{-1})^{-1}\|$$
$$\times\|\tau((\sigma_0+i\tau)I-A)^{-1}\|$$

を得て　$\overline{\lim\limits_{|\tau|\uparrow\infty}}|\tau|\,\|((\sigma_0+i\tau)I-A-B)^{-1}\|<\infty$

<u>註</u>　上の結果は K. YOSIDA: A perturbation theorem for semi-groups of linear operators, Proc. Jap. Acad. <u>41</u> (1965), 645–647 に発表されている。

I. Miyadera: A perturbation theorem for contraction semi-groups, ibid., 755–758 で

定理2. $D(B) \supseteq D(A)$ かつ，B と A とが (C_0) 型の c. s.-gr. の i. g. ならば $A+\hat{B}_\alpha$ $(0<\alpha<1)$ も c. s.-gr. の i. g. ((C_0) 型の) である．

を証明した，証明の idea は定理1とほぼ同様である．また定理1系に相当することもほぼ同様にして証明される．

§2. Holomorphic Markov Process への応用．

定理1の応用として例へば次の結果が得られる (K. YOSIDA: On holomorphic Markov processes, Proc. Jap. Acad. 42 (1966), 313–317):

(8) $$A = a^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

において a, a', b, q は $(-\infty, \infty)$ において有界な一様連続な実数値函数で，且つ

(9) $$q(x) \leqq 0, \quad 0 < \delta \leqq a(x) \quad (\delta \text{ は正数})$$

とする：このとき A を infinitesimal generator とする $C[-\infty, \infty]$ における (C_0) 型の semi-group は holomorphic semi-group である．

§3. Trotter の Product 公式

<u>Theorem 4.</u> A, B が contr. s-g. of class (C_0) の i.g. で、かつ A+B もまたそのような i.g. とする。このとき

$$\underbrace{A+B}_{D(A)\cap D(B)\text{ を domain とする}}$$

(10) $P_t = e^{tA}$, $Q_t = e^{tB}$, $R_t = e^{t(A+B)}$

とおくと、t の有限区間で一様に

(11) $\begin{cases} u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \text{ に対して} \\ R_t u = s\text{-}\lim_{n\to\infty} (P_{t/n} Q_{t/n})^n u \end{cases}$

が成立つ。

<u>証明.</u> $h = \frac{t}{n}$ とおく。

$$(P_h Q_h)^n - R_h^n = \sum_{j=0}^{n-1} (P_h Q_h)^{n-1-j} (P_h Q_h - R_h) \times R_h^j$$

だから、P_t, Q_t がともに contraction なることから

$$\|\{(P_h Q_h)^n - R_h^n\} u\| \leqq n \sup_{0 \leqq s \leqq t} \|(P_h Q_h - R_h) R_s u\|$$

$$= t \sup_{0 \leqq s \leqq t} \left\| \frac{P_h Q_h - R_h}{h} R_s u \right\|$$

ところが $u \in \mathcal{D}(A+B)$ ならば $u \to R_s u$ はまた $\mathcal{D}(A+B)$ に入り、かつ $\underbrace{s\text{-continuous}}_{\text{in } s}$ であるから結局

$u \in \mathcal{D}(A+B)$ なるとき

$$\frac{P_h Q_h - R_h}{h} u = P_h \frac{Q_h - I}{h} u + \frac{P_h - I}{h} u - \frac{R_h - I}{h} u$$

が 0 に s-converge することがいへればよい。ところが右辺オ2項，オ3項はそれぞれ Au, $(A+B)u$ に s-converge する．また右辺オ1項もまた，P_h の $h=0$ における s-continuity と $\|P_h\| \leqq 1$ とから，Bu に s-converge して証明をおわる．

<u>註</u> Trotter の論文は H. F. Trotter: On the product of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 545–551 にある．ここには E. Nelson–G. Faris: La formule de Trotter dans les semi-groupes et son application à l'interpretation de l'intégrale de Feynman (Seminaire Lions–Schwartz, 1967 (?)) にしたがって述べた．