数理解析研究所講究録
第40巻 1968年 66-77

楕円型作用素のグリーン核の漸近的性質の L^2的取扱いについて.

東大 理 藤原大輔

§1 序

Mをoriented compact C^∞ manifold で境界は無いとする。PをM上で定義され，後述する条件を満す，pseudo-differential operator[1] とする。$E(x,y,\tau)$を，グリーン作用素 $(P+\tau)^{-1}$ の対応する核とする。$\tau\to\infty$ のときの $E(x,y,\tau)$ の挙動を調べるのが目的である。方法として，L^2理論を活用し議論の局所化に努力する。

先ず記号を説明する。

Mを σ-compact な orientable C^∞ manifold とする。

M上に体積要素 dx は与えられているものとする。我々は直積 $M\times R^1$ を考える。$M\times R^1$の一般の点を (x,s), $x\in M$, $s\in R^1$ と表わす。多様体 M, $M\times R^1$, 等々の上の関数[2)]

1) cf. L. Hörmander: Pseudo-differential Operators Comm. Pure Appl. Math. 18 501-517 (1965).

2) 以下の議論は M と その上の vector bundle X の smooth sections に働く elliptic operators に対して論ずる方が興味深いが，ここでは簡単のため X は M上の trivial line bundle とする.

空間については、L. Schwartz, A. Grothendieck 等の慣用に従う。X, Y を二つの局所凸線型空間とするとき、$X \hat{\otimes} Y$ で X と Y の射影的テンソル積の完備化とする[3]。
$S_1 = \{(\rho,\sigma) \in R^2 ;\ \frac{1}{2} \le \rho^2 + \sigma^2 \le 2\}$ とおく。

定義 1. 線型連続写像 $P : \mathcal{D}(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(R^1) \to \mathcal{E}(M) \hat{\otimes} \mathcal{S}'(R^1)$ が次の条件を満すとき、β-擬微分作用素と呼ぶ。

実数の減少列 $s_0 > s_1 > s_2 > \cdots \longrightarrow -\infty$ があって、任意の $f \in \mathcal{D}(M)$ と $\mathrm{supp}\, f$ で $dg \neq 0$ なる $g \in \mathcal{E}(M)$[4] からなる $\mathcal{E}(M)$ の compact set $\mathcal{K}$，任意の正整数 N に対して、$e^{-i\lambda(\rho g + \sigma s)} P(f e^{i\lambda(\rho g + \sigma s)})$ は s に独立で、$\lambda \ge 1$ のとき

(1) $\lambda^{-s_N}\left(e^{-i\lambda(\rho g + \sigma s)} P(f e^{i\lambda(\rho g + \sigma s)}) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(f, \rho g, x, \sigma) \lambda^{s_j}\right)$

が $\mathcal{E}(M \times S_1)$ で有界になるような、$p_j(f, \rho g, x, \sigma)$ が存在する。

s_0 を P の order と呼び、$\sigma_P(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(f, \rho g, x, \sigma) \lambda^{s_j}$ なる形式和を、P のシンボルと呼ぶ。

定義 1 から推察されるように、若干の計算の後に、β-擬微分作用素 P は、$M \times R^1$ で定義された Hörmander の

3) c.f. A. Grothendieck, Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, A.M.S. Memoir. 1955

4) g は実数値とする

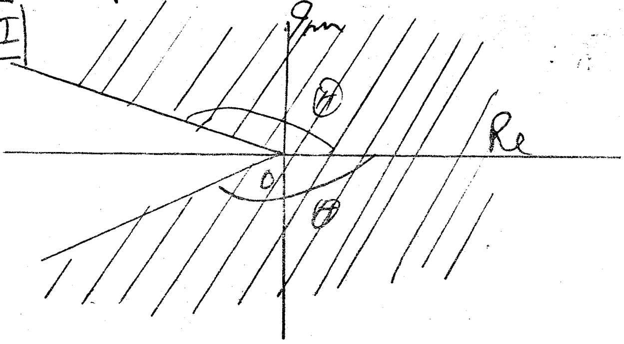
意味での Pseudo-differential operator であって，$R^1 \ni s$ に関して，定係数のものであることが分る。

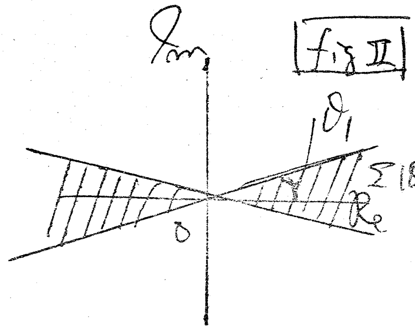
§2. 結果

本節では，M は compact とする。P は Hörmander の意味での M 上の elliptic Pseudo-differential Operator で order は $2m$，とする。更に，$x \in M$，$\xi \neq 0$ を M の x における co-tangent vector とするとき，P の主シンボル $p_0(x,\xi)$ は $\arg p_0(x,\xi) \neq \pm\pi$，を仮定する。

$x \in M$，$\xi \in T_x^*(M)$ が動くとき，$p_0(x,\xi)$ は次の斜線をひいた領域 $\subset \mathbb{C}^1$ を動くとしてよい。

fig I





$2m\theta_1 < \Theta$，とすれば，fig II で斜線をひいた領域 $\Sigma(\theta_1) \ni Z$ に対して，$P + Z^{2m} D_s^{2m}$，$s \in R^1$ は $M \times R^1$ 上の elliptic p-擬微分作用素である。

このとき，結果というのは，

定理 1　$T_0>0$ が十分大きいとき，$z\in\Sigma(\theta_1)$ に対して，β−擬微分作用素 $G_z^{(0)}$ が存在して，

(2.1) $$(P+z^{2m}D_s^{2m}+T_0)G_z^{(0)}=I \quad \text{on } \mathcal{D}(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$$
(2.2) $$G_z^{(0)}(P+z^{2m}D_s^{2m}+T_0)=I$$

$G_z^{(0)}$ の order は $-2m$。

定義 2　$$e^{-is}G_z^{(0)}(\varphi e^{is})=E^{(0)}(z)\varphi,\quad \varphi\in\mathcal{D}(M)$$

とすると，

定理 2　$E^{(0)}(z)$ は $z\in\Sigma(\theta_1)$ をパラメターとするM上の擬微分作用素で，

(2.3) $$(P+z^{2m}+T_0)E^{(0)}(z)=I$$
(2.4) $$E^{(0)}(z)(P+z^{2m}+T_0)=I$$

を満す。

以上の2つが，主要な定理で，この応用として，

定理 3　任意の $z\in\Sigma(\theta_1)$ に対し，$G_{z,\ell}$ を $G_z^{(0)}-G_{z,\ell}$ が $-\ell$ 位の β−擬微分作用素である任意の作用素とする。$E_\ell(z)\varphi=e^{-is|z|}G_{\frac{z}{|z|}}(e^{is|z|}\varphi)$，$^\forall\varphi\in\mathcal{D}(M)$

によって $E_\ell(z)$ を定義するならば,

$$(2.5)\qquad \|E^{(0)}(z)\varphi - E_\ell(z)\varphi\|_{H^{a+b}(M)} \leq C(1+|z|)^{b-\ell}\|\varphi\|_{H^a(M)}$$

がすべての $\varphi \in \mathcal{D}(M)$, $0 \leq b \leq \ell$ に対して成立する.
但しここで $H^{a+b}(M)$ は M 上の $a+b$ 次ソボレフ空間。

任意の $\ell > 0$ に対して, $G_{z,\ell}$ は, P のシンボルから, シンボルの計算のみによって構成出来る。
また, M の次元を n とすると,

<u>定理 4</u>　$2m - n = \gamma > 0$, のとき, グリーン作用素 $(P + z^{2m} + \tau_0)^{-1}$ は $C(M \times M) \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Sigma(\delta_2, \theta_2))$[5] に属する核 $E(x_1, x_2, z)$ をもち, $(x_1, x_2, z) \in M \times M \times \Sigma(\delta_2, \theta_2)$, のとき,

$$(2.6)\qquad |E(x_1, x_2, z)| \leq C_\gamma(1+|z|)^{-\gamma}$$

が成立する。また, $E(x_1, x_2, z)$ は, 次のようにして, 与えられる。φ_i を, 点 x_i $(i=1, 2)$ の近傍で 1 に等しく, $\mathrm{supp}\,\varphi_1 \cup \mathrm{supp}\,\varphi_2$ が, (必ずしも連結でない) 座標近傍 U に含まれるとする。$\xi \cdot x_i$ を, x_i の座標の線型関数として,

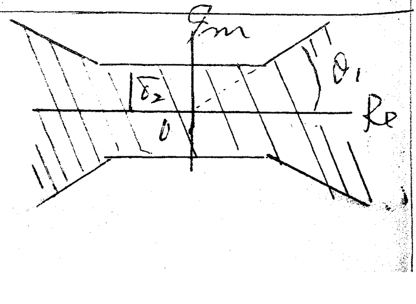
$$(2.7)\qquad E(x_1, x_2, z) = (2\pi)^{-n}\rho(x_2)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} g_z(x_1, \xi, 1)\, e^{i(x_1 - x_2)\cdot\xi}\, d\xi$$

但しここで

$$g_z(x, \xi, \sigma) = \varphi_1 e^{-i(x\cdot\xi + s\cdot\sigma)} G_z^{(0)}(\varphi_2 e^{i(x\cdot\xi + s\sigma)}), \quad \sigma \in R$$

---

5) $\Sigma(\delta_2, \theta_2)$ は右の斜線をいれた複素領域



$\rho(x)$ は x での与えられた volume element の座標 $dx_1 \cdots dx_n$ に関する密度。(2.7) 式で $x = x_1 = x_2$ とおくと、

定理 5

(2.8) $$E(x, x, \sigma) = (2\pi)^{-n} \rho(x)^{-1} \int_{R^n} g_Z(x, \xi, 1)\, d\xi$$

$$\sim (2\pi)^{-n} \rho(x)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^{-s_j+n} \int_{R^n} g_{jZ}(x, \xi, 1)\, d\xi$$

なる漸近展開を得る。但し、ここで

$$e^{-i(x\cdot\xi+s\sigma)} \varphi\, G_Z^{(0)}(\varphi e^{i(x\cdot\xi+s\sigma)}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_{jZ}(x, \xi, \sigma).$$

(この漸近展開の存在は定理 1 が保証する)

次に実例については、$p \in M$ 上の Iterated Laplacian Δ^m とすると、

定理 6 M の Riemann 計量が x の近傍で局所的にユークリッド的ならば、任意の $N > 0$ に対し

(2.9) $$\lim_{\sigma\to\infty} \sigma^N \left\{ E(x, x, \sigma) - (2\pi)^{-n} \omega_{n-1} (2m)^{-1} \frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2m}} \sigma^{n-2m} \right\} = 0.$$

従って M が locally Euclidean なら、$\forall N > 0$, に対し、

(2.10) $$\lim_{\sigma\to\infty} \sigma^N \left(\mathrm{trace}\,(\Delta^{2m} + \sigma^{2m})^{-1} - (2\pi)^{-n} \omega_{n-1} (2m)^{-1} \frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2m}} v(M) \sigma^{n-2m} \right) = 0$$

但し $v(M)$ は M の体積、ω_{n-1} は $n-1$ 次単位球面積

定理7　$M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ を n次元 oriented hypersurface として，M上に $\mathbb{R}^{n+1}$ から導びかれた metric を入れる時．$P=\Delta^m$．　$2m>n$ として，

$$F(x,x,\sigma)\sim(2\pi)^{-n}(2m)^{-1}\frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2m}}\sigma^{n-2m} \tag{2.11}$$
$$+\left(AK_1(x)^2+BK_2(x)\right)\sigma^{n-2m-2}$$
$$+O(\sigma^{n-2m-4}).$$

但しここで，$K_j(x)$ は，Mの x における j次平均曲率．A，B は m と n による定数．$n=2$．$m=2$ ならば
$A=21\pi^{-1}$，　$B=-\frac{10}{3}\pi^{-1}$．　即ち

$$F(x,x,\sigma)\sim\frac{1}{16\pi}\sigma^{-2}+\{21\pi^{-1}H(x)^2-\frac{10}{3}\pi^{-1}K(x)\}\sigma^{-4}+O(\sigma^{-6}) \tag{2.12}$$

$H(x)$ は平均曲率．$K(x)$ はガウス曲率．
積分すると，Gauss-Bonnet's Formula から

定理8　$M\subset R^3$ compact oriented surface．
とすると．

$$\mathrm{trace}\,(\Delta^2+\sigma^4)\sim\frac{1}{16\pi}v(M)\sigma^{-2} \tag{2.13}$$
$$+\{21\pi^{-1}\int_M H(x)^2dx-\frac{20}{3}\pi^{-1}v(M)\chi(M)\}\sigma^{-4}$$
$$+O(\sigma^{-6})$$

ここで $v(M)$ は Mの体積．$\chi(M)$ は Euler-Poincaré 数．

§3 証明の概略

先ず β-擬微分作用素について.

Lemma 3.1 Q を elliptic β-pseudo-diff. op. on $M\times\mathbb{R}^1$ of order s_0 とすると, $-s_0$次の β-pseudo-diff. op F と, $-\infty$次の β-pseudo-diff. operators Q_1, Q_2 が存在して

$$(3.1)\qquad Q\circ F = I + Q_1, \qquad F\circ Q = I + Q_2$$

Lemma 3.2

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(M)$, $\mathrm{supp}\,\varphi_1 \cup \mathrm{supp}\,\varphi_2$ が一つの座標近傍 U に入っているとき, $x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ で座標$(x_1, \cdots, x_n)$の実線型関数をあらわすと, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ に対し,

$$(3.2)\qquad \| e^{-i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)}\varphi_1 Q(\varphi_2\varphi e^{i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)})\|_{H^{a+b}(M\times\mathbb{R}^1)} \leq C(1+|\xi|+|\sigma|)^b \|\varphi\|_{H^a(M\times\mathbb{R}^1)}$$

但し Q は of order $s_0 \leq 0$ とす。 $\forall b \in [s_0, -s_0]$

Lemma 3.3 Lemma 3.2 の仮定の下で任意の $u \in \mathcal{D}(M)$ に対し

$$(3.3)\qquad \| e^{-i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)}\varphi_1 Q \varphi_2 (e^{i(x\cdot\xi+s\cdot\sigma)}u)\|_{H^{a+b}(M)} \leq C(1+|\xi|+|\sigma|)^b \|u\|_{H^a(M)}.$$

Lemma 3.4 同じ仮定の下で $\forall b \in [0, -s_0]$ に対し

$$(3.4)\qquad \| e^{-is\sigma} Q(e^{is\sigma}u)\|_{H^{a+b}(M)} \leq C(1+|\sigma|)^{b+s_0} \|u\|_{H^a(M)}.$$

Lemma 3.5 Q を order $-\infty$ の β擬微分作用素

とおくと、 Q は $\mathcal{E}'(M)\hat{\otimes}\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathcal{E}(M)\hat{\otimes}\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^1)$
への連続線型写像に一意的に拡張される。

Lemma 3.2 〜 3.4 は Fourier 変換によって容易に示し得る。

さて，Pに関する我々の仮定の下では，

<u>定理 3.1</u> τ_0 が十分大のとき， $z \in \Sigma(\delta_1, \theta_1)$ のとき， $(P+z^{2m}+\tau_0)^{-1}$ は存在して $\forall a \in [0, 2m]$ に対し

(3.5) $${}_a\|(P+z^{2m}+\tau_0)^{-1}\|_0 \leq C(1+|z|)^{a-2m}$$

但し， L が $H^a(M)$ から $H^b(M)$ への連続線型写像のとき その norm を ${}_b\|L\|_a$ と書くことにする。

これによって 先ず 定理 2 の作用素 $E^0(z)$ の存在が分る。次に $G_z^{(0)}$ を

(3.6) $$G_z^{(0)}\varphi\otimes\phi = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^1}\hat{\phi}(\sigma)e^{i\sigma s}(E^{(0)}(\sigma z)\varphi)\,d\sigma$$

で定義する。すると，定義 2 によって $G_z^{(0)}$ と E^0 は結ばれる。$G_z^{(0)}$ が β-擬微分作用素であることは，次のようにして示される。まず Lemma 3.1 を $Q = P + z^{2m}D_s^{2m} + \tau_0$ に適用する。とパラメーター z に

よるが、β pseudo-diff. op. F_Z と $-\infty$ 次の β-pseudo-diff operator Q_Z', Q_Z'' があって

$$Q F_Z = I + Q_Z', \quad F_Z Q = I + Q_Z''.$$

従って

$$(3.7) \qquad G_Z^{(0)} = F_Z - Q_Z' F_Z + Q_{Z,-\infty}' G_Z^{(0)} Q_{Z,-\infty}$$

とかける。 Lemma 3.3 によって

$$\| e^{-i(x\cdot\xi+s\sigma)} \varphi_1 (F_Z - Q_Z' F_Z)(\varphi_2 u e^{i(x\cdot\xi+s\sigma)}) \|_{H^a(M)}$$
$$\leq C_2 \qquad \| u \|_{H^a(M)}.$$

また~~次の補~~

Lemma 3.6 , Lemma 3.3 の仮定の下で、
R_1, R_2 を β-pseudo-diff. operator of order $-k \leq 0$. とすると、$\forall a \in [0, k]$ に対して

$$(3.7) \qquad \| e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)} \varphi_1 R_1 G_Z^{(0)} R_2 (\varphi_2 u e^{i(x\cdot\xi+s\tau)}) \|_{H^a(M)}$$
$$\leq C_0 (1+|Z\tau|)^{-2m} \| u \|_{H^a(M)}$$

C は Z によらぬ const. $u \in \mathcal{D}(M)$.

これ等と、$\mathcal{E}(M) = \bigcap_{a>0} H^a(M)$ とを合わせ用いて
$G_Z^{(0)}$ が β-pseudo-diff op. であることが分る。

え 即ち Lemma 3.6 に於いて $R_1 = Q'_{2,-\infty}$

$R_2 = Q_{2,-\infty}$ とおいて (3.7), (3.8) 式を考慮すると, φ, ψ を任意の C_0^∞-functions として,

(★) 線型写像, $u \longrightarrow e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi G_2^{(0)}\psi(ue^{i(x\cdot\xi+s\tau)})$

は $\mathcal{D}(M)$ から $\mathcal{D}(M)$ への連続写像として, ξ, τ を R^{n+1} で動かしたとき, 同程度連続のことが分る。

ところで, (3.7)を導いたと同様にして,

(3.10) $$G_2^{(0)} = F_2 - G_2^{(0)} Q_{2,-\infty}$$

が成立することが分る。よって

(3.11)
$$\begin{aligned}
&e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi G_2^{(0)}(\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\tau)}) \\
&= e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi F_2(\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\tau)}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)}\varphi G_2^{(0)}\varphi_j e^{i(x\cdot\xi+s\tau)}(\psi_j e^{-i(x\cdot\xi+s\tau)} Q_{2,-\infty}\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\tau)})
\end{aligned}$$

(但しここで φ_j, $j=1\cdots k$, は十分細い supports をもつ, smooth partition of unity on M.)

F_2 は P-擬微分作用素だから右辺第一項は (ξ, τ) につき漸近展開をもつ。右辺第二項

の中の $\psi_j e^{-i(x\cdot\xi+s\cdot\tau)} Q_{2,-\omega}(\psi u e^{i(x\cdot\xi+s\cdot\tau)})$ も同様に漸近展開をもつ。これは $\mathcal{D}(M)$ の Topology での漸近展開であった。(※)を考慮すれば，(3.11)式右辺第2項，従って，左辺が漸近展開をもつことが分る。このことは，$G_2^{(0)}$ が p-擬微分作用素であることを示している。

定理 2 の証明は，定理 1 の証明のアナロジーでも良いし，定理 1 から導くのも良い。定理 3 は Lemma 3.3 の応用である。定理 4 は，前半，評価(2.6)を出す迄は，Sobolev の埋蔵定理と，L. Schwartz の核定理と，定理 3 から出る。(2.7)式以後は，p-擬微分作用素の一般論から分る。

以上の詳しい証明は，下記を参照願いたい。

D.Fujiwara, The asymptotic Formula for the trace of the Green Operators of Elliptic Operators on Compact Manifolds, Proc. Jap. Acad. vol.43, (1967) p.426-428

or, Journal of the Fac. of Sc. , The University of Tokyo, to appear.