数理解析研究所講究録
第 43 巻 1968 年 13-22

Duhamelの原理及び多重散乱過程への応用

舞鶴高専　松本雅道

§1. 輸達方程式

非均質な等方散乱をする平板状の無線源大気中における単色輻射の輸達を考える。光学的深さτにおいて平板の上向き法線と$\cos^{-1}\mu$なる角度をなす方向の輻射強度は輸達方程式

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau,\mu) = I(\tau,\mu) - \lambda(\tau) J(\tau) \qquad (1)$$

をみたす。ここで$J(\tau)$は線源関数

$$J(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)\,d\mu \qquad (2)$$

であり$\lambda(\tau)$は体積散乱係数の体積吸収係数に対する比で

$$0 \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_1 \leq 1 \qquad (3)$$

をみたす。もし大気の厚さが半無限であれば$\lambda_1 < 1$とする。大気の上表面$(\tau=\tau_0)$に向かう輻射強度を$I(\tau,+\mu)$ $(0<\mu\leq)$，下表面$(\tau=\tau_1)$に向かうそれを$I(\tau,-\mu)$ $(0<\mu\leq 1)$で表わす。

今大気の上表面に強度$I_{inc}(\mu)$，下表面に$I^{*}_{inc}(\mu)$の輻射が入射するとτにおける強度は（1）式を境界条件

$$I(\tau_0,-\mu)=I_{inc}(\mu)\ ,\quad I(\tau_1,+\mu)=I^{*}_{inc}(\mu) \qquad (4)$$

のもとで解いて得られる。$J(\tau)$を既知とすると（1）の解は

$$I(\tau,+\mu)=I^{*}_{inc}(\mu)e^{-(\tau_1-\tau)/\mu}+\int_{\tau}^{\tau_1}\lambda(t)J(t)e^{-(t-\tau)/\mu}\frac{dt}{\mu}, \qquad (5)$$

$$I(\tau,-\mu)=I_{inc}(\mu)e^{-(\tau-\tau_0)/\mu}+\int_{\tau_0}^{\tau}\lambda(t)J(t)e^{-(\tau-t)/\mu}\frac{dt}{\mu}, \qquad (6)$$

となる。(5),(6)を（2）に用いるとMilneの方程式

$$(1-L)_\tau\{J(t)\}=B(\tau) \qquad (7)$$

を得る。ここで演算子L_τ及び$B(\tau)$はそれぞれ

$$L_\tau\{f(t)\}=\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\lambda(t)f(t)E_1(|t-\tau|)dt, \qquad (8)$$

$$B(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^1 I_{inc}(\mu)e^{-(\tau-\tau_0)/\mu}d\mu+\frac{1}{2}\int_0^1 I^{*}_{inc}(\mu)e^{-(\tau_1-\tau)/\mu}d\mu, \qquad (9)$$

であって$E_n(\tau)$ $(n=1,2,3\ldots.)$はn次積分指数関数

$$E_n(\tau)=\int_1^{\infty}t^{-n}e^{-t\tau}dt \qquad (10)$$

で（7）式左辺の1は恒等演算子である。

積分方程式（7）が唯一の解を有することは以下の様に示される。(8)から演算子L_τを定数1に作用させると

$$0\le L_\tau\{1\}\le(\lambda_1/2)[2-E_2(\tau-\tau_0)-E_2(\tau_1-\tau)]$$

であり$E_2(\tau)$の性質から$\rho=[2-2E_2\{(\tau_1-\tau_0)/2\}]/2$とおくと

$$0 \leq L_\tau\{1\} \leq \rho < 1 \qquad (\tau_1 \text{有限}),$$

$$0 \leq L_\tau\{1\} \leq \lambda_1 < 1 \qquad (\tau_1 = \infty),$$

となって方程式(7)のNeumann級数による解は$B(\tau)$が非負有界ならば一様に收束する。解の一意性は(7)で$B(\tau)=0$と置くと解が殆んど至る所零になることから知られる。

§2. Duhamelの原理

大氣の上表面に定方向μ_0から單位强度の平行光線が入射し下表面からの入射が無い場合の輻射場を$I_0(\tau,\mu;\mu_0)$,上表面と下表面との役割りを交換したときのそれを$I_1(\tau,\mu;\mu_0)$と書くと境界条件はそれぞれ

$$I_0(\tau_0,-\mu;\mu_0)=\delta(\mu-\mu_0),\quad I_0(\tau_1,+\mu;\mu_0)=0, \qquad (11)$$

$$I_1(\tau_1,+\mu;\mu_0)=\delta(\mu-\mu_0),\quad I_1(\tau_0,-\mu;\mu_0)=0 \qquad (12)$$

で与えられる。ここにδはDirac δ関数である。これらの輻射場の線源関数を$J_0(\tau,\mu_0)$, $J_1(\tau,\mu_0)$とすると(11),(12)を(9)に用いて

$$(1-L)_\tau\{J_0(t,\mu_0)\}=\frac{1}{2}e^{-(\tau-\tau_0)/\mu_0}, \qquad (13)$$

$$(1-L)_\tau\{J_1(t,\mu_0)\}=\frac{1}{2}e^{-(\tau_1-\tau)/\mu_0}, \qquad (14)$$

が得られる。(13)に$I_{inc}(\mu_0)$,(14)に$I^*_{inc}(\mu_0)$を乗じてμ_0について(0, 1)で積分して得られる方程式と(7)とを比較す

るとこれらは何れも唯一の解を有することから直ちに

$$J(\tau)=\int_0^1 J_0(\tau,\mu')I_{inc}(\mu')d\mu'+\int_0^1 J_1(\tau,\mu')I_{inc}^{*}(\mu')d\mu', \quad (15)$$

を得る。(15)を(5),(6)に用いることにより

$$I(\tau,\mu)=\int_0^1 I_0(\tau,\mu;\mu')I_{inc}(\mu')d\mu' + \int_0^1 I_1(\tau,\mu;\mu')I_{inc}^{*}(\mu')d\mu', \quad (16)$$

なることがわかる。(16)は Duhamel の原理の数学的表示であつて輻射場の重ね合わせの原理を示すものである。

§3. 内部輻射場の変動

有限非均質な大氣の上表面に定方向μ_0から平行光線がその方向に垂直な単位面積当りの真流量πFで入射している場合を考える。Duhamel の原理の一つの応用として今大氣の表面に小さな変動が加えられた場合の平板内部における輻射場の変化を評価してみる。変動を加える以前の輻射強度を$I(\tau,\mu;\tau_0,\mu_0)$とするとこれは(1)を境界条件

$$I(\tau_0,-\mu;\tau_0,\mu_0)=2\delta(\mu-\mu_0),\quad I(\tau_1,+\mu;\tau_0,\mu_0)=0, \quad (17)$$

のもとで解いて得られる。

今上表面に光学的厚さΔの層を附加すると先の輻射強度は$I(\tau,\mu;\tau_0-\Delta,\mu_0)$となる。新表面$\tau=\tau_0-\Delta$に入射した平行光

線は厚さΔの層内で多重散乱を受けた後ある強度でもとの表面に入射する。この強度を $I_{inc}(\mu)$ とすると $I(\tau,\mu;\tau_0-\Delta,\mu_0)$ は $\tau=\tau_0$ に $I_{inc}(\mu)$ の入射のあるときの τ における強度であるから Duhamel の原理 (16) によって

$$I(\tau,\mu;\tau_0-\Delta,\mu_0)=\frac{1}{2}\int_0^1 I(\tau,\mu;\tau_0,\mu')I_{inc}(\mu')d\mu' \qquad (18)$$

となる。ここで $I_{inc}(\mu)$ は定義によって

$$I_{inc}(\mu) = I(\tau_0,-\mu;\tau_0-\Delta,\mu_0) \qquad (19)$$

であるから輸達方程式(1)により(17)を考慮して

$$\begin{aligned} I_{inc}(\mu) &= I(\tau_0-\Delta,-\mu;\tau_0-\Delta,\mu_0) \\ &\quad + \Delta\frac{\partial}{\partial\tau}I(\tau,-\mu;\tau_0-\Delta,\mu_0)\Big|_{\tau=\tau_0-\Delta} + o(\Delta) \\ &= 2\delta(\mu-\mu_0)(1-\Delta/\mu) + (\Delta/\mu)J(\tau_0,\mu_0) \\ &\quad + o(\Delta). \end{aligned} \qquad (20)$$

ここに $J(\tau_0;\mu_0)$ は線源関数, $o(\Delta)$ は Δ^2 以上の項をまとめて書いたものである。(20)を(18)に用いて両辺をΔで割りΔを0に近ずけると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau_0}I(\tau,\mu;\tau_0,\mu_0) &= \frac{1}{\mu_0}I(\tau,\mu;\tau_0,\mu_0) \\ &\quad - \frac{1}{2}J(\tau_0,\mu_0)\int_0^1 I(\tau,\mu;\tau_0,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'}. \end{aligned} \qquad (21)$$

(21)は上表面の変化による内部輻射場の変動をあらわす。同様な方程式が下表面の変化する場合にも得られ，又下表面からの入射光がある場合にも得られる[1，2]。

§4. Milneの問題

半無限の均質大氣中に無限に深い所から来る流量一定の輻射の流れがあり表面からの入射が無い時に表面からμ方向に出る輻射強度を求める問題をMilneの問題という。Duhamelの原理の二番目の応用としてMilneの問題の厳密解を求めてみよう。その前に半無限大氣の拡散反射問題を考える。

半無限大氣の上表面に(17)式で表はされる様な平行光線が入射するとき深さτにおける輻射強度を$I(\tau,\mu;\mu_0)$とすると表面からμ方向に出る光の強度は散乱関数Sを用いて

$$I(0,\mu;\mu_0) = S(\mu,\mu_0)/\mu \tag{22}$$

で与えられる。Duhamelの原理によってSは

$$\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu_0}\right)S(\mu,\mu_0) = \lambda H(\mu)H(\mu_0) \tag{23}$$

$$H(\mu) = 1+\frac{1}{2}\int_0^1 S(\mu,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{24}$$

によって与えられることが示される[3]。ここでHはChandrasekharのH関数である。

半無限大氣の場合Duhamelの原理は$\lambda<1$の時のみ成立す

るのであるが今ここでこの原理が $\lambda=1$ の時を含めて成立すると仮定する。(23)式で $\lambda=1$ とおった場合を考える。

Milneの問題は方程式(1)で $\lambda(\tau)=1$ としたときに(1)を境界条件

$$I(0,-\mu)=0, \quad J(\tau)=O(e^{\tau}) \quad (\tau\to\infty) \qquad (25)$$

のもとで解くことに帰着する。今大気の表面に光学的厚さ Δ の層を附加すると深さ τ における輻射強度 $I(\tau,+\mu)$ は $I(\tau+\Delta,+\mu)$ に変化するがこれはもとの強度に Δ の附加により生じた $\tau=\Delta$ の所での下向きの強度 $I_{inc}(\mu)$ による深さ τ での輻射強度を加えたものとなるはずである。$I_{inc}(\mu)$ による輻射場はDuhamelの原理によって

$$\frac{1}{2}\int_0^1 I_{inc}(\mu')\, I(\tau,+\mu;\mu')\,d\mu'$$

で与えられるから

$$I(\tau+\Delta,+\mu)=I(\tau,+\mu)+\frac{1}{2}\int_0^1 I_{inc}(\mu')\, I(\tau,+\mu;\mu')\,d\mu', \qquad (26)$$

を得る。ここで $I_{inc}(\mu)$ は定義から

$$I_{inc}(\mu)=\frac{\Delta}{\mu}J(0)+o(\Delta) \qquad (27)$$

であるから前節同様に(1)と(25)から

$$I_{inc}(\mu)=(\Delta/\mu)\,J(0)+o(\Delta). \qquad (28)$$

(28) を (27) に用いて Δ を 0 に近づけると

$$\frac{\partial}{\partial\tau} I(\tau, +\mu) = \frac{J(0)}{2}\int_0^1 I(\tau, +\mu ; \mu')\frac{d\mu'}{\mu'} . \qquad (29)$$

再び (1) を用いて $\tau \to 0$ とすれば (24) を利用して

$$I(0, +\mu) = J(0)\ H(\mu) . \qquad (30)$$

両辺に μ を乗じて $(0, 1)$ で積分すると

$$\int_0^1 H(\mu)\,\mu\, d\mu = 2/\sqrt{3} \qquad (31)$$

を用いて

$$J(0) = (\sqrt{3}/4)\,F \qquad (32)$$

が得られるから (30) は

$$I(0, +\mu) = \frac{\sqrt{3}}{4} F\, H(\mu) \qquad (33)$$

を得る。ここで F は

$$F = \int_{-1}^{1} I(\tau, \mu)\,\mu\, d\mu = const \qquad (34)$$

で与えられる真流量である。(33) は Milne の問題の厳密解であって Hopf - Bronstein の関係式と言はれる。

$\lambda = 1$ のとき Duhamel の原理を§2の方法で証明することは Neuman 級数が発散してしまうため不可能であるが $\lambda = 1$ のときにこの原理を仮定して正しい結果 (33) を得たことは

$\lambda=1$ のときにもDuhamelの原理が成立することを示すものと考えられる。

§5. 非等方輻射線源を有する非均質有限大気

非均質な有限大気中に非等方（軸対称）な輻射線源 $B(\tau,\mu)$ があり表面からの入射はないものとする。このとき下表面 $\tau=\tau_1$ から出ていく輻射の強度 $I(\tau_1,-\mu;\tau_1)$ を求めてみよう。この場合の輸達方程式及び境界条件は

$$\mu\frac{\partial}{\partial\tau}I(\tau,\mu;\tau_1)=I(\tau,\mu;\tau_1)-\mathfrak{J}(\tau,\mu;\tau_1) \tag{35}$$

$$\mathfrak{J}(\tau,\mu;\tau_1)=\lambda(\tau)J(\tau;\tau_1)+B(\tau,\mu) \tag{36}$$

及び

$$I(0,-\mu)=0,\quad I(\tau_1,+\mu)=0 \tag{37}$$

で与えられる。今下表面に光学的厚さ Δ の層を附加したことによる $I(\tau,\mu;\tau_1)$ の変化 $I(\tau,\mu;\tau_1)$ をDuhamelの原理によって求めると

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}I(\tau,-\mu;\tau_1)=\frac{1}{2}\int_0^1 I(\tau,-\mu;\tau_1,\mu')\,\mathfrak{J}(\tau_1,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \tag{38}$$

を得る。ここで $I(\tau,\mu;\tau_1,\mu_0)$ は下表面に方向 μ_0 からその方向に垂直な単位面積当り π の真流量で平行光線が入射した場合の τ での輻射強度である。(35), (38) 式から

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1} I(\tau_1,-\mu;\tau_1) + \frac{1}{\mu} I(\tau_1,-\mu;\tau_1)$$

$$= \frac{1}{\mu} B(\tau_1,-\mu) + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 S(\tau_1,\mu,\mu') B(\tau_1,-\mu')\frac{d\mu'}{\mu'}$$

$$+ \frac{\lambda(\tau_1)}{2\mu} X(\tau_1,\mu)\int_0^1 I(\tau_1,-\mu';\tau_1)\,d\mu' \qquad (39)$$

が得られる。ここで $S(\tau_1,\mu,\mu')$ は

$$S(\tau_1,\mu,\mu') = \mu I(\tau_1,-\mu;\tau_1,\mu') \qquad (40)$$

であって既知であり，また X は

$$X(\tau_1,\mu) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 S(\tau_1,\mu,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'} \qquad (41)$$

で与えられる。（39）は $\tau_1=0$ で $I=0$ の初期条件のもとで数値的に解くことが出来る。

文　献

[1] M. Matsumoto, *Publ. A. S. Japan*, 18, 445, 1966.

[2] ——————, *Publ. A. S. Japan*, 19, 48, 1967.

[3] ——————, *Res. Rep. Maizuru Tech. College*, 2, 52, 1967.