数理解析研究所講究録
第 40 巻 1968 年 78-96

双曲型方程式の解の無限遠における挙動について

北大 理　久保田 幸次
白 田 平

§1. 序

$R^n \times [0, \infty)$ で定義された強双曲型偏微分作用素

$$P[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u + \sum_{\substack{|\nu|+j \leq m \\ j<m}} a_{\nu,j}(x,t) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u$$

($|\nu|+j = m$ のとき $a_{\nu,j}(x,t) = a_{\nu,j}$ 定数とする)

に関する初期値問題

$$P[u] = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(x,0) = 0 \quad (0 \leq j \leq m-2), \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} u(x,0) = f(x)$$

の解が $t \to \infty$ のとき $u(x,t) \to 0$ となる状態には次の三種が考えられる。

[定義]　1) 極限振巾の原理：(適当に制限された範囲内の) 任意の f と任意の compact set $K \subset R^n$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in K} |u(x,t)| = 0, \text{ 又は } \lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(K)} = 0$$

が成立する。

2) *exponential decay*:(適当に制限された範囲内の)任意の f と任意の compact set $K \subset R^n$ に対して定数 $\alpha > 0$, $C > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in K} |u(x,t)| \leqq C e^{-\alpha t}, \quad \text{又は} \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^2(K)} \leqq C e^{-\alpha t} \quad (t \to \infty)$$

が成立する。

3) *diffusion of waves* が存在しない:定数 $C_1, C_2, C_3 \geqq 0$ が存在して任意の $f \in C_0^\infty(R^n)$ と

$$t > C_1|x| + C_2 \sup_{y \in \mathrm{supp} f} |y| + C_3$$

をみたす全ての (x,t) に対して常に $u(x,t) = 0$ が成立する。

この論文で我は $R^3 \times [0,\infty)$ における作用素 $P = (\frac{\partial}{\partial t})^2 - \Delta + g(x)$ に関する極限振巾の原理が成立するための条件を求める。

$R^3 \times [0,\infty)$ で定義され作用素

$$P = (\tfrac{\partial}{\partial t})^2 - \Delta + g(x)$$

に対する初期値問題

$$(1) \quad \begin{aligned} &\left[(\tfrac{\partial}{\partial t})^2 - \Delta + g(x)\right] u(x,t) = 0, \\ &u(x,0) = 0, \quad \tfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

を考える。ここで Δ は R^3 における Laplacian, g, f は §2 の条件 (C_1), (C_2), (C_3) をみたすものである。

$-\Delta + g$ の $L^2(R^3)$ における自己共役拡張 A が固有値をもてば一般に(即ち条件 (C_3) をみたす全ての f に対する)極限

振巾の原理が成立しないことは O.A. Ladyzhenskaya [1] によって指摘されているが、極限振巾の原理が成立するための十分条件として, D.M. Èĭdus [2], その他の人達によつて与えられたものは全て「方程式

$$(-\Delta + q)\,w = 0 \quad , \quad w \notin L^2(R^3)$$

をみたしかつ $|x| \to \infty$ のとき $w = O(|x|^{-1})$, $\frac{\partial w}{\partial x_i} = O(|x|^{-2})$ なる *order* で減少する函数 w が存在しない」という条件を含んでいる。実際、上記の函数 w は作用素 A の *resolvent kernel* を求める際に現れる *modified resolvent equation* (T. Ikebe [4] 参照) を Banach 空間 $B = \{ \varphi \in C(R^3);\ \lim_{r\to\infty} \sup_{|x|=r} |\varphi(x)| = 0 \}$, $\|\varphi\|_B = \max_{x \in R^3} |\varphi(x)|$ で考えたとき、B から B への *compact operator*

$$T\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{R^3} \frac{1}{|x-y|}\, q(y)\,\varphi(y)\,dy \qquad (\varphi \in B)$$

の 1 に対する固有函数, 即ち

$$(I - T)\,w = 0 \ , \ w \in B \ , \ w \neq 0$$

をみたす函数である。もしこのような函数 w が存在しなければ任意の $\psi \in B$ に対して方程式 $\varphi = \psi + T\varphi$ は B で一意な解をもち (1) に対する極限振巾の原理が成立することが分る。

上記の函数 w の存在に関しては、K. Asano と T. Shirota が [3] において、$q \in C_0^\infty(R^3)$ かつ不等式

$$-q(x) \leqq 1/4|x|^2$$

がR^3全体では成立しないような或るqに対して$(-\Delta+q)w=0$, $w\notin L^2(R^3)$, $w=O(|x|^{-1})$, $\frac{\partial w}{\partial x_i}=O(|x|^{-2})$ $(|x|\to\infty)$をみたすwを構成した．更に筆者達は[5]においてこのような函数wを使って初期値問題

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta+q(x)\right]u(x,t)=0\ ,\ u(x,0)=g(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=f(x)$$

の解で　$|x|\leqq t$　なる全ての(x,t)に対して

$$u(x,t)=w(x)$$

が成立する$u(x,t)$を構成した．この場合$q\in C_0^2(R^3)$, $g\in C_0^2(R^3)$, $f\in C_0^1(R^3)$である．更にその際、Aが固有値をもたないと仮定したとき(1)に関する極限振巾の原理が成立するための必要十分条件は上記の函数wが存在しないことであることをのべた．以上のことから次のように予想することは自然であるように思われる「$q=O(|x|^{-2-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ $(\alpha>0)$のとき(1)に関する極限振巾の原理が成立するための必要十分条件はAが固有値をもたずかつ上記の函数wも存在しないことである。」

この論文の目的は上記の予想が$q=O(|x|^{-3-\alpha})$, $\underbrace{D^\beta q=O(|x|^{-2-\alpha})\ (|x|\to\infty)\ (\alpha>0)}_{|\beta|=1,2}$のとき正しいことを証明することである．

問題の難しさは次の部分にある：$f\in L^2(R^3)$, $f=O(|x|^{-3-\gamma})$ $(|x|\to\infty)$ $(\gamma>0)$, $\theta(x,\lambda)$を補題8で定義されたものとすると全ての$\lambda\in(0,\infty)$に対して

$$\frac{d}{d\lambda}(E_\lambda f,\varphi)_{L^2}=(\theta(\lambda),\varphi)_{L^2}\qquad \textit{for all } \varphi\in C_0^\infty(R^3),$$

$$\int_0^\infty |(\theta(\lambda), \varphi)_{L^2}| \, d\lambda \leqq (\|f\|_{L^2}^2 + 1) \|\varphi\|_{L^2}$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(R^3)$

が成立することが分るが、上述の ω が存在すれば $|\theta(\lambda)|$ 自身 $(0,1)$ で可積分であるか否か分らず，又 $\lambda \to 0$ のときの増加の order も分らないことである。それ故定理2の証明において（補題8参照）$\lambda \in (0,\infty)$ の函数 $T_\lambda(\varphi) = (\theta(\lambda), \overline{\varphi})_{L^2}$ が Banach 空間 $C_{3+\alpha}^2 = \{\varphi \in C^2(R^3);\ \sup_{x\in R^3, |\beta|\leqq 2} |D^\beta \varphi(x)| (1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}} < \infty\}$ から $L^1(0,\infty)$ への nuclear operator，従って $\|T_\lambda\|_{(C_{3+\alpha}^2)^*} = \|\theta(\lambda)\|_{(C_{3+\alpha}^2)^*}$ が $L^1(0,\infty)$ に属することを使う。そのために $g = O(|x|^{-3-\alpha})$, $D^\beta g = O(|x|^{-2-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ $(|\beta|=1,2)$ が必要になる.

以下の内容と叙述は[6]に従った.

§2、結果

§2－§5を通じて，$g(x)$, $f(x)$ は次の条件 (C_1), (C_2), (C_3) をみたすと仮定する．以後 R^3 を E, $C_0^\infty(E)$, $L^p(E)$ をそれぞれ C_0^∞, L^p とかき，更に $\langle\varphi, \psi\rangle$ によって $\int_E \varphi(x)\psi(x)\,dx$ を表わす.

(C_1)：$g(x)$ は E 全体で定義された実数値，局所 Hölder 連続な函数で，正の定数 α, C_0, R_0 が存在して

$$|g(x)| \leqq C_0 |x|^{-2-\alpha} \qquad (|x| \geqq R_0)$$

が成立する.

条件 (C_1) のもとで C_0^∞ で定義された作用素 $-\Delta + g$ は L^2 で

一意の自己共役拡張をもつ．それを A と表わす．A の定義域 $\mathcal{D}(A)$ は Sobolev space W_2^2 であることが知られている．

(C_2)：A は固有値をもたない．

条件 (C_2) のもとで A は strictly positive definite である．$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ で自己共役作用素 $A^{\frac{1}{2}}$ の定義域を表わす．

(C_3)：f は $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ に属し，$|x|\to\infty$ のとき $O(|x|^{-3-\gamma})$ $(\gamma>0)$ なる order で減少する．

定理 1．$(-\Delta+q)w=0$，$w\notin L^2$，$w=O(|x|^{-1})$，$\frac{\partial w}{\partial x_i}=O(|x|^{-2})$ $(|x|\to\infty)$ をみたす全ての w に対して $\langle f, w\rangle=0$ と仮定する．このとき (1) の解 $u(t)=u(x,t)$ は次の性質をもつ：

(2.1) $$\lim_{t\to\infty}(u(t),\varphi)_{L^2}=0 \qquad \text{for all } \varphi\in L^2,$$

(2.2) $$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{L^2(K)}=0 \qquad \text{for all compact } K\subset E.$$

更に，$f\in\mathcal{D}(A)$，$\sup_{x\in E}|\nabla q(x)|<\infty$ （$\nabla q(x)$ は $\operatorname{grad} q(x)$ を表わす）と仮定すると

(2.3) $$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in K}|u(x,t)|=0 \qquad \text{for all compact } K\subset E$$

が成立する．

定理 2（主定理）．$q\in C^2(E)$，$q=O(|x|^{-3-\alpha})$，$D^\beta q=O(|x|^{-2-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ $(|\beta|=1,2)$ と仮定する．$u(t)$ を (1) の解とする．このとき任意の $\varphi\in L^2$，$\varphi=O(|x|^{-2-\delta})$ $(\delta>\frac{1}{2})$ $(|x|\to\infty)$ に対して

(2.4) $\lim_{t\to\infty} \langle u(t), \varphi \rangle = 4\pi \langle \varphi, w\rangle \cdot \langle f, w\rangle \cdot \langle g, w\rangle^{-2}$

が成立する．ここで w は定理1でのべたものである．

定理2と[2]における定理6より次の系をうる．

系．$g(x)$ は定理2と同じ条件を満足すると仮定する．このとき条件 (C_3) をみたす全ての f に対する (1) の解 $u(x,t)$ が

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in K} |u(x,t)| = 0 \qquad \text{for all compact } K \subset E$$

をみたすための必要十分条件は定理1にのべた函数 w が存在しないことである．

§3．定理1の証明に次の補題1,2が使われる．

$\varphi \in L^6$ に対して

(3.1) $$T\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_E \frac{1}{|x-y|} g(y)\varphi(y)\,dy \qquad (\varphi \in L^6)$$

とおく。このとき定理1における w は次のように特徴づけられる．

補題1． 1)．T は L^6 から L^6 への compact operator であり，T の双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する adjoint operator T^* は $L^{\frac{6}{5}}$ から $L^{\frac{6}{5}}$ への compact operator で次の形で与えられる：

(3.2) $$T^*\psi = -\frac{1}{4\pi} g(x)\int_E \frac{1}{|x-y|}\psi(y)\,dy \qquad (\psi \in L^{\frac{6}{5}}).$$

2)． $M = \{ w \in L^6 ; (I-T)w = 0\}$, $M' = \{ w' \in L^{\frac{6}{5}} ; (I-T^*)w' = 0\}$

とおく．ここで I は恒等作用素を表わす．このとき

$$w = O(|x|^{-1}),\ \frac{\partial w}{\partial x_i} = O(|x|^{-2}) \quad (|x|\to\infty) \quad (w \in M),$$

$$w' = O(|x|^{-3-\alpha}) \quad (|x| \to \infty) \quad (w' \in M')$$

が成立する．

<u>註.</u> 定理1における w の全体が補題1における M と一致することは容易に分る．

<u>補題2.</u> $\varphi \in L^2$, $\varphi = O(|x|^{-2-\delta})$ $(\delta > \frac{1}{2})$ $(|x| \to \infty)$, かつ全ての $w \in M$ に対して $\langle \varphi, w \rangle = 0$ と仮定する．このとき φ は $A^{\frac{1}{2}}$ の値域に属する．

§4．この節で我々は定理2の証明に必要ないくつかの補題を準備する．

<u>補題3.</u> 1)．$a > 0$, $t > 0$ を fix する．このとき積分 $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left| \frac{e^{\zeta t}}{\lambda + \zeta^2} \right| d\zeta$ は $\lambda \in (0, \infty)$ の有界連続函数である．
2)．$a' < 0$, $t > 0$ を fix する．このとき積分 $\displaystyle\int_{a'-i\infty}^{a'+i\infty} \left| \frac{e^{\zeta t}}{\lambda + \zeta^2} \right| d\zeta$ は $t \geqq t_0$ なる t に関して一様に收束し

$$\int_{a'-i\infty}^{a'+i\infty} \frac{e^{\zeta t}}{\lambda + \zeta^2} d\zeta = 0 \quad (t > 0)$$

が成立する．

<u>補題4.</u> $t > 0$, $a > 0$ を fix する．函数 $l(\lambda)$ が $(0, \infty)$ で局所有界かつ $l(\lambda) \in L^1(0, \infty)$ ならば積分 $\displaystyle\int_0^\infty |l(\lambda)| d\lambda \int_{-a+iN}^{a+iN} \left| \frac{e^{\zeta t}}{\lambda + \zeta^2} \right| d\zeta$ は $|N| > 3a$ なる任意の実数 N に対して收束する．

<u>補題5.</u> $a > 0$ を fix する．このとき

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\zeta t} R(-\zeta^2) f \, d\zeta$$

は、初期値問題(I)の解である．ここで $R(-\zeta^2)$ は A の $-\zeta^2$ に対する *resolvent* $(A+\zeta^2)^{-1}$ を表わす．

次の補題6は[4]における *lemma 3.2* を *modify* したものである．

補題6． $v \in L^2$, $v = O(|x|^{-3-\varepsilon})$ $(|x| \to \infty)$ $(0<\varepsilon<1)$，かつ $\int_E v(x)\,dx = 0$ とする．このとき

$$\int_E \frac{v(y)}{|x-y|}\,dy = O(|x|^{-1-\varepsilon}) \quad (|x| \to \infty).$$

補題7. $w \in M$ かつ $w \neq 0$ ならば $\langle g, w \rangle \neq 0$． $w \in M$ かつ $w \neq 0$ なるものが存在すれば $\dim M = \dim M' = 1$．

註. g が定理２の仮定をみたすとき補題７は定理２の証明の過程においても得られる。

補題8． $\lambda > 0$ に対して

$$\theta(\lambda) = \theta(x,\lambda) = (2\pi i)^{-1}\,(u_+(x,\lambda) - u_-(x,\lambda))$$

とおく．ここで $u_\pm(x,\lambda) = R(\lambda \pm i0) f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A - (\lambda \pm i\varepsilon))^{-1} f(x)$．更に $\varphi \in C^2(E)$ に対して $\|\varphi\|_{C^2_{3+\alpha}} = \sup_{x\in E, |\beta|\le 2} |D^\beta \varphi(x)|\,(1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}$ なる *norm* を定義し， $C^2_{3+\alpha}$ によって *Banach* 空間 $\{\varphi \in C^2(E);\ \|\varphi\|_{C^2_{3+\alpha}} < \infty\}$ を表わす．このとき $\lambda \in (0,\infty)$ の函数 $T_\lambda(\varphi) = \langle \theta(\lambda), \varphi \rangle$ $(\varphi \in C^2_{3+\alpha})$ は $C^2_{3+\alpha}$ から $L^1(0,\infty)$ への *nuclear* operator であり、かつ $\|T_\lambda\|_{(C^2_{3+\alpha})^*} = \|\theta(\lambda)\|_{(C^2_{3+\alpha})} \in L^1(0,\infty)$ である。

§5. 定理2の証明.

$w \in M$ かつ $w \neq 0$ なる w が存在するとする。そのとき補題7より $\dim M = 1$ かつ $\langle g, w\rangle \neq 0$ が従う。よって $\langle g, w\rangle = 1$ となる w をとる。任意の $\varphi \in L^2$, $\varphi = O(|x|^{-2-\delta})\ (|x| \to \infty)\ (\delta > \frac{1}{2})$ を

$$\varphi = \langle \varphi, w\rangle g + (\varphi - \langle \varphi, w\rangle g) \equiv \varphi_1 + \varphi_2$$

と分けると、$\langle \varphi_2, w\rangle = 0$, $g = O(|x|^{-3-\alpha})\ (|x| \to \infty)$ であるから定理1により

$$\lim_{t\to\infty} \langle u(t), \varphi_2\rangle = 0$$

をうる。よって

$$(5.1) \qquad \lim_{t\to\infty} \langle u(t), g\rangle = 4\pi \langle f, w\rangle$$

を証明すればよい。

$f, g \in L^2$ かつ $f = O(|x|^{-3-\delta})$, $g = O(|x|^{-2-\alpha})\ (|x| \to \infty)$ であることから [2] の定理4により λ の函数 $\frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle$ は $(0,\infty)$ で連続で、かつ [4] の定理6により $L^1(0,\infty)$ に属することが分る。よって補題3, ~~4~~, 5 と Fubini の定理を使って

$$\langle u(t), g\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle d\lambda \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\zeta t}}{\lambda + \zeta^2} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle d\lambda \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{e^{\zeta t}}{\lambda+\zeta^2} d\zeta + \int_{N^2}^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle d\lambda$$

と変形する．ここで $a>0$，Γ_1 と Γ_2 はそれぞれ正の向きの曲線
$\{s-iN;\, 0<s\leqq a\}\cup\{a+i\tau;\, -N<\tau<N\}\cup\{s+iN;\, 0<s\leqq a\}$,
$\{s+iN;\, -a\leqq s<0\}\cup\{-a+i\tau;\, -N<\tau<N\}\cup\{s-iN;\, -a\leqq s<0\}$
を表わし，$N>3a$ である。第二の等式の右辺第二項は N を十分大きくすれば $t>0$ に関して一様に十分零に近くできる．そのように N を十分大きく fix しておく。次に．$\zeta\in\Gamma_2$ ならば $Re\,\zeta<0$ であるから補題4と Lebesgue の定理により

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle d\lambda \int_{\Gamma_2} \frac{e^{\zeta t}}{\lambda+\zeta^2} d\zeta = 0$$

をうる．よって

$$(5.2)\qquad \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle d\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\zeta t}}{\lambda+\zeta^2} d\zeta = 8\pi^2 i\langle f, w\rangle$$

を証明すればよい．

$$(5.3)\qquad \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle d\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\zeta t}}{\lambda+\zeta^2} d\zeta = \int_{\Gamma_1} e^{\zeta t}\langle R(-\zeta^2)f, g\rangle d\zeta$$

と再び変形する．$Re\,\zeta>0$ に対して $u(\zeta)=R(-\zeta^2)f$ とおくと $u(\zeta)$ は

$$(5.4)\qquad u(x,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{-\zeta|x-y|}}{|x-y|} f(y)\,dy - \frac{1}{4\pi}\int_E \frac{e^{-\zeta|x-y|}}{|x-y|} g(y)u(y,\zeta)\,dy$$

をみたす．これと $g=O(|x|^{-3-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ であることから

$$(5.5)\qquad \langle u(\zeta), g\rangle = -\frac{1}{\zeta}\int_{E\times E} \frac{e^{-\zeta|x-y|}}{|x-y|} f(y)g(x)w(x)\,dx\,dy + \zeta\langle u(\zeta), P(\zeta)\rangle$$

が成立することが分る．ここで

(5.6) $$p(\zeta)=p(x,\zeta)=g(x)\int_E g(y)w(y)|x-y|\,dy\int_0^1 d\tau'\int_0^1 \tau e^{-\zeta|x-y|\tau\tau'}d\tau$$

とおいた。

更に、(5.4) を (5.5) にくり返し代入して (3.1), (5.6) を考慮に入れると、(5.3) の左辺は

(5.7) $$\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, g\rangle\, d\lambda\int_{\Gamma_1}\frac{e^{\zeta t}}{\lambda+\zeta^2}d\zeta = 4\pi\langle f, w\rangle\int_{\Gamma_1}\frac{e^{\zeta t}}{\zeta}d\zeta$$
$$+\int_{\Gamma_1} e^{\zeta t}F(\zeta)\,d\zeta+\int_{\Gamma_1}\zeta e^{\zeta t}\langle R(-\zeta^2)f,\ T_\zeta^{*3}p(\zeta)\rangle\, d\zeta$$

となる。ここで

$$F(\zeta)=\int_{E\times E} f(y)g(x)w(x)\,dx\,dy\int_0^1 e^{-\zeta|x-y|\tau}d\tau+\zeta\sum_{j=0}^{2}\langle T_\zeta^{j}\psi_\zeta,\ p(\zeta)\rangle,$$

$$\psi_\zeta(x)=\frac{1}{4\pi}\int_E\frac{e^{-\zeta|x-y|}}{|x-y|}f(y)\,dy,\quad T_\zeta\psi(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_E\frac{e^{-\zeta|x-y|}}{|x-y|}g(y)\psi(y)\,dy,$$

$$T_\zeta^{*}\psi(x)=-\frac{1}{4\pi}g(x)\int_E\frac{e^{-\zeta|x-y|}}{|x-y|}\psi(y)\,dy,\quad T^0\psi(x)=\psi(x),$$

$$T^j\psi(x)=T(T^{j-1}\psi)(x)\quad (j=1,2,3)$$

とおいた。

以下において、$t\to\infty$ のとき (5.7) の右辺第一項が $8\pi^2 i\langle f,w\rangle$ に収束し第二項と第三項が零に収束することを示す。第一項についてはLebesgueの定理を使って

(5.8) $$\lim_{t\to\infty}4\pi\langle f, w\rangle\int_{\Gamma_1}\frac{e^{\zeta t}}{\zeta}d\zeta = 8\pi^2 i\langle f, w\rangle$$

をうる。第二項は、$f, g\in L^2$ かつ $f=O(|x|^{-3-\gamma})$, $g=O(|x|^{-3-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ であることから $F(\zeta)$ は $\{\zeta;\ \mathrm{Re}\,\zeta>0\}$ で正則であり、

更に $Re\,\zeta \geqq 0$ なる ζ に関して一様に $T_\zeta^{j} \psi_\zeta(x) = O(|x|^{-1})$ $(j=0,1,2)$, $p(x,\zeta) = O(|x|^{-2-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ となるから $F(\zeta)$ は $\{\zeta;\ Re\,\zeta \geqq 0\}$ で連続である．よつて Lebesgue の定理と Riemann-Lebesgue の定理により

$$(5.9) \qquad \lim_{t\to\infty} \int_{P_1} e^{\zeta t} F(\zeta)\, d\zeta = 0$$

をうる。問題は第三項であるが、簡単のために

$$P_3(x,\zeta) = T_\zeta^{*3} p(x,\zeta)$$

とおいて

$$\int_{P_1} \zeta e^{\zeta t} \langle R(-\zeta^2) f,\, P_3(\zeta)\rangle\, d\zeta = \int_{P_1} \zeta e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \theta(\lambda), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda + \zeta^2}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{i} \int_{P_1} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda - i\zeta} - \frac{1}{\lambda + i\zeta} \right) \langle \lambda\theta(\lambda^2),\, P_3(\zeta)\rangle\, d\lambda$$

と変形する．ここで $\theta(\lambda)$ は §4 補題8 で定義されたものである．右辺第二項を考える（第一項についても全く同様のことが成り立つ）．先ず $a>0$ を fix したとき

$$(5.10) \quad \int_{P_1} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda + i\zeta}\, d\lambda = \int_0^\infty d\lambda \int_{P_1} e^{\zeta t} \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda + i\zeta}\, d\zeta$$

が成立することを示そう．条件 $f \in L^2$, $f = O(|x|^{-3-\gamma})$ $(|x|\to\infty)$ より $\theta(x,\lambda)$ は任意の $0<\beta_1<\beta_2$ に対して $E \times [\beta_1, \beta_2]$ で連続であり、かつ

$$\sup_{\beta_1 \leqq \lambda \leqq \beta_2} |\theta(x,\lambda)| \leqq C_{\beta_1,\beta_2} (1+|x|)^{-1} \qquad (x \in E),$$

$$\int_0^\infty |(\theta(\lambda), \psi)_{L^2}|\, d\lambda \leqq (\|f\|_{L^2}^2 + 1)\, \|\psi\|_{L^2} \qquad (\psi \in C_0^\infty(R^3))$$

と評価される．($\because \frac{d}{d\lambda}(E_\lambda f, \psi)_{L^2} = (\theta(\lambda), \psi)_{L^2}$)．又 $g \in L^2$,

$g = O(|x|^{-3-\alpha})$ $(|x| \to \infty)$ より

$$\sup_{Re\,\zeta \geq 0} |P_3(x,\zeta)| \leq C(1+|x|)^{-4-\alpha} \qquad (x \in E)$$

が従う．以上のことから(5.10)の左辺は λ, ζ に関して絶対可積分であることが分り、Fubiniの定理が使える．

又、$\lambda > 0$ を fix したとき $\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle$ が $\{\zeta ; Re\,\zeta > 0\}$ で正則であるから、(5.10) より

$$(5.11) \quad \int_{P_1} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda + i\zeta} d\lambda = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty d\lambda \int_{P_\varepsilon} e^{\zeta t} \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda + i\zeta} d\zeta$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{P_\varepsilon} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda + i\zeta} d\lambda$$

をうる．ここで P_ε は P_1 において a を ε でおきかえられる曲線である．

先ず(5.10)の証明と同じ議論により

$$(5.12) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\pm iN}^{\varepsilon \pm iN} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda + i\zeta} d\lambda = 0$$

をうる．ここで複号は同順にとる．よって次の補題9が証明されゝば定理は証明されたことになる．

<u>補題9．</u> $g(x)$ が定理2の仮定をみたすとする．このとき

$$(5.14) \quad \lim_{t \to \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty d\lambda \int_{\varepsilon - iN}^{\varepsilon + iN} e^{\zeta t} \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda \pm i\zeta} d\zeta = 0$$

が成立する．

補題9を証明する前に次のことを補題の形でのべておく．

補題10．$g(x)$が定理2の仮定をみたすとする．このとき

$$\sup_{x\in E, |\beta|\leq 2} |D_x^\beta P_3(x,\zeta)|(1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}} \leq C_K \quad \text{for } Re\,\zeta \geq 0, |\zeta|\leq K$$

が成立する．ここでKは任意の正数，C_Kはζに無関係な定数である．

補題9の証明．$\lambda > 2N$, $|Im\,\zeta| \leq N$のとき$|\lambda \pm i\zeta| \geq N$が成立するから補題8, 10, Lebesgueの定理，Riemann-Lebesgueの定理により

$$(5.14)' \quad \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^{2N} d\lambda \int_{\varepsilon-iN}^{\varepsilon+iN} e^{\zeta t} \frac{\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\zeta)\rangle}{\lambda \pm i\zeta} d\zeta = 0$$

を証明すればよいことが分る。先ず

$$(5.15) \quad \lim_{t\to\infty} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^N d\lambda \int_{-N}^N e^{(\varepsilon+is)t} \frac{(\lambda-s)\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\varepsilon+is)\rangle}{(\lambda-s)^2+\varepsilon^2} ds = 0$$

が成立することを示そう。

$$\rho = t - (|x-y|+|y-z|+|z-u|+|u-v|\tau\tau')$$

とおく．Fubiniの定理により$t>0$, $\varepsilon>0$をfixしたとき

$$(5.16) \quad \int_{-N}^N e^{(\varepsilon+is)t} \frac{(\lambda-s)\langle \lambda\theta(\lambda^2), P_3(\varepsilon+is)\rangle}{(\lambda-s)^2+\varepsilon^2} ds$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 e^{\varepsilon t} \int_E \lambda\theta(x,\lambda^2)\varphi_{\varepsilon,t}(x,\lambda)\,dx$$

をうる．ここで

$$(5.17)\quad \varphi_{\varepsilon,t}(x,\lambda)=q(x)\int_E \frac{q(y)}{|x-y|}dy\int_E \frac{q(z)}{|y-z|}dz\int_E \frac{q(u)}{|z-u|}du\int_E |u-v|\times$$
$$\times q(v)\omega(v)dv\int_0^1 d\tau'\int_0^1 \tau e^{-\varepsilon(t-\rho)}d\tau\int_{-N}^{N}\frac{(s-\lambda)e^{i\rho s}}{(s-\lambda)^2+\varepsilon^2}ds$$

とおいた。先ず

$$(5.18)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^N d\lambda\int_{-N}^{N} e^{(\varepsilon+is)t}\frac{(\lambda-s)\langle\lambda\theta(\lambda^2),\ P_3(\varepsilon+is)\rangle}{(s-\lambda)^2+\varepsilon^2}ds$$
$$=\left(\frac{1}{4\pi}\right)^3\int_0^N d\lambda\int_E \lambda\theta(x,\lambda^2)\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi_{\varepsilon,t}(x,\lambda)dx$$

を示そう。$t>0$ を fix する。このとき定数 C が存在して

$$(5.19)\quad \sup_{x\in E,\,|\beta|\le 2}|D_x^\beta\varphi_{\varepsilon,t}(x,\lambda)|(1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}\le C\left(1+\log\frac{N+\lambda}{N-\lambda}\right)$$
$$\text{for all } \lambda<N,\ \varepsilon<1$$

が成立する。実際、$s\cos s$ は奇函数であるから $\lambda<N$ に対して

$$(5.20)\quad \int_{-N}^{N}\frac{(s-\lambda)e^{i\rho s}}{(s-\lambda)^2+\varepsilon^2}ds=e^{i\rho\lambda}\left[\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(N-\lambda)\rho}\frac{s\cos s}{s^2+\varepsilon^2\rho^2}ds+i\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(N-\lambda)\rho}\frac{s\sin s}{s^2+\varepsilon^2\rho^2}ds\right]$$
$$=e^{i\rho\lambda}\left[\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(\lambda-N)\rho}\frac{\cos s}{s}ds-\varepsilon^2\rho^2\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(\lambda-N)\rho}\frac{\cos s}{s(s^2+\varepsilon^2\rho^2)}ds\right.$$
$$\left.+i\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(N-\lambda)\rho}\frac{\sin s}{s}ds-i\varepsilon^2\rho^2\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(N-\lambda)\rho}\frac{\sin s}{s(s^2+\varepsilon^2\rho^2)}ds\right]$$

と変形できるから

$$(5.21)\quad \left|\int_{-N}^{N}\frac{(s-\lambda)e^{i\rho s}}{(s-\lambda)^2+\varepsilon^2}ds\right|\le C'\left(1+\log\frac{N+\lambda}{N-\lambda}\right)$$

をうる。ここで C' は ε,λ,ρ に無関係な定数である。$t-\rho\ge 0$ かつ $q=O(|x|^{-3-\alpha})$, $D^\beta q=O(|x|^{-2-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ $(|\beta|=1,2)$ であるか

ら、部分積分により(5.17)と(5.21)を使って(5.19)をうる．よって(5.16)，(5.19)，補題8及びLebesgueの定理により(5.18)をうる．

次に

$$(5.22)\qquad \lim_{t\to\infty}\int_0^N d\lambda\int_E \lambda\,\theta(x,\lambda^2)\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi_{\varepsilon,t}(x,\lambda)=0$$

を示そう．(5.17)，(5.20)，(5.21)より

$$(5.23)\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi_{\varepsilon,t}(x,\lambda)=g(x)\int_E\frac{g(y)}{|x-y|}dy\int_E\frac{g(z)}{|y-z|}dz\int_E\frac{g(u)}{|z-u|}du$$

$$\int_E(u-v)g(v)\omega(v)\,dv\int_0^1 d\tau'\int_0^1\tau\, e^{i\lambda\rho}d\tau\left[\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(\lambda-N)\rho}\frac{\cos s}{s}ds+i\pi\right.$$

$$\left.+i\left\{\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(N-\lambda)\rho}\frac{\sin s}{s}ds-\pi\right\}\right]$$

$$\equiv J_{1,t}(x,\lambda)+J_{2,t}(x,\lambda)+J_{3,t}(x,\lambda)$$

をうる．更に

$$\varphi_2(x,\lambda)=e^{-i\lambda t}J_{2,t}(x,\lambda)$$

とおく．$g=O(|x|^{-3-\alpha})$，$D^\beta g=O(|x|^{-2-\alpha})$ $(|x|\to\infty)$ $(|\beta|=1,2)$ であるから

$$\sup_{x\in E,\,|\beta|\leqq 2}|D_x^\beta\varphi_2(x,\lambda)|\,(1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}\leqq C\qquad \text{for all } \lambda<N$$

をうる．ここでCはλに無関係な定数である．よって補題8とRiemann-Lebesgueの定理により

$$(5.24)\qquad \lim_{t\to\infty}\int_0^N d\lambda\int_E\lambda\,\theta(x,\lambda^2)J_{2,t}(x,\lambda)\,dx$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_0^N e^{i\lambda t}d\lambda\int_E\lambda\,\theta(x,\lambda^2)\varphi_2(x,\lambda)\,dx=0$$

をうる．又、$\rho-t$ をfixすると $t\to\infty$ のとき $\rho\to\infty$ である

から $\lambda < N$, $\rho - t$ を fix すると

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(\lambda-N)\rho}\frac{\cos s}{s}ds = \lim_{t\to\infty}\int_{(-N-\lambda)\rho}^{(N-\lambda)\rho}\frac{\sin s}{s}ds - \pi = 0$$

をうる．よって(5.18)を証明したときと同様の議論により

$$(5.25)\qquad \lim_{t\to\infty}\int_0^N d\lambda\int_E \lambda\theta(x,\lambda^2)\,J_{k,t}(x,\lambda)\,dx = 0 \qquad (k=1,3)$$

をうる．結局(5.23)，(5.24)，(5.25)より(5.22)が得られた．

又，(5.15)を証明したときと同様の議論により

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_N^{2N}d\lambda\int_{-N}^{N}e^{(\varepsilon+is)t}\frac{(\lambda-s)\langle\lambda\theta(\lambda^2),P_3(\varepsilon+is)\rangle}{(\lambda-s)^2+\varepsilon^2}ds = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2N}d\lambda\int_{-N}^{N}e^{(\varepsilon+is)t}\frac{\varepsilon\langle\lambda\theta(\lambda^2),P_3(\varepsilon+is)\rangle}{(\lambda-s)^2+\varepsilon^2}ds = 0$$

をうる．よって(5.14)′の一方の式が示された．他方も全く同様にして証明される．よって補題9の証明は終った．

参考文献

[1] O.A.Ladyzhenskaya: On the asymtotic amplitude principle. Uspehi Mat.Nauk (N.S.),12,161-164(1957).

[2] D.M.Ėĭdus: The principle of limiting absorption. Mat. Sb., 57(99),13-44(1962); A.M.S.Transl.series 2(47), 157-191 (1965).

[3] K.Asano and T.Shirota: Remarks on eigenfunctions of the operators $-\Delta+q$. Proc. Japan Acad.,42,1044-1049 (1966).

[4] T.Ikebe: Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. Arch Rat. Mech. Anal.,5,1-34(1960).

[5] K.Kubota and T.Shirota: On certain condition for the principle of limiting amplitude. Proc.Japan Acad.,42, 1155-1160(1966).

[6] K.Kubota and T. Shirota: The principle of limiting amplitude. J.Fac.Sci.Hokkaido Univ.Ser.A(1967)(to appear).

[7] D.Thoe: Spectral theory for the wave equation with a potential term. Arch.Rat.Mech.Anal.,22,364-406(1966).

[8] A.Grothendieck: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.Mem.Amer.Math.Soc.,1955.

[9] H.G.Garnir: Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Birkhauser Verlag,Basel, 1958.