数理解析研究所講究録
第 41 巻 1968 年 46-55

Symplectic 表現と保型関数*)

東大　理　弥永　健一

§1　序

Hermitian vector space から alternating vector space へのある自然な対応づけがあり，それを使って (I)-型の有界対称領域上の保型関数と，Siegel space 上のそれとの間のある関係を得ることができる。

今 k を総実代数体，$K = k(\sqrt{\alpha})$ を総虚な k の二次拡大体とし，σ を K/k 上の Galois 群の生成元，V を K 上のベクトル空間，H を V 上の non-degenerate，indefinite な Hermite 形式とする。(i.e. H は $H(x,y) = H(y,x)^\sigma$ なる sesqui-linear form on V で条件を充すもの。)

外積 Λ^r は Hermitian vector space (V, H) から $(\Lambda^r V, \Lambda^r H)$ という Hermitian vector space への対応を与える。ただし，

$$\Lambda^r H(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r,\ y_1 \wedge \cdots \wedge y_r) = \det(H(x_i, y_j)),$$
$$x_i,\ y_j \in V.$$

*) 本文の内容は，引用論文 [1] の一部に若干手を加えたものである。

今 (V, H) から alternating vector space (V', A') への次のような対応づけ $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{K/k}$ を定める：

1) V' は K 上 vector space V を k 上 vector space とみなしたもの。

2) $A'(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(H(x,y) - H(y,x))$, $x, y \in V$.

（A' の α への depend の仕方は，今は本質的でない。）

さて，ここで functor $\mathcal{R} \circ \Lambda^r$ を考えると，これは

$$\rho : SU(V, H) \longrightarrow Sp(V', A'), \qquad (V' = \Lambda^r V)$$

なる symplectic 表現 ρ を定める。（$\rho = \mathcal{R} \circ \Lambda^r$ と書く。）

$\mathfrak{D}$ を (I)-型の domain $(\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}(G))_{\mathbb{R}}/\mathcal{K}$，$\mathfrak{D}'$ を Siegel space $(\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}\, G')_{\mathbb{R}}/\mathcal{K}'$ とすると ρ は $\mathfrak{D}$ から $\mathfrak{D}'$ への holomorphic imbedding を induce する。（ただし，$G = SU(V, H)$，$G' = Sp(V', A')$，$\mathcal{K}$ は Lie 群 $(\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}(G))_{\mathbb{R}}$ の maximal compact 部分群，$\mathcal{K}'$ は $\rho(\mathcal{K})$ を含むような $(\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}(G'))_{\mathbb{R}}$ の maximal compact 部分群である。今 $(\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}(G))_{\mathbb{R}} \cong \prod_{i=1}^{d} SU(p_i, q_i)$，それに応じて $\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}(G') \cong \prod_{i=1}^{d} G'_i$ とかけるが，上の $\rho = \mathcal{R} \circ \Lambda^r$ で，$r = 1$ if $\min(p_i, q_i) > 1$ for an i とする。）（cf. 佐武 [2]）.

ここで，L を，K の整数環 $\mathcal{O}_K$ 上の V の中の lattice とし，$L' = \mathcal{R} \circ \Lambda^r(L)$ を，V' と $\Lambda^r V$ の identification によって V' の中の，k の整数環 $\mathcal{O}_k$ 上への lattice とする。

今 $G_L = \{g \in G \mid gL = L\}$，$G'_{L'}$ も同様に定義すると，上の表

現ρによってG_Lは$G'_{L'}$の中にうつされる。従って$\mathcal{D}'$上の$G'_{L'}$に関する保型関係を$\rho(\mathcal{D})$に制限すれば、$\mathcal{D}$上のG_Lに関する保型関数が得られるが、このようにして得られるものは後者の体$F(\mathcal{D}, G_L)$の中の部分体F'をなす。この二つの体の間の関係を求めることが目的である。

例。$k=\mathbb{Q}$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\rho=\mathcal{R}$ とおく。

$G_{\mathbb{R}} = SU(p,q)$, $G'_{\mathbb{R}} = Sp(n,\mathbb{R})$ $(n=p+q)$ だが、K, K'を普通のようにとれば、$\mathcal{D}=\{X\in M_{p,q}(\mathbb{C}) \mid I-{}^t\bar{X}X \gg 0\}$, $\mathcal{D}'=\{Z\in M(n,\mathbb{C}) \mid {}^tZ=Z,\ 1-\bar{Z}Z\gg 0\}$ と表わせる。このとき、

$$\rho : \mathcal{D}\ni X \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & X \\ \hline {}^tX & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}p \\ \}q \end{array} \end{array} \in \mathcal{D}',$$

となり、後に述べるように、もしもnが奇数ならば、上の二つの体は一致する。即ちこのとき$\mathcal{D}$上のG_Lに関する保型関数は、いつもimbedding ρによって、$\mathcal{D}'$上の$G'_{L'}$に関する保型関数に延長できるのである。

§2. 一般の$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$について。

問題を解くための鍵となるいくつかの一般的命題がある。

Prop. 1. kを有限次代数体、V, Wをk上の有限次ベクト

ル空間, L, M はそれぞれ V, W の $\mathcal{O}_k$-lattice とする。G を $GL(V)_{\mathbb{C}}$ の k-上定義された algebraic subgroup, ρ を $G \to GL(W)_{\mathbb{C}}$ への k-上定義された rational homo. とし, 次の三つの仮定をする:

i) G_L は G_k の maximal arithmetic subgroup.

ii) $\rho(G_L) \subset GL(W)_M$

iii) $\mathrm{Ker}\,\rho \subset G_L$.

このとき, $\rho(G_L) = \rho(G)_M$ が成り立つ。[1].

証明は $\rho(G_L)$ が $\rho(G)_k$ の arithmetic subgroup であることを使えば容易である。特に §1 のような $G = SU(V, H)$ の場合には, $\Lambda^r(G_L) = \Lambda^r G_k \cap \Lambda^r SL(V)_L$ 及び $SL(V)_L$ の極大性に注意すれば上の命題によって $\Lambda^r(G_L) = (\Lambda^r G)_{\Lambda^r L}$ が成り立つ。

Prop. 2. G, G' を real algebraic groups, $\rho : G \to G'$ を rational homo., G, G' はリー群として半単純で, K, K' をそれぞれ G, G' の maximal compact subgroup とし, $\rho(K) \subset K'$, 従って, $\rho : \mathcal{D} = G/K \to \mathcal{D}' = G'/K'$ が考えられる。さて, 今 G を連結, compact factor を持たないものとすると次のことが成り立つ。

もしも，G'の元g'が，

$$g'(\rho(z)) = \rho(z), \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

を充せば，実は

$$g' \cdot \rho(g) = \rho(g) \cdot g', \quad \forall g \in G \text{。}$$

証明は省略するが，compact リー群の半単純部分群は再び compact になるということを使えば容易である。

定義： Prop. 2 の状況の時，（ただし，Gの連結性，non-compact factor は仮定しない。）次の定義をする．

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\rho(\mathcal{D})) = \{ g' \in G' \mid g'\rho(z) = \rho(z),\ \forall z \in \mathcal{D} \},$$
$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\rho(\mathcal{D})) = \{ g' \in G' \mid g'(\rho(\mathcal{D})) = \rho(\mathcal{D}) \} \text{。}$$

定理（I. Satake） kを有限次代数体，Gをk上定義された連結，絶対単純代数群，ΓをG_kの arithmetic subgroup とし，Kを$(\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}G)_{\mathbb{R}}$の極大 compact 部分群で，$\mathcal{D} = (\mathcal{R}_{k/\mathbb{Q}}G)_{\mathbb{R}}/K$は有界対称領域の構造を持つと仮定する。$G'$，$\Gamma'$，$K'$ etc. を同上とし，$\rho : G \to G'$ をk上定義された rational homo. で，$\rho(\Gamma) \subset \Gamma'$，しかも $\rho : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ なる holom. imbedding を induce しているものとする。

今 F = the field of autom. func. on $\mathcal{D}$ w.r.t. Γ,

F' = the subfield of F consisting of those elements which can be extended to autom. func. on D' w.r.t. Γ'.
とすると，もしも $\dim G > 3$ のときには，F は F' の有限次拡大体であり，

$$[F : F'] = [\Gamma' \cap \mathfrak{N} : \rho(\Gamma)\cdot(\Gamma' \cap \mathfrak{z})],$$

しかも，もし $\Gamma' \cap \mathfrak{N} \triangleright \rho(\Gamma)\cdot(\Gamma'\cap \mathfrak{z})$ ならば，F/F' はガロア拡大，そのガロア群は $\Gamma' \cap \mathfrak{N}/\rho(\Gamma)\cdot(\Gamma' \cap \mathfrak{z})$ と同型になる。[3].

§3. 結果.

Notations は §1 と同様。ただし，$n = \dim V \geqq 3$ とし，$(R_{k/\mathbb{Q}}\, G)_{\mathbb{R}}$ は compact factor を含まないものとする。

今 $\mathcal{D}$ の holom. automorphisms の作るリー群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ をとると，$[\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) : \mathrm{Aut}(\mathcal{D})^0] \leqq 2$ が知られているが，
$\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{N} \cap \mathrm{Aut}(\mathcal{D})^0$ と書くことにする．（§1，例において，$p \neq q$ ならば $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D} = \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}^0$ である。）

$K^{\sigma_1}, \cdots, K^{\sigma_d}$ を K の共役体，$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ とすると，次の結果が得られる．

定理．$\mathfrak{N}^0_{L'} = \mathfrak{N}^0 \cap G'_{L'}$ によって一意的に定まる，$K^{\sigma_i}(\zeta_n)$ の Kummer 拡大体 K'_i があって，$(i = 1, \cdots, d)$ 次のような

exact sequence が得られる：

$$1 \longrightarrow \rho(G_L)\cdot \mathfrak{Z}_{L'} \longrightarrow \mathfrak{N}^0_{L'} \longrightarrow \prod_{i=1}^{d} H^1(\mathfrak{g}(K'_i/K^{\sigma_i}), (\zeta_n)).$$

ただし $\mathfrak{g}(K'_i/K^{\sigma_i})$ は K'_i/K^{σ_i} のガロア群で，ζ_n の生成する群 (ζ_n) に自然に作用している。

もしも $k = \mathbb{Q}$，$(r, n) = 1$ のときには，更に

$$1 \longrightarrow \rho(G_L)\cdot \mathfrak{Z}_{L'} \longrightarrow \mathfrak{N}^0_{L'} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, (\zeta_m))$$

という exact sequence が得られる。ここで，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(K(\zeta_{\varepsilon\binom{n}{r}})/K), \quad \varepsilon = K \text{ の単数の数},$$

$$(\zeta_m) = (\zeta_n) \cap K(\zeta_{\varepsilon\binom{n}{r}})。$$

ここで，更に，$(n, \varepsilon) = 1$，K の discriminant が -4 または $-p$（p は奇素数）のときには，$\mathfrak{N}_{L'} = \mathfrak{N}^0_{L'}$，

$$H^1(\mathfrak{g}, (\zeta_m)) = \{1\}$$

が成り立つ。[1]．

系．もしも $\mathfrak{N}^0_{L'} = \mathfrak{N}_{L'}$ ならば，§2 で定義された体 F は部分体 F' の有限次アーベル拡大であり，そのガロア群は $\prod_{i=1}^{d} H^1(\mathfrak{g}(K'_i/K^{\sigma_i}), (\zeta_n))$ の部分群に同型である。

特に $k = \mathbb{Q}$，K の discriminant が -4 または $-p$ で，かつ $(n, \varepsilon) = (r, n) = 1$ のときには $F = F'$．

K'_i をどう定めるかについて説明しよう。簡単のために，$\alpha = 1$，即ち $k = \mathbb{Q}$ とする。今，commutative diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tilde{\rho}=\Lambda^r"] \arrow[dr, "\rho"'] & \tilde{G} = U(\Lambda^r V, \Lambda^r H) \arrow[d, "\rho' = \pi"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

を考える。§2, Prop. 2 より

$$\mathfrak{z} = \{\rho'(\alpha 1) \mid \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1\}.$$

今，$\mathcal{H}^0 = \mathfrak{z}\cdot\rho(G_{\mathbb{R}}) = \{\rho'(\alpha\tilde{\rho}(g)) \mid g \in G_{\mathbb{R}}\}$

となる。V の K 上の basis を一つきめたときに $g \in GL(V) = GL(n, K)$ として $g = (g_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ とあらわし，K' として，

$$K' = K(\zeta_n,\ g_{ij}\ \text{s.t.}\ {}^{\exists}\alpha \in \mathbb{C},\ \rho'(\alpha\tilde{\rho}(g)) \in \mathcal{H}^0_{L'})$$

とすると，K' が $K(\zeta_n)$ の Kummer 拡大になることを証明することができる。[1].

（注意）上に引用した [1] の Theorem 2.10 の中の‘条件 C’は，§2, Prop. 2 によって不要となる。

§4. $H^1(\mathfrak{g}, (\zeta_n))$ について。

上のように，$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$，(ζ_n) は ζ_n によって生成される群とする。さらに K をかってな代数体とするとき，$K^{(n)} = K(\zeta_n)$ と書き，$\mathfrak{g}(K'/K)$ をガロア拡大 K'/K のガ

ロア群とする。$d(K)$ = *discriminant of* K, U_K^1 = *the roots of* 1 *in* K とする。このとき，Kを二次体とすると，

$$\mathbb{Q}^{(n)} \supset K \iff d(K) \mid n.$$

を使うと，もしも $d(K) = -4$ *or* $-p$ ならば，

$$U'_{K^{(n)}} = U'_K \cdot U'_{\mathbb{Q}^{(n)}}$$

が成り立つ。問題のコホモロジー群の決定のために，これが重要なポイントになる。Kを $d(K) = -4$ *or* $-p$ のような虚二次体とし，$\varepsilon = K$ の単数の数とするときに次のことが成り立つ。[1]

Prop. Aを1の根から成る有限群で，その上に $g(K^{(n)}/K)$ が作用しているものとする。もしも，$(|A|, \varepsilon) = 1$ なら

$$H^1(g(K^{(n)}/K), A) = \{1\}.$$

（注意）上で，$(|A|, \varepsilon)$ が1でないときにはコホモロジー群は一般に *trivial* ではない。しかもその構造は，Kの単数の群と密接な関係を持っている。また，$d(K)$ が一般のときには，上記のような $U^1_{K^{(n)}}$ の分解は得られないので問題はより困難になる。

References

1. K. Iyanaga, Arithmetic of special unitary groups and their symplectic representations, dissertation for Ph. D. in the University of Chicago, 1967

2. I. Satake, Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space, Amer. J. Math., 87(1964), 425-461.

3. ———, Introduction to automorphic forms, mimeographed notes of the lectures at University of Chicago, 1967.