

Hasse factor systems の作る variety.

名大 教養 増 田 勝彦

§1. 序

Galois algebra は, Kummer 拡大についての代数的理論を一般の Galois 拡大へ何とかして拡張したというはっきりした意図をもって H. Hasse が 1949年に導入した概念である. その後, 1950年代のはじめに, 上にのべた Hasse の意図の方向にいくつかの論文が発表されたが, やがてこの方向の研究はとどまってしまうた.

その後, 最近まで, いくつかの Galois algebra の論文は, ちらほらとあらわれてはいるが, 大体, 次の二つの線のものである. (イ) 一つは, 与えられた Galois 群をもつ Galois 拡大体の構成問題をめぐるごく特殊な研究. (ロ) 他の一つは, Homological algebra との関連で, まわめて抽象的な Galois algebra の理論.

したがって, 冒頭に述べた Hasse の本来の意図の方向に関

しては、1950年代の論文のまゝで放置されてゐるといつても過言ではなさそうである。

さて、現在の立場にこれをふりかえてみると、1950年代の論文にあらわれてゐるまゝでは、Formulationの点で、大分改良の余地があると考へられる。そのことを、以下で述べたい。したがって、この論文の内容は、必ずしも獨創的研究といへる程のものでもなく、さりとして、既知の理論とも言へたゝようである。本来、発表の場所に甚しむ性格のものと思ふが、この紙面のような良き発表機会を与えて頂くと、深く感謝する。

(読者の御便宜を考へて、ごく基本的なもののみには、証明をつけおく。しかし、本来すべて、さわめて容易な性格のものである)

§2. 基本定理.

G と与へられた有限群、その位数を n 、標数が n とゆるむ universal domain を一つ固定して Ω と表わす。

Ω 内の素体を P 、 Ω 上の G の既約表現を各指標 (既約) ρ としてとつて定めおき、 D_ρ と表わす、 ρ は指標を表わし、 G の Ω 上の既約指標の集合を Λ と表わしておき、表現 D_ρ によつて $g \in G$ に対応させられる行列を $D_\rho(g)$ と表わす。

λ , その行列の次数を d_λ とする. $D_\lambda \otimes D_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) はまた D_ν ($\nu \in \Lambda$) のいくつかの直和と同値だが, $d_\lambda d_\mu$ 次の正則行列 $M_{\lambda, \mu}$ を定めて, $M_{\lambda, \mu}^{-1} \cdot D_\lambda \otimes D_\mu \cdot M_{\lambda, \mu} = M_{\nu_1(\lambda, \mu)} \oplus \dots \oplus M_{\nu_r(\lambda, \mu)}$ とするようにしておく. $D_\lambda(g)$ ($\lambda \in \Lambda, g \in G$) の成分全体, および $M_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) の成分の全体を \mathcal{P} に追加した体を \mathcal{K}_0 と表わす.

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0(x_i \mid i=1, \dots, n) \in \mathcal{K}_0$ 上の n 次元純粋超越拡大体 ($\mathcal{K} \supset \Omega$) とし, G の元は順次 x_i を作用 $x_i^{g_i} = x_i$ ($g_i g_j = g_e$) とさだめる. G は \mathcal{K}_0 の元には trivial に作用するものと定めれば, G は \mathcal{K} の自己同型群の一つである. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, \mathcal{K} 上の d_λ 次の正方行列 $Y_\lambda \in$

$$Y_\lambda = \sum_{i=1}^n D(g_i^{-1}) x_i$$

を定める. Y_λ がいわゆる factor base を与える.

Lemma 1. Y_λ は正則行列である.

証明は「く通り」も考えられようが, 他の Galois algebra の理論との関連から考えると, 次のようなものが便利である. \mathcal{K}_0 上抽象拡大体 (Ω にいくつかの「拡大」) $\mathcal{K}' \in \mathcal{K}'/\mathcal{K}_0 \simeq \mathcal{K}/\mathcal{K}_0$

となるように作り, $A = R \otimes_k R'$ を作れば, A は変域が G で値域が R 内にある一変数関数全体が普通の肉数として成す環と同型になる. (すなわち, R と同型な体の n 個の直和) $\det |Y_n|$ はこの環のなかで考へると, 丁度, 各 $g \in G$ において値が $\det |D(g)|$ になる肉数と一致する. したがって Y_n はとらえた regular である, b. e. d.

明らかに

$$\text{Lemma 2. } Y_n^g = D_n(g) Y_n.$$

次の定理が基本的である

定理 1. 各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $d_\lambda d_\mu$ 次の正方形行列 $C_{\lambda, \mu}$ を

$$C_{\lambda, \mu} = (Y_\lambda \otimes Y_\mu) \cdot M_{\lambda, \mu} (Y_{\nu_r(\lambda, \mu)}^{-1})^{\oplus \dots} \oplus Y_{\nu_r(\lambda, \mu)} M_{\lambda, \mu}$$

として作るものとする. しかれば $C_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) のすべての成分を \bar{K} に添加した体を \bar{K} とすれば, \bar{K} は R 内の G について不変にたもたれた元全体の成す体と一致する.

証明. $\bar{K} \subseteq L$ となることは Lemma 2 から容易に従う. $\bar{K} = L$ となることの証明は, 次のように行くと容易である. $C_{\lambda, \mu}$ がいわゆる Hase の定めた Galois algebra の因子環なので, 是のことから $\bar{K}[y_n^{(i,j)} \mid \lambda \in \Lambda, i, j = 1, \dots, d_\lambda]$ なる環が \bar{K} 全体と一致することがわかる. したがって

$[\mathbb{R} : \overline{\mathbb{R}}] \leq n$ がえられ, 一方 $[\mathbb{R} : \mathbb{L}] = n$, から $\mathbb{L} = \overline{\mathbb{R}}$ であるから $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{L}$ が従う.

注意, $\lambda, \mu \in \Lambda$ について, $\nu_1(\lambda, \mu), \nu_2(\lambda, \mu) \dots \in \Lambda$ はすべて表現 \mathcal{D}_λ と \mathcal{D}_μ の直積 $M_{\lambda, \mu}$ で分解するときさまつてくる Λ の元である. しかし ν_1 がその個数である ν と λ, μ がさまつてくるから $\nu_1(\lambda, \mu), \dots, \nu_{r(\lambda, \mu)}(\lambda, \mu) \in \Lambda$ とかくべきだが, 簡単のため $\nu_r(\lambda, \mu)$ で最後の項を表わした.

§3. 一般の Galois 拡大における Kummer 体のアタロジ一般に考えて, n 次巡回拡大について $\Omega^n \cap \overline{\mathbb{R}}$ にあたるものが, 行列集合として表われ Ω^n を示す. したがって, $\Omega^n = \{\alpha^n \mid \alpha \in \Omega\}$ を表わす.

各 $\lambda \in \Lambda$ に対応して d_λ 次の Ω 係数の正方行列の全体を, \mathcal{M}_λ で表わす. 正則行列全体のときは, \mathcal{M}_λ^* と表わすことにする. 集合としての \mathcal{M}_λ^* ($\lambda \in \Lambda$) の直積を \mathcal{M}^* と表わし \mathcal{M}^* の元 \mathcal{P} と \mathcal{P}' を p, p', \dots で表わそう. 各 (λ, μ) ($\lambda, \mu \in \Lambda$) 全体に $d_\lambda d_\mu$ 次の正方行列 (Ω 上) の全体を対応させて $\mathcal{M}_{\lambda, \mu}$ と表わし, $\mathcal{M}_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) の集合としての直積を \mathcal{M} と表わす. \mathcal{M} から Ω への有理写像 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ ($\mathcal{P}(\mathcal{P}') = \mathcal{P} \in \mathcal{M}$) とは \mathcal{P} の (λ, μ) -成分 $C_{\lambda, \mu}$ が \mathcal{P}' の λ 成分, μ 成分 M_λ, M_μ であり他の \mathcal{P} の成分は

572

$C_{\lambda, \mu} = (M_{\lambda} \otimes M_{\mu})^{-1} M_{\lambda, \mu} (M_{\nu_1(\lambda, \mu)}^{-1} \oplus \dots \oplus M_{\nu_r(\lambda, \mu)}^{-1}) M_{\lambda, \mu}^{-1}$
となることを示すとして、 $P \in \mathcal{M}$ 定義する。 しかるに

定理2. $P, P' \in \mathcal{M}$ について $P(P) = P(P')$ ならば、 P, P' は G の部分群と同型なある Galois 群について共通である。(Galois 群とは Ω 内のある F/F' について同様の Galois 拡大 F/F' の Galois 群をいう)

証明は、存在群についての途中の双対定理を用いなければならない。

$M_{\lambda} M_{\lambda}^{-1} = \mathcal{D}_{\lambda}(g)$ ($\lambda \in \Lambda$) となる $g \in G$ が存在するとして、途中の双対定理から従う、s.e.d.

定理3. $P \in \mathcal{M}$ について $P(P) = g$ の成分行列の左成分(行列の成分)を K_0 に追加した体を $K_0(g) = K_0(P(P))$ と表わす。 しかるに

$K_0(P) / K_0(P(P))$ は Galois 拡大で、その Galois 群は G の部分群と同型である。 $P \in \mathcal{M}$ であるとき、 Ω 内における Galois 拡大 F/F' が K_0 の形の F/F' の Galois 群が G と同型になるような場合は、すべて $K_0(P) / K_0(P(P))$ の形に書くことができる。(Galois 群が G の真部分群となるような $P \in \mathcal{M}^*$ は \mathcal{M}^* のおなじみの部分群となる)

注. 定理2の末尾にカッコ書きした F, F' は $F = K_0(P)$ $F' = K_0(P(P))$ とおけばよいのである。

P による \mathcal{M}^* の像として定まる \mathcal{N} の命令集合, $P(\mathcal{M}^*)$ が,
Galois algebra の Hasse の意味の因子団 ($G = \mathcal{M}$ の)
全体と一致する.

(Hasse の後, 中山 さんに従って, Galois algebra の定義は
commutative, や semisimple や その他 Hasse がつけて
おいたいくつかの条件をとりのおくふう) になった.
(実際, その方が便利になることが多い). さきで, 本来 Hasse
の定義の意味の Galois algebra に附着する因子団を,
Hasse の因子団とよぶことがある. この論文の標題も, その
意味であって, 正確を期せば Galois algebra を Hasse の
本来の意味にとったときの, Galois algebra に附着する因
子団のこととしようべきである. Hasse の因子団とすると,
誤解をまねくこともありそうだが, 便宜上, やむおえなかった)

以上