数理解析研究所講究録
第41巻 1968年 1-6

Topological Linear Group の被覆群

名大 理 久保田 富雄

数体上の linear group の $\mathfrak{p}$－進完備化の位相群としての被覆群をきめる問題，いいかえれば連結性あるいは基本群というべきものを決定する問題は，[1]で示されているように，その群を無限素点において完備化して得られる Lie 群の算術的不連続部分群について，合同部分群の他に有限指数の部分群があるかどうかを決定する問題と殆ど同じである．この問題はすでにいくつかの場合に解決され，[1]はその結果をまとめたものであるが，一般に多くの linear group は位相的に単連結でなく，被覆群をもつことがわかっている．[4]の metaplectic group もその一つである．こゝでは F を 1 の n 乗根（$n \geq 2$）を含む総虚な数体として，GL(2, F) についてその被覆群を因子団で具体的にあたえる方法を示し，そのいくつかの直接的応用をのべる．

$\mathfrak{p}$ を F の有限素点，$F_{\mathfrak{p}}$ を $\mathfrak{p}$－進体とし，$SL(2, F_{\mathfrak{p}})$ の元 σ，τ について

$$a_{\mathfrak{f}}(\sigma, \tau) = \left(\frac{x(\sigma),\ x(\tau)}{\mathfrak{f}}\right)_n \left(\frac{-x(\sigma)^{-1}x(\tau),\ x(\sigma\tau)}{\mathfrak{f}}\right)_n$$

とおく．但し　$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　について

$$x(\sigma) = \begin{cases} c, & c \neq 0, \\ d, & c = 0, \end{cases}$$

であり，$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{f}}\right)_n$ は Hilbert-Hasse のノルム剰余記号である．この $a_{\mathfrak{f}}(\sigma, \tau)$ は因子団の条件 $a_{\mathfrak{f}}(\sigma, \tau)a_{\mathfrak{f}}(\sigma\tau, \rho) = a_{\mathfrak{f}}(\sigma, \tau\rho)a_{\mathfrak{f}}(\tau, \rho)$ を満足し，$SL(2, F_{\mathfrak{f}})$ の non-trivial な n 重被覆群を定める [3]．次に $GL(2, F_{\mathfrak{f}})$ の元 σ，τ を $\sigma = \sigma_1\begin{pmatrix} 1 & \\ & x \end{pmatrix}$，$\tau = \tau_1\begin{pmatrix} 1 & \\ & y \end{pmatrix}$，($\sigma_1$，$\tau_1 \in SL(2, F_{\mathfrak{f}})$) の形にかいておき，

$$a_{\mathfrak{f}}(\sigma, \tau) = a_{\mathfrak{f}}(\sigma_1^{y}, \tau_1)\, v_{\mathfrak{f}}(\sigma_1)$$

とおく．但し $\sigma_1^{y} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & y \end{pmatrix}\sigma_1\begin{pmatrix} 1 & \\ & y \end{pmatrix}^{-1}$，また $\sigma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば

$$v_{\mathfrak{f}}(\sigma_1) = \begin{cases} 1, & c \neq 0, \\ \left(\frac{d,\ y}{\mathfrak{f}}\right)_n, & c = 0, \end{cases}$$

である．この $a_{\mathfrak{f}}(\sigma, \tau)$ は前にあたえた SL の被覆を GL にまでひろげたものをあたえる因子団となる．$\mathfrak{f}$ が無限の場合にも $a_{\mathfrak{f}}(\sigma, \tau)$ を便宜上同様に定義するが，それはすべて 1 である．

こゝで $G_F = GL(2, F)$ とおき，$G_{\mathfrak{f}} = GL(2, F_{\mathfrak{f}})$ の compact 部分群 $K_{\mathfrak{f}}$ を

$$K_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} U(2), & \mathfrak{p} \mid \infty, \\ GL(2, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})_{n^2}, & \mathfrak{p} \nmid \infty, \end{cases}$$

で定めて G_F のadele群 G_A を作る．但し $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ は $F_{\mathfrak{p}}$ の整数環，添字 n^2 は mod n^2 の合同部分群をとることを意味する．今 $\sigma, \tau \in G_A$ について

$$a(\sigma, \tau) = \prod_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}(\sigma_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}}),$$

（$\sigma_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}}$ は σ, τ の $\mathfrak{p}$ 成分）とおくと，$a(\sigma, \tau)$ によって G_A の n 重被覆群 $\tilde{G}_A$ が定まり，被覆写像 $\tilde{G}_A \rightarrow G_A$ の核 $\mathfrak{z}$ は n 次の巡回群で $\tilde{G}_A$ の center に入る．$\tilde{G}_A$ の元は (σ, ζ)，$(\sigma \in G_A,\ \zeta^n = 1)$，の形にかきあらわすことにする．一方 $a_{\mathfrak{p}}(\sigma_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}})$ は $K_{\mathfrak{p}}$ で split することが具体的に

$$a_{\mathfrak{p}}(\sigma, \tau) = s_{\mathfrak{p}}(\sigma) s_{\mathfrak{p}}(\tau) s_{\mathfrak{p}}(\sigma\tau)^{-1},$$

$$s_{\mathfrak{p}}(\sigma) = \begin{cases} 1, & c \text{ が unit または } 0, \\ \left(\dfrac{c,\ d}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1}, & c \text{ が non-unit で } \neq 0, \end{cases} \qquad \left(\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_{\mathfrak{p}}\right),$$

によって示される．故に $s(\sigma) = \prod_{\mathfrak{p}} s_{\mathfrak{p}}(\sigma)$ とおけば，$K = \prod_{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}} \ni \sigma \longrightarrow \hat{\sigma} = (\sigma, s(\sigma)) \in \tilde{G}_A$ によって定まる $\hat{\sigma}$ の全体は K と同型な群をなす．そこでこの群 $\hat{K}$ に K との同型対応で定まる位相を入れ，さらに $\tilde{G}_A / \hat{K}$ をdiscrete として $\tilde{G}_A$ の位相をきめると，それは $\hat{K} \cap \mathfrak{z} = 1$ によって G_A と局所同型な covering topology となる．このように被覆群 $\tilde{G}_A$ を直接すぐに構成する方法をあたえるのが具体的な形の因子団の第1の応用である．

$G_F \ni \sigma \longrightarrow (\sigma, 1) \in \tilde{G}_A$によって$G_F$が同型に$\tilde{G}_A$の中に入り，しかもdiscrete subgroupとなることも，ノルム剰余記号の積公式と，上記$\hat{K}$の形とを用いることによって証明される．これで$\tilde{G}_A$にはdiscrete，compact 両部分群が都合のよい形であたえられ，automorphic function の理論の立てられる状態になる．$G_\infty = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} G_{\mathfrak{p}}$もやはり$\sigma \longrightarrow (\sigma, 1)$で$\tilde{G}_A$の部分群とみなされる．

また，$G_F \cdot \mathfrak{z}$と$\hat{K} G_\infty$との共通部分を考察することにより，$G_F \cap K G_\infty = \Gamma$の元については$\mathfrak{s}(\sigma) \left(= \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{s}_{\mathfrak{p}}(\sigma) \right)$が$\sigma$に関して乗法的なことがわかるが，この場合相互法則から$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$なら$\mathfrak{s}(\sigma) = \left(\frac{c}{d}\right)_n$であることがいえるから，これで[2]の定理の別証があたえられる．これらもすべて因子団の具体的な形の応用である．

$\mathfrak{s}(\sigma)$を$\sigma \in \Gamma$については$\chi(\sigma)$とかき，G_∞をcenterと$K_\infty = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}$との合併でわって対称空間$H$を作れば，$\Gamma$はHilbert 型に$H$に作用するから，Eisenstein 級数$E_i(u, s, \chi)$，$(u \in H, s \in \mathbb{C})$，が有限個定まる．$E_i$の各 cusp での Fourier 展開の定数項のなす行列$\Phi(s, \chi)$について，$\det \Phi(s_0, \chi) = 0$となるs_0を適当にとると，(実はs_0はたゞ一つきまる)，$E_i(u, s_0, \chi)$の1次結合として，$L^2(\Gamma \backslash H)$に入る函数fでHの Laplacian の固有函数であり，しかも$f(\sigma u) = \chi(\sigma) f(u)$，$(\sigma \in \Gamma)$，をみたすものの$\mathbb{C}$上有限次元の空間が得られることが一般にわかるが，それを

今 Θ_χ とすると，$f \in \Theta_\chi$ は $\tilde{G}_A$ 上の，上でふれた意味と調和する automorphic form とみなされ，しかも $(1, \zeta) \in \mathfrak{Z}$ なら

$$f(x(1,\zeta)) = f(x)\zeta, \qquad (x \in \tilde{G}_A),$$

がなりたつ.（厳密にいえば $G_A = G_F \cdot KG_\infty$ でない時は少しいい方をかえる必要がある.）他方 $L(\tilde{G}_A, \hat{K})$ によって，$\tilde{G}_A$ 上の $\hat{K}$ 両側不変，連続，かつ台が compact な函数 ϕ で，$\phi(x\cdot(1,\zeta)) = \phi(x)\zeta$ をみたすもの全体が，convolution によってなす algebra をあらわすと，それは可換となり，Θ_χ に作用して normal operator の ring となる. 従って Θ_χ は 1 次元固有空間の直和に分解し，各空間が，$\tilde{G}_A$ の一つの既約 unitary 表現で，$\mathfrak{Z}$ 上で忠実なものをあたえることになる. これらのことについては，こゝではこれ以上詳しい説明ははぶくが，今のべた表現は 1 の巾根の位数 n について実質的に一意的に定まるものであり，$n = 2$ のときは Θ_χ は古典的なテータ函数の空間となる. 従ってその表現と [4] で構成された表現との間には密接な関係がある. しかも Θ_χ に属す函数 f の変換法則 $f(\sigma u) = \chi(\sigma) f(u)$ は，テータ函数と平方剰余とのよく知られた関係の一般の場合への拡張をあたえるのである.

因子団 $a_\mathfrak{z}(\sigma, \tau)$ はさらにいわば matric algebra のノルム剰余記号としての意味をもっている. なぜなら，通常のノルム剰余記号も実は体の乗法群の被覆群をあたえる因子団になって

いるからである．このことに注意すれば，多元環におけるノルム剰余，巾剰余等の理論をたてることができる．そういう理論はアーベル拡大体のような方向とは一応無関係な，むしろ位相的な内容だけを含むものになってしまうが，それがノルム剰余，あるいは相互法則等の，必ずしも副次的ではない一面である．

文　　献

[1] H.Bass - J.Milnor - J.P.Serre, Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$), Columbia University 1967.

[2] T.Kubota, Ein arithmetischer Satz über eine Matrizengruppe, Journ. reine u. angew. Math., 222 (1966), 55 - 57.

[3] ________, Topological covering of SL(2) over a local field, Journ. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 114 - 121.

[4] Sur certain groups d'opérateurs unitaires, Acta Math., 111 (1964) 143 - 211.