数理解析研究所講究録
第 41 巻 1968 年 56-63

格子の類数について

東大 教養　　田坂 隆士

§1. 定義及び説明.

k: 代数体

G: k 上定義された連結半単純代数群.

$$(1) \qquad G_A = \prod_v (G_v, G_{\mathfrak{O}_v}) \supset G_k$$

G の k 上のアデール群 G_A は上記のような制限直積である。又 G_k は自然に G_A に埋め込んであるとする。ここで $G_{k_v} = G_v$ と書いた。

$$(2) \qquad A_k(G) = G_A / G_k \cdot G_A' \;, \qquad B_k(G) = G_A / \overline{G_k \cdot G_A'} \;.$$

で二つの可換群を定義する。G_A' は G_A の（抽象的）交換子部分群であり，バーは G_A の中での閉包を表わす。$A_k(G)$ は抽象群であり，$B_k(G)$ は自然な位相で局所コンパクト位相可換群となる。ここで $G_k \cdot G_A'$ が G_A の中で閉じて居るときは，

$A_k(G)$ と $B_k(G)$ を同一視する。$\mathbb{T}$ をノルムが1の複素数が作る群として,

(3) $X(G_A)=\{$ G_A から $\mathbb{T}$ への連続準同型で G_k の上で trivial なもの全体$\}$.

とする。即ち $X(G_A)$ は $B_k(G)$ のポントラヤーギンの意味での双対である。

G を線形とする, 即ち $G\subset GL(V)$. ここで V は k 上定義されたベクトル空間, 又自然な単射は k 上定義されて居るものとする。V の部分加群 L が $\mathfrak{O}(k)$-格子であるとは

i) L は有限生成な $\mathfrak{O}(k)$-モジュールである.

ii) $L\otimes_{\mathfrak{O}} k=V$

を充すことである。ここで $\mathfrak{O}(k)$ は k の整数環を表わす。

k の任意の有限素点 $\mathfrak{z}$ に対して, $L_{\mathfrak{z}}=L\otimes_{\mathfrak{O}}\mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}\subset V_{\mathfrak{z}}$ は $V_{\mathfrak{z}}$ の中の $\mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}$-格子である。ここで

(4) $G_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{z}}}=\{x\in G_{\mathfrak{z}} : xL_{\mathfrak{z}}=L_{\mathfrak{z}}\}$

は $G_{\mathfrak{z}}$ の開部分群で, かつコンパクトである。k の無限素点 λ に対して, $G_{\mathfrak{O}_\lambda}=(G_\lambda)^\circ$ と置く。$(G_\lambda)^\circ$ は G_λ の普通の意味での連結成分を表わす.

S を k の素点の有限集合とし,

(5) $\quad G_S = \prod_{v\in S} G_v, \quad \subset G_A$

(6) $\quad G_{A(S,L)} = G_S \times \prod_{v\notin S} G_{\mathfrak{O}_v} \subset G_A$

と置く、G_S は G_A の閉じた正規部分群であり，$G_{A(S,L)}$ は G_A の開部分群である．

強近似定理（M. Kneser）

$\tilde{G}$：単連結半単純群

$\tilde{G}_S$：コンパクトでない．

$$\Rightarrow \quad \overline{\tilde{G}_k \cdot \tilde{G}_S} = \tilde{G}_A.$$

従がって $\tilde{G}_k \cdot \tilde{G}_{A(S)} = \hat{G}_A$.

この定理は E_8 のある型を除いて証明されて居る。

普通の半単純群 G の場合には．．

系

(7) $\quad G_k \backslash G_A / G_{A(S,L)} \approx G_A / G_k \cdot G_{A(S,L)}$.

上の式の右辺はアーベル群である。

証明はやはり Kneser の論文を参照されたい。

(8) $\quad h(S,L) = \#\left(G_k \backslash G_A / G_{A(S,L)} \right)$

を格子 L の S に関する類数と云ふ。$h(S,L) < \infty$ は A. Borel

の[1]に証明されて居る。$X(G_A)$の元χに対して導手$f(\chi)$を次のように定める。

$$f(\chi) \supset f(S.L) \underset{def}{\Longleftrightarrow} \chi|_{G_{A(S.L)}} : \text{trivial}$$

即ち，$f(\chi)$自体は定義されて居ない。$f(\chi)$自体を定義するにはもっと色々な表現を考えなければならないが，今の所よく判らない。

こうすると，有限アーベル群は自己双対であるから，

$$(9) \qquad h(S.L) = \#\{\chi \in X(G_A) : f(\chi) \supset f(S.L)\}$$

となる，

ある種の criterion :

$$G_A = \prod_v (G_v, G_{\mathfrak{O}_v})$$

$$G_A' = \prod_v (G_v', G_{\mathfrak{O}_v}')$$

である。

A) ほとんどすべてのvに対して，$G_{\mathfrak{O}_v}' = G_v' \cap G_{\mathfrak{O}_v}$.

B) $G_{\mathfrak{O}_v}' \ni x$の長さ$l_v(x)$を，$x$を表わす交換子の個数の最小のものとしたとき，$l_v(x) < M$となるMがあたえる，但しMはGとkにしか関係しない数。

もしA), B)が成立するならば

$$(10)\qquad G_A/G_A' = \prod_v (G_v/G_v',\ G_{\mathfrak{o}_v} G_v'/G_v')$$

特くに，すべてのvに対し，G_v'がG_vの中で閉じて居るならば，G_A'はG_Aの中で閉じて居る。

§2. quasi-split group の場合

k上の代数群Gがquasi-splitであるとは，k上定義されたGのBorel部分群Bが存在することである。AをGの極大k-trivial torusとすると，$T = Z(A)$はGのk上定義された極大torusである。G_kの内部自己同型により，$B = TU$として良い。但しUはGのあるunipotent部分群である。

Gのk上定義された普遍被覆群を$\tilde{G}$とする。

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{f} G \longrightarrow 1$$

なる代数群のexact列を得る。$\tilde{T}$をTに対応する$\tilde{G}$の極大torusとする。又$T_k' = f(\tilde{T}_k)$と書くと

$$(11)\qquad G_k/G_k' \cong T_k/T_k'$$

$$(12)\qquad G_A/G_A' \cong T_A/T_A'$$

を得る。但し$T_A' = f(\tilde{T}_A)$．T_A'はTAの中で閉じて居るこ

と，及び G_A' が G_A の中で閉じて居ることが判るから，同型（12）は位相群の同型になることが判る．

<u>定理</u>

G が k 上 quasi-split ならば，$A_k(G)=G_A/G_k\cdot G_A'$ は totally disconnected かつコンパクトなアーベル群である。証明は筆者の論文を参照されたい。

以下簡単のため（実際は split でないとうまく行かないのだけれど），G は k 上 split と仮定する。即ち G は，k-trivial な極大 torus T が存在する。このとき $\tilde{T}$ から T への isogeny により $X(T)$ から $X(\tilde{T})$ への単射が誘導される．ここでは $X(T)$ は $X(\tilde{T})$ の部分加群であると考える。但し，$X(T)$ は T の character モジュールである．$X(\tilde{T})$ は G の weight で張られるモジュールになって居る。さて $X(T)$ の $X(\tilde{T})$ に関する単因子を $(e_1,\cdots,e_l)$ とすると，

$$(13)\qquad T_k/T_k' \cong \prod_{i=1}^{l} k^*/(k^*)^{e_i}$$

となる。次に G_k の Bruhat 分解を使うと，

$$(14)\qquad G_k\backslash G_A/G_A' \cong T_k\backslash G_A/G_A'$$

$$\cong T_k \backslash T_A / T_A^1 \cong T_A / T_k \cdot T_A^1$$

$$\cong \prod_{i=1}^{l} J_k / k^* \cdot (J_k)^{e_i} \cong \prod_{i=1}^{l} C_k / (C_k)^{e_i}.$$

となる。即ち

$$(15) \qquad A_k(G) \cong \prod_{i=1}^{l} C_k / (C_k)^{e_i},$$

を得た。但し J_k は k のイデール群，C_k は k のイデール類群。

V_k の中の $\mathfrak{O}(k)$-格子 L が special であるとは，L の生成系として weight ベクトルが取れることである。このとき，すべての有限素点 $\mathfrak{p}$ に関し，$T_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}} = T_\mathfrak{p} \cap G_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}}$ は極大コンパクト部分群である。即ち $T_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{u} \times \cdots \times \mathfrak{u}$．($\mathfrak{u}$ は $k_\mathfrak{p}^*$ の単数群である)

$\chi \in X(G_A)$ に対し

$$f(\chi) \supset f(S, L) \iff \begin{cases} \chi|_{T_{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}}} = 1, & \forall \mathfrak{p} \notin S \\ \chi|_{T_v} = 1 & \forall v \in S. \end{cases}$$

であることは容易に判る。今

$$h_n(S) = \# \left\{ \chi \in \hat{C}_k \ : \ \begin{array}{lll} \text{(i)} & \chi^n = 1 & \\ \text{(ii)} & \chi|_{\mathfrak{u}_\mathfrak{p}} = 1 & \forall \mathfrak{p} \notin S \\ \text{(iii)} & \chi|_{k_v^*} = 1 & \forall v \in S \end{array} \right\}$$

$$= [k_n \cap M(S), k]$$

は類体論より容易に判る。但し k_n は k の d 次 $(d|n)$ 巡回拡大全体の合併であり，$M(S)$ は，S に含まれる素点は完全分解するような極大不分岐アーベル拡大（k の）である。故に special な格子 L の S に関する類数 $h(S,L)$ に関し次の公式を得る。

$$(16) \qquad h(S,L) = \prod_{i=1}^{\ell} h_{e_i}(S) = \prod_{i=1}^{\ell} [k_{e_i} \cap M(S) : k]$$

———————— ∘ ————

Reference.

[1] A. Borel : some finite property of adele groups. Publ. Math. IHES.

[2] M. Kneser : Strong approximation. Lecture notes of Summer Institute at Boulder, Colorado.

[3] T. Tasaka : Sur les groupes algébriques déployés. (to appear in J. of Math. Soc. of Japan).

[4] T. Tasaka : On the quasi-split simple groups defined over a algebraic number field. (To appear)