

*Semi-groups of operators in locally convex spaces*

東京女子大 文理 高村 多賀子

§ 1. 序文

本稿では、局所凸線形位相空間におよぶ線形作用素の作半群で、必ずしも同等連続でない場合について論ずる。

従来の Banach 空間におよぶ作用素の作半群の理論は、近年 I. Schwartz [5], 宮寺 [4], 吉田 [6], 小松 [2], その他により局所凸空間におよぶ作用素の作同等連続な半群の場合に拡張されたが、その議論は Banach 空間の場合とほぼ平行になされた。すなわち  $\{T_t; t \geq 0\}$  を局所凸空間  $E$  におよぶ同等連続な半群とし、 $A$  をその生成作用素とすると、 $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  なる複素数  $\lambda$  に対して、 $T_t$  の Laplace 変換と  $A$  の resolvent が存在して

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt = (\lambda I - A)^{-1} x, \quad x \in E$$

が成立し、この関係以上の理論において核心をなしている。

しるくに同等連続でない半群の場合には、その Laplace 変換も生成作用素の resolvent も、やはり必ずしも存在しないの

で異つた取扱いが必要となり。ここでは、一般 Laplace 変換の概念を導入することにより、いわゆる Hille-Yosida の定理に相当するものが得られることを示そう。

詳細は高村 [3] を参照のこと。

## §2. 作用素の半群

$E$  を局所凸線形位相空間とし、 $L(E, E)$  を  $E$  から  $E$  への中への連続線形作用素の全体とする。

定義. 作用素の族  $\{T_t; t \geq 0\} \subset L(E, E)$  は次の条件 (1), (2), (3) を満たすとき 半群 と呼ばれる。

$$(1) \quad T_t T_s = T_{t+s}, \quad t, s \geq 0,$$

$$(2) \quad T_0 = I$$

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow s} T_t x = T_s x, \quad s \geq 0, x \in E.$$

さらに、半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  は任意の  $0 < s < \infty$  に対して、部分族  $\{T_t; 0 \leq t \leq s\}$  が同等連続 (すなわち、 $E$  の任意の semi-norm  $\rho$  に対して、 $E$  の他の semi-norm  $\rho'$  が存在して、すべからぬ  $0 \leq t \leq s, x \in E$  に対して  $\rho(T_t x) \leq \rho'(x)$  が成立する) のとき、局所同等連続 と呼ばれ、 $\{T_t; t \geq 0\}$  自身も同等連続のとき 同等連続 と呼ばれた。

[注意] もし  $E$  が tonnelé ならば、半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  はすべ

2 局所同等連続になる。

半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  の生成作用素  $A$  は

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T_h - I)x$$

によって、右辺の極限が  $E$  の中に存在するとき定義される。

$A$  の定義域を  $D(A)$  とおく。このとき同等連続な半群の場合と同様に 2 次の基本的な一連の命題が成立する。

命題 2.1.  $\{T_t; t \geq 0\}$  が局所凸空間  $E$  における半群とするとき、もし  $x \in D(A)$  ならば  $T_t x \in D(A)$ ,  $t \geq 0$  かつ  $T_t x$  は  $t$  のついて連続的微分可能で

$$\frac{d}{dt} T_t x = A T_t x = T_t A x, \quad t \geq 0$$

が成立する。また  $x \in D(A)$  かつ  $Ax = y$  となるための必要十分条件は

$$T_t x - x = \int_0^t T_s y \, ds, \quad t \geq 0$$

が成立する。こゝで、

[注意] この命題は  $E$  の数列完備性が仮定されていない。

系.  $E$  が数列完備のとき  $\{T_t; t \geq 0\}$  が  $E$  における半群とすると、各  $x \in E$  について  $\int_a^b T_s x \, ds \in D(A)$ ,  $(0 \leq a, b < \infty)$  かつ  $A \int_a^b T_s x \, ds = T_b x - T_a x$  が成立する。

命題 2.2.  $\{T_t; t \geq 0\}$  が局所凸空間  $E$  における半群とす。

もし  $E$  が数列完備ならば  $D(A)$  は  $E$  で稠密である。またもし  $\{T_t; t \geq 0\}$  が局所同等連続ならば  $A$  は閉作用素である。

## §3. 共役半群

$E$  を実列完備な局所凸空間,  $E'$  をその共役空間とする。 $\{T_t; t \geq 0\}$  は  $E$  における半群とし, その生成作用素を  $A$  とする。このとき  $T_t$  の共役作用素  $T_t^*$  からなる族  $\{T_t^*; t \geq 0\}$  は  $E'$  において強位相  $\beta(E', E)$  に関して一つの半群をなし, その生成作用素は丁度  $A$  の共役作用素  $A^*$  と一致する。ところで強位相  $\beta(E', E)$  に関して  $t \geq 0$  といふと,  $E' \ni x'$  に対して  $T_t^* x'$  が成り立ち,  $t$  について連続とはなさないため,  $\{T_t^*; t \geq 0\}$  は  $E'$  全体では  $\beta(E', E)$  に関して半群をなさないが,  $E'$  の  $\beta(E', E)$ -実列完備な  $E'$  のある部分空間  $D(A^*)$  をとると,  $\beta(E', E)$  から導入された位相に関して半群になっている。すなわち,

定理 1.  $E$  は実列完備,  $E'$  は  $\beta(E', E)$ -実列完備とする。  $\{T_t; t \geq 0\}$  は  $E$  における半群とし, その生成作用素を  $A$  とする。このとき  $D(A^*)$  の  $E'$  における  $\beta(E', E)$ -閉包  $\overline{D(A^*)}$  は  $T_t^* x'$  が  $t$  について  $\beta(E', E)$ -連続となるような  $x' \in E'$  の全体と一致し,  $T_t^*$  の  $\overline{D(A^*)}$  における制限  $T_t^+$  を考えると,  $\{T_t^*; t \geq 0\}$  は  $\overline{D(A^*)}$  において  $\beta(E', E)$  から導入された位相に関して半群をなし, その生成作用素  $A^+$  は 値域が  $\overline{D(A^*)}$  に入るような  $A^*$  の制限のうち最大のものと一致する。とくに  $\{T_t; t \geq 0\}$  が局所同等連続であるか, あるいは同等連続であるかに従って,  $\{T_t^*; t \geq 0\}$  も局所同等連続, あるいは同等連続となる。

系  $E$  が回帰的  $\alpha$  とし、 $\{T_t; t \geq 0\}$  は  $E$  の  $\alpha$  半群、 $A$  は  $\alpha$  の生成作用素とすると、 $\{T_t^*; t \geq 0\}$  は  $E'$  の  $\alpha$  半群  $\beta(E', E)$  の生成作用素と一致する。

#### § 4. 一般 Laplace 変換

$\mathcal{D}$  は  $R^1 = (-\infty, \infty)$  で定義された複素数値無限回連続微分可能で compact な台をもつ関数の空間とし、 $\mathcal{D}_{[-k, k]}$ ,  $0 < k < \infty$ , あるいは  $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$ ,  $-\infty < a < \infty$  を台が  $[-k, k]$ , あるいは  $(-\infty, a]$  の関数とする。これらに通常の内積を導入する。

各  $\varphi \in \mathcal{D}$  に対し、共役 Laplace 変換  $\hat{\varphi}$  を

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} \varphi(t) dt \quad (\lambda: \text{複素数})$$

で定義すると

$$\left(\frac{d}{dt} \varphi\right)^\wedge = -\lambda \hat{\varphi}, \quad \frac{d}{d\lambda} \hat{\varphi} = (t\varphi)^\wedge$$

が成立する。

変換  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$  による  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_{[-k, k]}$ ,  $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  の像をそれぞれ  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_{[-k, k]}$ ,  $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  とする。Paley-Wiener の定理から、 $\mathcal{D}_{[-k, k]}$  は整関数  $\hat{\varphi}(\lambda)$  で、任意の整数  $N \geq 0$  に対し  $C = C(N) > 0$  が存在して

$$|\hat{\varphi}(\lambda)| \leq C(1+|\lambda|)^{-N} e^{k|\operatorname{Im} \lambda|} \quad (\lambda = \mu + i\nu)$$

が成立するようになる  $\mathcal{D}$  の全体と一致している。  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_{[-k, k]}$ ,

$\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  には, それぞれ  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_{[-k, a]}$ ,  $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  と位相同形になり  
よすな位相を入れよ.

さて,  $E$  を実列完備な局所凸空間とし,  $a > 0$  を一つ固定  
すよ. このとき  $\mathcal{D}_{(-\infty, 0]} \subset \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$ ,  $\mathcal{D}_{(-\infty, 0]} \subset \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  である.  
 $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  から  $E$  の中への連続線形作用素の全体  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  を  
考え,  $\mathcal{D}_{(-\infty, a]}$  のすへての有限集合上の一様収束位相を入れよ.  
 $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  については同様.

$$\mathcal{D}'_a(E) = \{ F \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E) ; F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, 0]} \},$$

$$\mathcal{D}'_a(E) = \{ \hat{F} \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E) ; \hat{F}(\hat{\varphi}) = 0 \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{(-\infty, 0]} \}.$$

とすよ, これを  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$ ,  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  からの位相を導  
入すよ.

各  $F \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  に対して, その一般 Laplace 変換  $\hat{F}$  を

$$\hat{F}(\hat{\varphi}) = F(\varphi), \quad \hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によつて,  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  の元として定義される. このとき対  
応  $F \leftrightarrow \hat{F}$  によつて  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  と  $L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$ , さらに  
 $\mathcal{D}'_a(E)$  と  $\mathcal{D}'_a(E)$  は位相同形になつていよ. この二つの空間  
 $\mathcal{D}'_a(E)$  と  $\mathcal{D}'_a(E)$  が我々の理論において重要な役割を演ずるの  
である.

$f \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, \mathbb{C})$  ( $\mathbb{C}$  は複素数空間) と  $x \in E$  に対して,  $f \otimes x \in$

$$(f \otimes x)(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle x, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によつて定義すよと,  $f \otimes x \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$  である. とくに

Dirac 測度  $\delta \in \mathcal{D}'$  に対し  $\delta \otimes x \in \mathcal{D}'_a(E)$ . 他方  $\hat{f}(\lambda)$  を  $\text{Re}(\lambda) > 0$  の正則な関数で一つの元  $\hat{f} \in \mathcal{D}'$  を定義して  $u \otimes x$  とするときは,  $\hat{f} \otimes x, x \in E$  と

$$(\hat{f} \otimes x)(\hat{\varphi}) = \langle \hat{\varphi}, \hat{f} \rangle x = \left( \frac{1}{i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda) \hat{f}(\lambda) d\lambda \right) x,$$

$$\hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}, \mu > 0$$

によって定義すると,  $\hat{f} \otimes x \in L(\mathcal{D}_{(-\infty, a]}, E)$ . と  $u \otimes x \in \mathcal{D}'_a(E)$ .

$F \in \mathcal{D}'_a(E)$  の微分  $\frac{d}{dt} F \in \mathcal{D}'_a(E)$  は

$$\left( \frac{d}{dt} F \right) (\varphi) = -F \left( \frac{d}{dt} \varphi \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によって, 同様に  $\hat{F} \in \mathcal{D}'_a(E)$  の微分  $\frac{d}{d\lambda} \hat{F} \in \mathcal{D}'_a(E)$  は

$$\left( \frac{d}{d\lambda} \hat{F} \right) (\hat{\varphi}) = -\hat{F} \left( \frac{d}{d\lambda} \hat{\varphi} \right), \quad \hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によって定義される.  $\frac{d}{dt}, \frac{d}{d\lambda}$  はそれぞれ  $\mathcal{D}'_a(E), \mathcal{D}'_a(E)$  において連続な作用素である.

$F \in \mathcal{D}'_a(E)$  に  $t$  をかけると  $tF \in \mathcal{D}'_a(E)$  は

$$(tF)(\varphi) = F(t\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によって,  $\hat{F} \in \mathcal{D}'_a(E)$  に  $\lambda$  をかけると  $\lambda \hat{F} \in \mathcal{D}'_a(E)$  は

$$(\lambda \hat{F})(\hat{\varphi}) = \hat{F}(\lambda \hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によって定義され,  $\partial$  の作用素  $t, \lambda$  はそれぞれ  $\mathcal{D}'_a(E), \mathcal{D}'_a(E)$  において連続である.  $\partial$  のとき

$$\lambda \hat{F} = \left( \frac{d}{dt} F \right)^\wedge, \quad \frac{d}{d\lambda} \hat{F} = (-tF)^\wedge, \quad F \in \mathcal{D}'_a(E)$$

が成立する.

## §5. 一般 resolvent

$E$  は 良列完備 である。  $S_t (t \geq 0)$  は  $L(E, E)$  における局所同等連続な族で、各  $x \in E$  に対して  $S_t x$  が  $t \geq 0$  について連続である。このとき各  $F \in \mathcal{D}'_a(E)$  に対して合成積  $F * S_t \in \mathcal{D}'_a(E)$  が

$$(F * S_t)(\varphi) = \int_0^\infty S_t(F(\tau_t \varphi)) dt \quad \left( = \int_0^a S_t(F(\tau_t \varphi)) dt \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, a]}$$

によって定義される。ただし  $\tau_t \varphi(s) = \varphi(s+t)$ 。よして変換  $F \rightarrow F * S_t$  は  $\mathcal{D}'_a(E)$  において連続となる。

さて、 $\{T_t; t \geq 0\}$  は  $E$  における局所同等連続な半群とし、これを  $t < 0$  に対しては  $T_t = 0$  によって拡張し  $\{T_t; -\infty < t < \infty\}$  を作る。各  $x \in E$  に対して  $T_t x$  は  $\mathcal{D}'_a(E)$  の元として考えられる。よして

$$(5.1) \quad F * \underbrace{T_t * T_t * \cdots * T_t}_n = F * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t, \quad F \in \mathcal{D}'_a(E), \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

$$(5.2) \quad (d \otimes x) * \underbrace{T_t * T_t * \cdots * T_t}_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t x, \quad x \in E, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

が成立する。とくに  $(d \otimes x) * T_t = T_t x$ 。

$\mathcal{D}'_a(E)$  における変換  $F \rightarrow F * T_t$  に対して、 $\mathcal{D}'_a(E)$  においては作用素  $R$  を考える。すなわち

$$R \hat{F} = (F * T_t)^\wedge, \quad \hat{F} \in \mathcal{D}'_a(E)$$

よって  $\mathcal{D}'_a(E)$  及び  $\mathcal{D}_a(E)$  の中への作用素  $R$  を定義すると、 $\mathcal{D}'_a(E)$  で  $F \rightarrow F * T_t$  を考えることと、 $\mathcal{D}'_a(E)$  で  $R; \hat{F} \rightarrow (F * T_t)^\wedge$  を考えることは同意義なる。  $R$  は  $\mathcal{D}'_a(E)$  で連続である。実は、この  $R$  が  $\{T_t; t \geq 0\}$  の生成作用素  $A$  の一般 resolvent (後述)



に一致するからである。

(5.1), (5.2) に対して

$$(5.3) \quad \mathbb{R}^n \hat{F} = (F * \underbrace{T_t * \cdots * T_t}_n)^\wedge = \left\{ F * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t \right\}^\wedge, \quad \hat{F} \in D'_a(E), \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

$$(5.4) \quad \mathbb{R}^n (1 \otimes x) = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} T_t x \right\}^\wedge, \quad x \in E, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

とくに  $\mathbb{R}(1 \otimes x) = (T_t x)^\wedge$  が成立する。また (5.4) より

$$(5.5) \quad \frac{d^n}{d\lambda^n} \mathbb{R}(1 \otimes x) = (-1)^n n! \mathbb{R}^{n+1}(1 \otimes x), \quad x \in E, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

が得られた。

定義  $A$  を  $E$  における線形作用素とする。  $D'_a(E)$  における線形作用素  $\mathcal{A}$  を、任意の  $\varphi \in D_{(-\infty, a]}$  に対して  $F(\varphi) \in D(A)$  かつ変換  $\varphi \rightarrow A(F(\varphi))$  が  $D'_a(E)$  に属するようならば  $F \in D'_a(E)$  に対して

$$(\mathcal{A}F)(\varphi) = A(F(\varphi)), \quad \varphi \in D_{(-\infty, a]}$$

によって定義する。同様に  $D'_a(E)$  における線形作用素  $A$  を、

任意の  $\hat{\varphi} \in D_{(-\infty, a]}$  に対して  $\hat{F}(\hat{\varphi}) \in D(A)$  かつ変換  $\hat{\varphi} \rightarrow A(\hat{F}(\hat{\varphi}))$

が  $D'_a(E)$  に属するようならば  $\hat{F} \in D'_a(E)$  に対して

$$(A\hat{F})(\hat{\varphi}) = A(\hat{F}(\hat{\varphi})), \quad \hat{\varphi} \in D_{(-\infty, a]}$$

によって定義する。  $\mathcal{A}, A$  の定義域は  $D(\mathcal{A}), D(A)$  とおく。もし

作用素  $(\lambda - A)$  に対して  $D'_a(E)$  上で定義された連続な逆作用素

$(\lambda - A)^{-1}$  が存在するとき、これを  $A$  の 一般 resolvent と呼ぶ。

この定義から  $F \in D(\mathcal{A})$  であることと  $\hat{F} \in D(A)$  であることは

とは同値であり、このとき  $A\hat{F} = (\mathcal{A}F)^\wedge$  が成立する。

命題 5.1  $A$  を  $E$  における線形作用素とする。もし  $A$  が連続

用素ならば  $\mathcal{A}, A$  はそれぞれ  $\mathcal{D}_a(E), D_a(E)$  において肉作用素である。もし  $D(A)$  が  $E$  で稠密ならば  $D(\mathcal{A}), D(A)$  はそれぞれ  $\mathcal{D}_a(E), D_a(E)$  で稠密である。

さて  $\{T_t; t \geq 0\}$  を  $E$  における局所同等連続な半群とし、 $A$  をその生成作用素とすると、§2で述べたように、 $A$  は肉で、 $D(A)$  は  $E$  で稠密であり、 $\mathcal{D}_a(E)$  において  $\mathcal{A}$  は肉、 $D(\mathcal{A})$  は稠密、 $D_a(E)$  において  $A$  は肉、 $D(A)$  は稠密となる。

よして

定理2.  $E$  を実列完備とし、 $\{T_t; t \geq 0\}$  を  $E$  における局所同等連続な半群、 $A$  をその生成作用素とすると、 $A$  の一般 resolvent  $(\lambda - A)^{-1}$  が存在して  $\mathbb{R}$  にひく。

## §6. Hille-Yosida の定理

定義  $E$  を実列完備とし、 $\hat{F} \in D'_a(E)$  とする。複素数平面  $\mathbb{C}$  の右半面  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  における  $E$ -値正則関数  $\hat{F}(\lambda)$  が  $\hat{F}$  の表現であるとは

$$\hat{F}(\hat{\varphi}) = \frac{1}{i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda) \hat{F}(\lambda) d\lambda, \quad \forall \hat{\varphi} \in D_{(-\infty, \mu]}, \quad \forall \mu > 0$$

が成立するとする。次に、 $E$  における線形作用素  $A$  の一般 resolvent  $(\lambda - A)^{-1}$  が存在しているとき、 $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  において定義された  $L(E, E)$ -値関数  $R(\lambda)$  が  $(\lambda - A)^{-1}$  の

表現であるとは、すべての  $x \in E$  に対して  $R(\lambda)x$  が  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  における  $E$ -値正則関数で、かつ  $(\lambda - A)^{-1}(I \otimes x)$  の表現になつているときにいう。

このとき Hille-Yosida の定理は次の形に述べられる。

定理 3.  $E$  を実列完備とする。このとき  $E$  における線形作用素  $A$  が、一意に決定される局所同等連続な半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  の生成作用素であるための必要十分条件は、 $A$  が次の二条件を満足することである。

- 1)  $A$  は稠密な定義域  $D(A)$  をもつ閉作用素である。
- 2) 任意の  $a > 0$  に対して空間  $D_a(E)$  において次の条件が満たされる:

- (a)  $A$  の一般 resolvent  $(\lambda - A)^{-1}$  が存在する。
- (b)  $(\lambda - A)^{-1}$  の表現  $R(\lambda)$  で、族  $\left\{ \frac{\mu^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} R(\mu); \mu > 0, n=0,1,2,\dots \right\}$  が同等連続であるような  $\alpha$  が存在する。

[注意] 十分条件に因しては、2) はある一つの  $a > 0$  に対して満たされていれはよい。

[証明の概略]

必要性:  $A$  が局所同等連続な半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  の生成作用素であるとき、1) と 2) の (a) が成立することはすでに述べた。さらに

$$R(\lambda)x = \int_0^a e^{-\lambda t} T_t x dt, \quad x \in E$$

とあくえ,  $R(\lambda)$  が 2) の (b) を満たすことか容易にたしかめられろ.

十分性: いま  $A$  が 1) と一つの  $a > 0$  に対して 2) を満足するとは定す.

Heaviside 関数  $Y$  とす. かつあろ  $t \geq 0$  で  $Y(t) = 1$ ,  $t < 0$  で  $Y(t) = 0$ .

一方, 作用素  $\lambda$  に対し,  $D_a^1(E)$  で連続な逆作用素  $\lambda^{-1}$  が存在し

$$\lambda^{-n}(1 \otimes x) = \left\{ (\delta \otimes x) * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Y \right\}^\wedge = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Y \otimes x \right\}^\wedge, \quad x \in E, n=1, 2, \dots$$

が成立す. ところで  $(\delta \otimes x) * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Y \in \mathcal{D}_a^1(E)$  は

$$\left( (\delta \otimes x) * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Y \right) (\varphi) = (\delta \otimes x)_t \left( \langle \tau_{-t} \varphi, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Y \rangle \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{[-\infty, a]}$$

で定義されろ.

$x \in D(A^3)$  に対し

$$(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x) = \lambda^{-1}(1 \otimes x) + \lambda^{-2}(1 \otimes Ax) + \lambda^{-3}(1 \otimes A^2x) + \lambda^{-3}(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes A^3x)$$

と乗し,  $\lambda^{-1}(1 \otimes x)$ ,  $\lambda^{-2}(1 \otimes Ax)$ ,  $\lambda^{-3}(1 \otimes A^2x)$  の一般逆 Laplace 変換は上式より,  $Y \otimes x$ ,  $tY \otimes Ax$ ,  $\frac{t^2}{2!} Y \otimes A^2x$  である.  $\lambda^{-3}(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes A^3x)$  に関してはいかかというと,

$$S_t x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{t\lambda} \frac{1}{\lambda^3} R(\lambda)(A^3x) d\lambda, \quad \mu > 0$$

とあくえ, (b) より各  $\mu_0 > 0$  に対して,  $R(\lambda)x$  が  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \mu_0$  で有界ならばことわかろ, 右辺の積分は絶対収束し, その値は  $\mu > 0$  に無関係である. また  $S_t x$  は  $t$  について連続微分可能で,  $t \leq 0$  で  $S_t x = 0$  となろ,  $S_t x$  は  $\mathcal{D}_a^1(E)$  の一つの元である,  $\lambda^{-3}(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes A^3x)$  の一般逆 Laplace 変換である.

$$T_t x = Y(t)x + tY(t)Ax + \frac{t^2}{2!}Y(t)A^2x + S_t x, \quad t \leq a$$

とおくと,  $\{T_t; t \leq a\}$  は  $D(A^3)$  において 同等連続となることを証明され, また  $D(A^3)$  は  $E$  で稠密となるので,  $\{T_t; t \leq a\}$  を  $E$  で同等連続に拡張出来, 拡張したものを同じく  $T_t$  で表わすと, 各  $x \in E$  に対して  $T_t x$  は  $(\lambda - A)^{-1}(1 \otimes x)$  の一般差 Laplace 変換となる. さらに  $x \in D(A)$  ならば  $T_t x \in D(A)$  かつ

$$\frac{d}{dt} T_t x = A T_t x = T_t A x, \quad 0 \neq t \leq a$$

なることがいえる, これから  $\{T_t; 0 \leq t \leq a\}$  の半群性  $T_{t+s} = T_t T_s$  が得られ, この性質を用いて  $T_t$  を  $t > a$  に拡張して得られた局所同等連続な半群  $\{T_t; t \geq 0\}$  に対して,  $A$  はその生成作用素となっている。

### 文献

- [1] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31 (1957).
- [2] H. Komatsu, *Semi-groups of operators in locally convex spaces*, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 230-262.
- [3] T. Komura, *Semi-groups of operators in locally convex spaces*, J. Funct. Anal., to appear.
- [4] I. Miyadera, *Semi-groups of operators in Fréchet space and*

- applications to partial differential equations, *Tohoku Math. J.*, 11 (1959), 162-183.
- [5] L. Schwartz, *Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups*, Tata Institute of Fundamental Research, 1958.
- [6] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer, 1965.