数理解析研究所講究録
第 41 巻 1968 年 36-38

イデール類群の1-コホモロジー群について

阪大理学部　赤川安正

◦ $\mathcal{L} = \{l\}$: 有限個又は無限個の素数 l の集合

◦ $\mathbf{C}$: 次の3条件をみたす pro-finite groups のカテゴリー

C1) $\mathrm{Hom}(G, G')$ は位相群 G から G' への hom. 全体

C2) $G \in \mathrm{obj}\, \mathbf{C} \Longrightarrow$ 可換 pro-p $(\in \mathcal{L})$-群 A の G による群拡大 $\widetilde{G}$ (i. e. $1 \to A \to \widetilde{G} \to G \to 1$: exact) をとると, $\widetilde{G} \in \mathrm{obj}\, \mathbf{C}$.

C3) $\mathbf{C}$ の中で $\cdots \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1$ をとると常に $\varprojlim G_n \in \mathrm{obj}\, \mathbf{C}$

とする. 例えば pro-finite gr., pro-solvable gr., pro-p-gr. 等を考えればよい. 次に
(のカテゴリー)

◦ $\Gamma = \{\gamma\}$: 固定された index set

◦ $G_S = \{G_\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in S\}$: pro-finite gr. $G_\mathfrak{z}$ $(\in \mathrm{obj}\, \mathbf{C}$ or not$)$ の集合

とする. 次の3条件をみたす組 $(G, \sigma_\Gamma, \iota_S)$ の$\underbrace{\text{集合}}_{\mathcal{G}(\Gamma,\, G_S)}$をとる

G1) $G \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$

G2) $\sigma_\Gamma = \{\sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ は位相群 G の（必ずしも最小ではない）生成系 i.e. $G = \langle \sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle$

G3) $\iota_S = \{\iota_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in S\}$, $\iota_\mathfrak{p} : G_\mathfrak{p} \to G$ (hom.)

$\mathcal{G}(\Gamma, G_S)$ は次の様にして半順序集合となる:

$(G, \sigma_\Gamma, \iota_S) \geqq (G', \sigma_\Gamma', \iota_S') \rightleftarrows {}^\exists\psi \in \mathrm{Hom}(G, G')$;

s.t. ① $\psi(\sigma_\gamma) = \sigma_\gamma'$ $({}^\forall\gamma \in \Gamma)$ ② $\psi\,\iota_\mathfrak{p} = \iota_\mathfrak{p}'$ $({}^\forall\gamma \in \Gamma)$

$$\left.\begin{array}{ccc}(G, \sigma_\Gamma, \iota_S) & \geqq & (G', \sigma_\Gamma', \iota_S') \\ \text{〃} & \leqq & \text{〃}\end{array}\right\}$$ が同時に成立つとき,

$(G, \sigma_\Gamma, \iota_S) \sim (G', \sigma_\Gamma', \iota_S')$ とし, $\mathcal{G}(\Gamma, G_S)/\sim$ をあらためて $\mathcal{G}(\Gamma, G_S)$ とおく.

◎ C3) より $\mathcal{G}(\Gamma, G_S)$ は帰納的集合になる.

そこで $(G, \sigma_\Gamma, \iota_S)$ がその極大元であるとき,「G の *relations* は G_S だけで与えられる」ということにする.

さて,

- k : 体
- $k_S = \{k_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in S\}$ は $k_\mathfrak{p} \supset k$ なる体 $k_\mathfrak{p}$ の集合
- A_k : $\prod_S k_\mathfrak{p} \supset A_k \supset (\sum_S k_\mathfrak{p}) \cup k$ なる k-*algebra*

- $\bar{k}/k$: max. C-拡大 (i.e. Galois 群が C に属する Galois 拡大のうち最大のもの)
- $A_{\bar{k}} = A_k \otimes_k \bar{k}$
- $J_{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^{\times}$: $A_{\bar{k}}$ の正則元が作る乗法群
- $P_{\bar{k}}$: $\bar{k} \hookrightarrow A_{\bar{k}}$ における $\bar{k}^{\times}$ の image
- $C_{\bar{k}} = J_{\bar{k}} / P_{\bar{k}}$
- $\mathfrak{G}$: $\bar{k}/k$ のガロワ群 $G(\bar{k}/k)$
- $\mathfrak{G}_S = \{\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in S\}$, $\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}$ は $k_{\mathfrak{p}}$ の max. C-拡大 (又は単に max. Galois 拡大) の Galois 群

とする. このとき次の定理が成立つ.

定理 $H^1(\mathfrak{G}, C_{\bar{k}}) = 1$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{G}$ の relations は $\mathfrak{G}_S$ だけで与えられる

実際, 代数体や有限体上の一変数代数関数体の様に, イデール類群が類構造をなすものは $H^1(\mathfrak{G}, C_{\bar{k}}) = 1$ をみたす. この $H^1(\mathfrak{G}, C_{\bar{k}}) = 1$ は Hasse のノルム定理と同値なものであるが (例えば 河田敬義「代数的整数論」共立), 上記定理は この等式のいま一つの解釈を与えるものといえる.