数理解析研究所講究録
第 40 巻 1968 年 46-56

正則的拡張に関するH. Lewyの一論文についての若干の注意

京大 理　　成木勇夫

§1. 序

いわゆる正則的拡張の問題は次のように定式化される。

問題、或る複素多様体Ωの実部分多様体M上の函数u（十分滑らかであると仮定する。）がMの全てのtangential Cauchy-Riemann Operatorによって零化されるとき、uはMを閉包のうちに含むようなΩの或る領域での正則函数のM上への境界値となり得るか？

この問題についてはMがΩの超曲面であるときに詳しい研究がなされている。例えば[1],[2],[3],[4],[7]を見よ。しかしもっと低次元の部分多様体に対しては今までのところ殆んど何も知られていないと言ってよいであろう。しかし1960年H. Lewyは$\mathbb{C}^3$の4次元の実部分多様体で上述の問題の答が肯定的であるような興味ある例を作ることに成功した。

ここではLewyの方法を分析し、かなり一般な十分条件を

得ることが主な目的である。

本論にはいる前によく使う記号、用語を例挙しておく。

CA、$\bar{A}$ は各々 A の（何かもっと大きな集合での）補集合、閉苞を示すものとする。又 $A \cap CB$ の代りに $A \setminus B$ とかく。

M が C^∞ 多様体であるとき、M の tangent bundle を $T(M)$ とかく。

Ω を複素多様体とするとき、$T(\Omega) \otimes \mathbb{C}$ の holomorphic part を $T^{(1,0)}(\Omega)$、anti-holomorphic part を $T^{(0,1)}(\Omega)$ とする。

S を底空間 M を持つ C^∞ vector bundle とする。M の領域 U 上の C^∞ cross-section 全体を $C^\infty(U, S)$ とかく。又 S の $p (\in M)$ 上の fiber を S_p とかく。

S を上述のものとし、U を M の領域とする。$C^\infty(U, S)$ の元の組で U の各点 p において S_p の一つの base を与えるものを S の U 上の local frame と呼ぼう。

§2.

M を $n+n'$ 次元の複素多様体 Ω の実 $2n+n'$ 次元の部分多様体とし、p を M の点とするとき

$$S_p = T_p(M) \otimes \mathbb{C} \cap T_p^{(0,1)}(\Omega)$$

とおく。以後 $\dim_{\mathbb{C}} S_p = n$ となる場合のみを考えることにする（$n'=1$ のときは常にそうなっている）。そうすれば S_p を p 上の fiber とするような complex vector bundle S が定まる。

このSをMのtangential Cauchy-Riemann bundleと呼び、短くT.C-R.Bと記すことにしよう。又Sの任意のcross-sectionをT.C-R. Operatorと呼ぶ。

さて函数空間R(M)を[7]に従って次のように定義する。

$$R(M)=[u\in C^\infty(M);\ Xu=0 \text{ for any } X\in C^\infty(M,S)]\ .$$

明らかに、Mの近傍で正則な函数のM上への制限はR(M)に属する。さらに$R^b(M)$をR(M)の元でM上有界なもの全体の作る函数空間とする。

後に使う定理を引用するには、さらに二三の記号を作らねばならない。上述で$n=1$即ちMをΩの超曲面としよう。そのT.C-R.BをSとする。ηをS上で0となるMのreal 1-formとし、S_pの元s,tに対して $L^\eta_p(s,t)=i\langle(d\eta)_p|s\wedge\bar t\rangle$ とおけば、L^η_pはS_p上のHermite形式となる。さらに$\eta_p\neq0$のときL^η_pの正の(負の)固有値の数をm_p^+ (m_p^-)で表し、$\underline{m}_p=\min(m_p^+,m_p^-)$ $\overline{m}_p=\max(m_p^+,m_p^-)$とおく。$L^{f\eta}_p=f(p)L^\eta_p$ (fはM上の函数)であることから、$\overline{m}_p,\underline{m}_p$は$\eta$のとり方に無関係に定まることが分る。もし$\underline{m}_p,\overline{m}_p$のMに対する依存関係を言い表したい場合がおこれば、$\underline{m}_p(M),\overline{m}_p(M)$と記することにする。なおここに現れた$L^\eta_p$は定数倍を除いて(MによってわかれるΩの一方の側を指定したときの)古典的なLevi-formと一致することを注意しておく。

さて後に使う定理を挙げよう。

定理1 (H. Lewy [4], L. Hörmander [2], R. O. Wells [7])
Mを複素多様体Ωの超曲面とする。Mの各点pで$\mathfrak{m}_p(M) \geqq 1$ならば、$\Omega$の領域$V$で次の性質を持つものが存在する，

(i) $\bar{V} \supseteq M$

(ii) $R(M)$の各元uに対して、V上で正則且つM上でuと一致する$\hat{u} \in C^0(V \cup M)$が存在する。

そし、もっと強く$\mathfrak{m}_p(M) \geqq 1$ならば$\bar{V} \supseteq M$となるように上述の$V$をとることができる。

定理2 (J. J. Kohn [9], L. Hörmander [8])
Mを$n+1$次元複素多様体Ωの超曲面とし、$\mathfrak{m}_p(M) \geqq 1$と仮定する。$S$ (MのT.C-R.B) のU (Mの或る領域) 上の local frame $\{X_j\}_{j=1}^n$に対して，微分作用素$\mathfrak{X} : C^\infty(U) \longrightarrow (C^\infty(U))^n$を

$$\mathfrak{X} u = (X_1 u, X_2 u, \cdots, X_n u)$$

とおいて定義すると、$\mathfrak{X}$はsubellipticである。(subelliptic differential operator の厳密な定義とその性質についてはL. Hörmander [ ] を参照されたい。)

定理2から直ちに次の系が従う。

系 1

定理2の仮定のもとで、$\mathfrak{X}u=0$ の超函数解 u は必然的に C^∞ となる。

§ 3

これから考える $n+2$ 次元の複素多様体 Ω は、$n+1$ 次元の複素多様体 $\widehat{\Omega}$ と $\mathbb{C}$ との直積とする。$\Omega=\widehat{\Omega}\times\mathbb{C}$。$\widetilde{M}$ を $\widehat{\Omega}$ の超曲面とし、次の仮定を満しているものとする。

仮定1、$\widetilde{M}$ の各点 p に対して $\mathfrak{m}_p(\widetilde{M})\geqq 1$

また $\widetilde{M}_+$ は M の領域であって、その($\widetilde{M}$ での)境界 $\widetilde{M}_0$ は空でない $\widetilde{M}$ の超曲面となるとする。(したがって $\widetilde{M}\setminus\overline{\widetilde{M}_+}$ は空でない。) f を $\widetilde{M}_+\times S^1$ (S^1 単位円周)上で定義された複素数値 C^∞ 函数とし、$\widetilde{M}_+\times S^1$ から Ω への C^∞ 写像 σ を次のように定義する。

$$\sigma(x, e^{i\varphi}) = (x, f(x,\varphi)) \qquad x\in\widetilde{M}^+$$

(ここでは f は φ の周期函数と考えている。)

仮定2、$M=\sigma(\widetilde{M}_+\times S^1)$ は Ω の codimension 2 の部分多様体を作り、σ は $\widetilde{M}_+\times S^1$ から M の上への diffeomorphism である。

このようなMに対しては、勿論T.C-R.Bは well defined となる。それを$\mathcal{S}$とかく。又以後、混乱のおこらぬ限りこのσによって、$\widehat{M}_+ \times S$上の函数とM上の函数とを同一視する。即ちuをM上の函数とするときそれは同時に$\widehat{M}_+ \times S'$上の函数$u \circ \sigma$をも指していると考える。またこのことは、微分形式、vector field に対しても同様とする。

仮定3、$f, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$はともに$\widetilde{M}_0 \times S'$にまで連続的に拡張でき$\widehat{M}_0 \times S_1$の上で$0$となる。

主定理を述べる前に次の補題を証明しておこう。

補題1

$\widehat{M}, \widetilde{\Omega}, M, \Omega, \mathcal{S}$を上述のものとし、$\widehat{M}$の$\widetilde{\Omega}$での T.C-R.B を$\widetilde{\mathcal{S}}$とする。$\widetilde{U}$を$\widehat{M}$の領域とし$X \in C^\infty(\widetilde{U}, \widetilde{\mathcal{S}})$とするとき、

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - (Xf)\frac{\partial}{\partial \varphi} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \qquad (\text{但し、} \mathcal{U} = \sigma((\widehat{M}_+ \cap \widetilde{U}) \times S'))$$

証明）$\mathcal{S}$の定義より、Ωの或る領域で正則な函数の$\mathcal{U}$上への制限（必ずしも$\mathcal{U}$全体で定義されていると限らないが、）が全て$\frac{\partial f}{\partial \varphi} X - (Xf)\frac{\partial}{\partial \varphi}$によって零化されることを示せばよい。$\Omega = \widetilde{\Omega} \times \mathbb{C}$であったから、$\widetilde{\Omega}$の或る領域で正則であるような

全ての函数のM上への制限と、Ωからその$\mathbb{C}$成分へのprojectionのM上への制限fとに対して上述のことが言へるならば十分である。しかしこれは自明である。(終)

さて主定理を述べよう。

定理3

M, Ωを上述のものとし、仮定1、一仮定3が全て満されているとする。このとき次の性質をもつΩの開領域$\mathcal{U}_0$と超曲面$\mathcal{U}_1$とが存在する。

(i) $\mathcal{U}_0 \supseteq \mathcal{U}_1$, $\overline{\mathcal{U}_1} \supseteq M$

(ii) 任意の$u \in R^b(M)$に対して、$\mathcal{U}_0$で正則な函数u_0があってその$\mathcal{U}_1$上への制限はMへの連続な境界値としてuを持つ。

証明) 先ず$\tilde{M}_+$上に函数族$v^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \cdots)$を作る。

$$v^{(\nu)}(x) = \int_0^{2\pi} u(x, \varphi)\,(f(x, \varphi))^\nu \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial \varphi}\, d\varphi \qquad x \in \tilde{M}_+$$

任意の$X \in C^\infty(\tilde{M}_+, \tilde{S})$に対して　$X v^{(\nu)} = 0$を示そう。

$$X v^{(\nu)} = \int_0^{2\pi} (X(u f^\nu)) \frac{\partial f}{\partial \varphi}\, d\varphi + \int_0^{2\pi} u f^\nu \frac{\partial (X f)}{\partial \varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial\varphi} X - (Xf)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(uf^\nu)\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\left(Xf\,\frac{\partial}{\partial\varphi}(uf^\nu) + uf^\nu\frac{\partial(Xf)}{\partial\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}X - (Xf)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(uf^\nu)\,d\varphi + \Big[(Xf)\,u f^\nu\Big]_0^{2\pi}$$

第二項は明らかに０。最初の項は$\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}X-(Xf)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u=0$（補題と$u\in \mathcal{R}^b(M)$から）と$\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}X - Xf\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f^\nu=0$とから０となる。$Xv^{(\nu)}=0$が言えた。

一方、仮定３から$v^{(\nu)}$は$\tilde{M}_0$上で境界値０を持つ。そこで$v^{(\nu)}$を$\tilde{M}_+$の外で０として拡張すれば$\tilde{M}$の任意のT. C-R. Operator Xに対して$Xu=0$の超函数解となっている。系１により$v^{(\nu)}$は$\tilde{M}$上で滑らかでなければならない。したがって$v^{(\nu)}$は$\tilde{M}$の（$\tilde{\Omega}$での）近傍に正則に拡張できることになるが$\tilde{M}\setminus\overline{\tilde{M}_+}$の上で０である。$v^{(\nu)}$は恒等的に０でなくてはならない。

今Γ_xは$z=f(x,\varphi)$で定義される複素平面上のJordan曲線とすれば、証明できたことは

$$\int_{\Gamma_x} u(x,\xi)\,\xi^\nu\,d\xi = 0 \qquad x\in\tilde{M}_+ .$$

よく知られているように、このときは

$$u_1(x,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_x}\frac{u(x,\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad z\in B_x$$（Γ_xで囲まれる有界領域）

とおくと、u_1はΓ_x上で境界値uをとる。

そこで$\mathcal{V}_1$を$\bigcup_{x\in \hat{M}_+}\{x\}\times B_x$とすれば、$u_1$は$R(\mathcal{V}_1)$の元である。何故なら、変数$z$についての正則性は明らかであるし、$X\in C^\infty(\hat{M}_+,\hat{S})$を$\mathcal{V}_1$のvector fieldと見るときそれは$\mathcal{V}_1$のT.C.R Operatorであって、しかも$Xv^{(\nu)}=0$を示したと全く同様に$Xu_1=0$が証明されるからである。

ここで$\mathfrak{m}_p(\mathcal{V}_1)=\mathfrak{m}_x(\hat{M})$　（但し$p=(x,*)$）であることに注意すると、仮定1より再び定理1が使えて、求める$\mathcal{V}_0$とu_0とが得られたことになる。（終）

注意．仮定1は少々強すぎる。実際仮定1の代りに$\bar{m}_p(\hat{M})\geqq 1$とMのparametrizationに関する他の仮定をつけ加えることによって同様の議論を進めることができる。しかし、この後者の仮定は極めて複雑で人工的であるので、そのような取り扱いをここでは述べなかった。詳細はどこかに発表されるであろう筆者の論文[6]を見よ。この論文ではcodimensionが3以上の場合も統一的に取り扱ってある。なおこのような精密化により次の命題が証明される。

命題；$n\geqq 4$とし、$\mathbb{C}^n$のcodimension 2のcompactな部分多様体Mを次のように定義する。

$$M=[\ z=(z_1,\cdots z_n)\in\mathbb{C}^n\ ;\ \sum_{j=1}^n|z_j|^2=a,\ \sum_{j=1}^n\lambda_j|z_j|^2=b\ ]$$

但し $a, b > 0$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, $\lambda_2 a > b > \lambda_{n-1} a$, $\lambda_j a \neq b$ ($j=3, \ldots, n-2$) とする。

又 $\mathbb{C}^n$ の pseudo-convex な領域 V を次のように定義する。

$$V = \left[z \in \mathbb{C}^n ;\ \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) |z_j|^2 < b - \lambda_n a,\ \sum_{j=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_j) |z_j|^2 < \lambda_1 a - b \right]$$

このとき $R(M)$ の元 u に対して $\overline{V}$ で連続で V で正則、かつ M 上で u と一致する u_0 が存在する。

証明は全く初等的である。詳細は [6] を見よ。

文　献

[1] Bochner, S., Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. Ann. of Math. Vol. 44, (1953) pp. 652-673..

[2] Hörmander, L., Several Complex variables, Mimeographed Notes, Stanford University, 1963.

[3] Kohn, J.J. and Rossi, H., On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold. Ann. of Math. Vol. 81 (1965) pp. 451-472.

[4] Lewy, H., On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in 3 variables and a

related theorem for regular functions of 2 complex variables. Ann. of Math. Vol. 64 (1956), pp. 514–522.

[5] Lewy, H., On Hulls of holomorphy. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 13 (1960) pp. 587–591

[6] Naruki, I., Remarks on a paper of H. Lewy. to appear.

[7] Wells, R. O., On the Local holomorphic Hull of a Real Submanifold in Several Complex Variables. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 19 (1966) pp. 145–165.

[8] Hörmander, L., Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math vol. 83. pp. 129–209, 1966.

[9] Kohn, J. J., Boundaries of complex manifolds, Proc. Minnesota Conference on Complex Analysis pp. 81–94, Springer Verlag, Berlin, 1965.