数理解析研究所講究録
第43巻 1968年 49-64

摂動力による恒星系の進化

京大 理 清水 彊

§1 序

恒星の力学的な1集団すなわち恒星系は，いわば恒星という粒子からなるガス塊とみなされるので，気体運動論的な取扱いが可能である．ただし，恒星ガスがふつうのガスと趣を異にするのは，(i)一般に極めて希薄で，mean free path が系の大きさのオーダーよりも大きいことと，(ii)気体の状態方程式のような関係が速度分散と分布密度の間に成立たぬことである．観測されている大部分の恒星系は対称形状をもち，流体力学的にほゞ安定と思われる内部構造を示しているが，上記(i)を考えあわせて，大部分の対称型恒星系は準定常状態にあるとの見解が広く受けいれられている．[1]

恒星ガスが希薄であることは観測事実であるが，恒星ガス内における各粒子の相互作用あるいは遭遇作用の評価については，しかしなお問題があるように思われる．恒星ガス内の

遭遇作用については、Jeans[2]以来Chandrasekhar[3], Spitzer[4], von Hörner[5], Kitamura[6]のほか多くの研究があるが、原理的にはいずれも2体遭遇(binary encounter)論に基づくものであって、(i)テスト粒子からある制限距離(cut-off distance)内に起るフィールド粒子との2体遭遇の効果を考えるか、あるいは(ii)遠距離遭遇の累積効果の方を重視し、それをFokker-Planck方程式によって評価するかの2つの立場に大別できよう。

他方これとは独立な確率論的立場から、Holtsmark[7]がスペクトルの理論付けのために展開した揺動力理論は、Chandrasekhar, von Neumann[8]によって、恒星ガスの場合に書きかえられ、揺動力の時間的および空間的変化に関する確率論的考察への拡張がなされた。しかし、彼等の結果は揺動力のr.m.s.(自乗平均の平方根)を無限大とするので不合理といわねばならない。ただし、これらの理論ではガスの構成粒子は点であって、その空間分布は全くat randomではあるが平均的に一定で無限に拡がっているとのモデルが採用されている。それ故Camm[9]は、粒子が有限の半径をもちまたガス系も有限な半径をもつ球であるようなモデルに変えて、その中心における揺動力のの頻度分布を求めた。しかし、彼の表式を用いても、銀河系内における太陽近傍の揺動力のr.m.s.は、太陽近傍における銀河回転のオーダーよりも小さくはならず、従来の2体遭遇

論に基づく常識からは受入れ難い．このためか，確率論的立場からは Camm 以後の発展はみられない．

ここでは，後者の確率的立場に基づき，恒星ガス中の擾動力を吟味し，さら恒星ガスの進化過程を考察しようとする試みについての大筋の考え方を述べる．

1) K. F. Ogorodnikov, Dynamics of Stellar Systems (1965), Oxford.
2) J. H. Jeans, Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics (1919), Cambridge.
3) S. Chandrasekhar, Principles of Stellar Dynamics (1942), New York.
4) L. Spitzer and M. Schwarzschild, Ap. J., 114, 385, (1951)
5) S. von Hoerner, Die Entstehung der Sternen, P. 251 (1959), Berlin.
6) S. Kitamura, J. A. S. P., 18, 317, (1966)
7) J. Holtsmark, Ann. d. Physik, 58, 577 (1919); Phys. Zeits. 20, 162, (1919); 25, 73 (1924)
8) S. Chandrasekhar - J. von Neumann, Ap. J., 95, 489 (1942); 97, 1 (1943)
9) G. L. Camm, M. N., 126, 283, (1963)

§2. 擾動力およびその時間微係数の頻度分布

a) モデルについての仮定：

(i) 各恒星の質量 m および半径は一定である．

(ii) 恒星ガスは無限に拡がっており，その空間分布は全く at random ではあるが，空間的な平均密度は一定で n_0 とする．

(iii) 恒星の速度分布は，どこでも同一で Maxwellian law

$$f(u,v,w)=\frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{3/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(u^2+v^2+w^2)} \tag{1}$$

に従う．（σ_0：一方向の速度分散）

(iv) フィールド星相互間の引力による影響は無視する．従って，各フィールド星はテスト星に対しそれぞれケプラー運動を行なう．（恒星ガスが希薄であること

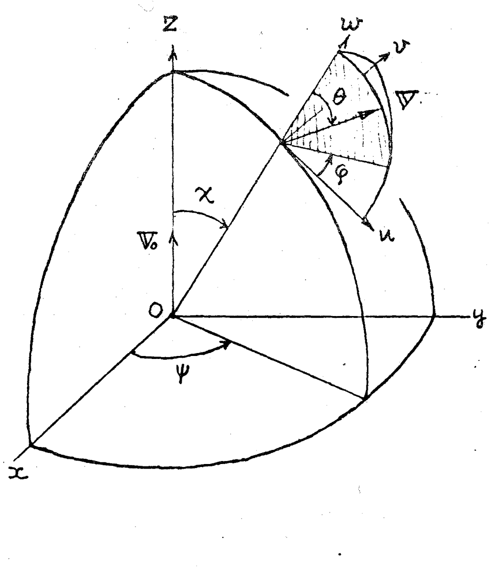
から許容できる近似）

(v) テスト星に対し逃脱速度をもつフィールド星のみがテスト星への摂動力に寄与する．

以上のうち(v)の仮定を加へたことがこのモデルの特徴であって，逃脱速度以下の相対速度をもつフィールド星は捕獲されて連星系を形成すると考えられるため，その影響を除いた．これは2体遭遇論では，逃脱星のみがテスト星に遭遇するのに対応している．太陽近傍では，恒星間の平均距離が約2.2 pc，恒星の速度分散σ_0は約12 km/s（空間速度の分散はこの$\sqrt{3}$倍）であるが，この平均距離だけ離れた2星に0.09 km/s以上の速さの違いがあれば互に逃脱するので，(v)の仮定は過大の制限を課したことにはならないであろう．

b) 摂動力$\mathbb{F}$およびその時間変化$\dot{\mathbb{F}}$の頻度分布函数：

右図のような座標系の原点Oにあるテスト星が速さ$\mathbb{V}_0$をもってz-軸方向に進んでいるとすれば，点P(r, χ, ψ)において相対速度$\mathbb{V}(V, \theta, \varphi)$で動く1つのフィールド星がテスト星の単位質量に働く引力fおよびその時間変化$\dot{f}$は次式で与えられる．



(2) $$\mathbf{f}=\frac{Gm}{r^3}\mathbf{r},\qquad \dot{\mathbf{f}}=\frac{Gm}{r^3}\mathbf{V}-3\frac{Gm}{r^5}\mathbf{r}(\mathbf{V}\mathbf{r}).$$

また，フィールド星がテスト星に対し逃脱星であるための条件は，

(3) $$V^2\geq\frac{\mu}{r},\qquad \mu\equiv 4Gm.$$

従って，N個のフィールド星によるテスト星への摇動力 $\mathbb{F}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{f}_i$ およびその時間微分 $\dot{\mathbb{F}}=\sum_{i=1}^{N}\dot{\mathbf{f}}_i$ の頻度分布函数 $W(\mathbb{F},\dot{\mathbb{F}})$ は[8)]

(4) $$W(\mathbb{F},\dot{\mathbb{F}})=\frac{1}{64\pi^6}\int_{|\rho|=0}^{\infty}\int_{|\sigma|=0}^{\infty}e^{-i(\rho\mathbb{F}+\sigma\dot{\mathbb{F}})}A(\rho,\sigma)\,d\rho\, d\sigma,$$

$$A(\rho,\sigma)\equiv\Big[\frac{1}{b}\int_{\delta<|\mathbf{r}|<R}d\mathbf{r}\int_{|V|\geq\sqrt{\frac{\mu}{r}}}e^{i(\rho\mathbf{f}+\sigma\dot{\mathbf{f}})}f_1(\mathbf{V})\,d\mathbf{V}\Big]^N,\quad b\equiv\frac{4}{3}\pi R^3\Big(1-\frac{\delta^3}{R^3}\Big).$$

と書くことができる．ただし，ρ,σ はそれぞれ3次元ベクトルの補助変数，δ は恒星の有効直径，$A(\rho,\sigma)$ は頻度分布函数の特性函数，また $f_1(\mathbf{V})$ は(1)から誘導される相対速度 $\mathbf{V}$ の頻度分布函数であって次式で表わされる．

(5) $$f_1(\mathbf{V})d\mathbf{V}=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(V_0^2+V^2)-\frac{V_0V}{\sigma^2}(\cos\chi\cos\theta-\sin\chi\sin\theta\cos\varphi)}V^2\sin\theta\, dV\, d\theta\, d\varphi.$$

いま，$N/\frac{4}{3}\pi R^3=n_0$ の条件の下で N，R を ∞ にすると，

$$A(\rho,\sigma)=\lim_{\substack{R\to\infty\\ N\to\infty}}\Big[1-\frac{3}{4\pi R^3}\int_{\delta<|\mathbf{r}|<R,}d\mathbf{r}\int_{|V|\geq\sqrt{\frac{\mu}{2r}}}\{1-e^{i(\rho\mathbf{f}+\sigma\dot{\mathbf{f}})}\}f_1(\mathbf{V})\,d\mathbf{V}\Big]^N\equiv e^{-n_0C(\rho,\sigma)}$$

(6) $$C(\rho,\sigma)=\int_{\delta<|\mathbf{r}|,}d\mathbf{r}\int\{1-e^{i(\rho\mathbf{f}+\sigma\dot{\mathbf{f}})}\}f_1(\mathbf{V})\,d\mathbf{V}$$

明らかに，$-n_0C(\rho,\sigma)$ は $W(\mathbb{F},\dot{\mathbb{F}})$ の cumulant function になるから，(6)を計算して $\frac{(i)^{\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'}}{\alpha!\beta!\gamma!\alpha'!\beta'!\gamma'!}\rho_1^{\alpha}\rho_2^{\beta}\rho_3^{\gamma}\sigma_1^{\alpha'}\sigma_2^{\beta'}\sigma_3^{\gamma'}$ （ρ_i,σ_i は ρ,σ の x, y, または z 軸方向の成分）の係数を求めると，それを $(-n_0)$ 倍したものが，$W(X,Y,Z;\dot{X},\dot{Y},\dot{Z})$ に対する次数 $(\alpha+\cdots+\alpha'+\cdots+\gamma')$ の半不変数（semi-invariant または cumulant）になる．これらの

係数を求める積分計算はかなり繁雑であって，$\alpha'=\beta'=\gamma'=0$ の場合には任意の α,β,γ に対する一般式がえられるが，他の場合については最初の数項の式だけを導いた．ここではそれらの諸式を示すことは省略するが，いずれも次のような函数

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{II}\left(0,\frac{2k+1}{2}\right)\equiv e^{-\frac{y}{4}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(y/4)^{\nu}}{\nu!}\mathrm{I}\left(\nu+\frac{2k+1}{2},x\right), \quad \mathrm{I}\left(\nu+\frac{1}{2},x\right)\equiv\gamma\left(\nu+\frac{1}{2},x\right)/\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\ (\leq 1) \\ \mathrm{II}\left(\frac{2k+1}{2},\frac{2k+2l+1}{2}\right)\equiv e^{-\frac{y}{4}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(y/4)^{\nu}}{\nu!}\left(\nu+\frac{2k+1}{2}\right)\left(\nu+\frac{2k+3}{2}\right)\cdots\left(\nu+\frac{2k+2l-1}{2}\right)\mathrm{I}\left(\nu+\frac{2k+2l+1}{2},x\right) \end{cases}$$

$$x\equiv\frac{\mu}{2\sigma^{2}\delta}, \quad y\equiv\frac{2V_0^{2}}{\sigma^{2}}; \quad \gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2},x\right)=\int_0^{x}e^{-x}x^{\nu-\frac{1}{2}}dx; \quad k,l:\text{整数}$$

と，μ,σ,x,y の冪および数値で表わされる．

ところで，(4)(5)(6)において $\sigma=0$ ($\alpha'=\beta'=\gamma'=0$) または $\rho=0$ ($\alpha=\beta=\gamma=0$) とおくと，$\mathbb{F}$ または $\tilde{\mathbb{F}}$ の周縁分布にあたる諸式となる．$\sigma=0$ の時には上記のように $C(\rho)$ の各項の形が知られ，$|\rho|^2$ の無限冪級数となる．これは $\delta\neq 0$ ならば一様収束するが，$\delta=0$ の極限では，任意の k につき $|\rho|^{2k}$ の係数は確定しても，級数は発散に変わる．それゆえ，星の大きさを考慮すれば揺動力 $\mathbb{F}$ の頻度分布函数は一義的にきまるが，質点とみなせば一義的には確定しない．しかし，後者の場合でも実際には適当な項数 k をとれば，近似的な $\mathbb{F}$ の頻度分布がえられるであろう．

$\sigma\neq 0$ の場合，すなわち $\tilde{\mathbb{F}}$ の周縁分布や $\mathbb{F}$ と $\tilde{\mathbb{F}}$ の多重分布にあたる $C(\sigma)$ や $C(\rho,\sigma)$ については，上述のように一般項の形がえられていないので，それらの頻度分布函数の一義性を云々

することはできない。

c) 揺動力とその時間変化の積率：

揺動力 $F(X, Y, Z)$ およびその時間変化 $\dot F(\dot X, \dot Y, \dot Z)$ の積率 $\lambda_{\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'} \equiv \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \dot X^{\alpha'} \dot Y^{\beta'} \dot Z^{\gamma'} W(X, Y, Z; \dot X, \dot Y, \dot Z)\, dX dY dZ d\dot X d\dot Y d\dot Z$ を既知の半不変数の一群から換算することは，原理的には易しいが，6次元の場合には厄介である．その手続きや，えられた積率の表現式を列挙することは長くなるので省略し，それらの結果についての一般的な性質だけを要約することにする．

(i) 揺動力の積率 $\overline{X^\alpha Y^\beta Z^\gamma}$： α, β, γ のいずれかが奇数であればその積率は零となる．テスト星の運動方向は積率に変化を与えないが，その速さが大きくなると積率の値が増す．一般の恒星ガスでは，次数とともに積率は急激に増大する．

(ii) 揺動力の時間変化の積率 $\overline{\dot X^{\alpha'} \dot Y^{\beta'} \dot Z^{\gamma'}}$： 1次の積率 $\overline{\dot X}, \overline{\dot Y}, \overline{\dot Z}$ はテスト星の運動とは無関係に零となる．この結果は Chandrasekhar-von Neumann[8] の結果と一致しないが，彼等の計算の方に見落しがある．テスト星の運動は2次以上の積率に非対称を齎らし，運動方向とこれに直角な2方向の積率の違いはその速さとともに著しくなる．

(iii) 揺動力とその時間変化の相乗積率 $\overline{X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \dot X^{\alpha'} \dot Y^{\beta'} \dot Z^{\gamma'}}$： 揺動力の1成分と揺動力変化の1成分の積からなる2次の積

率は，テスト星の運動と無関係に零となる．より高次の相乗積率には，(iii)の場合と同様なテスト星の運動による非対称が現われる．

§3. 揺動力の性質

揺動力とその時間変化の積率の表式が導かれたので，次の数値で特徴付けられる太陽近傍の恒星ガス，

$$n_0 = 10^{-1}\ \mathrm{pc}^{-3},\quad \mu = 4GM_\odot = 1.8\times10^{-2}\ \mathrm{pc}^3 Z^{-2},\quad \sigma_0 = 12\ \mathrm{km\cdot sec^{-1}},$$

について，低次の積率の値を求めてみよう．$\delta = V_0 = 0$にとると，

$\sqrt{\overline{F^2}}$（揺動力の分散）$= 0.782\ \mathrm{pc}\cdot Z^{-2}$

$\sqrt{\overline{\dot{F}^2}}$（揺動力の時間変化の分散）$= 1.09\times10^{6}\ \mathrm{pc}\cdot Z^{-3} = 1.09\ \mathrm{pc}\cdot Z^{-2}$ per yr

$(\overline{F^2}/\overline{\dot{F}^2})^{\frac{1}{2}}$(relaxation time ?) $= 7.12\times10^{-7} Z = 0.719$ yr

$(\overline{F^4}/\overline{\dot{F}^4})^{\frac{1}{4}}$(relaxation time ?) $= 1.64\times10^{-7} Z = 0.164$ yr

$\overline{F^2\dot{F}^2}/(\overline{F^4}\cdot\overline{\dot{F}^4})^{\frac{1}{2}}$（$F^2$と$\dot{F}^2$の相関係数）$= 1.72\times10^{-5}$

のような数値をえる．太陽近傍における銀河回転の求心力は，上と同じ単位（pc，太陽質量，$Z=10^6$ yr）では $6.25\ \mathrm{pc}\cdot Z^{-2}$ となるから，揺動力の分散は Camm[9] の場合に比べてかなり減っていることがわかる．しかし，従来の常識から判断するとなお過大とみられよう．揺動力の時間変化の分散や仮りに緩和時間と定義した2つのscale-timeなどに至っては，上揚の数値は如何にも不合理であるかのような感を与える．

これらの一見不合理であるかのような数値は，しかし揺動

力の性質そのものに由来するのであって，以下に示すように合理的な数値といえる．．

振動力とその時間変化の多重頻度分布函数(4)の具体的な表現は，原理的には(6)の $C(\rho,\sigma)$，したがって $A(\rho,\sigma)$ がわかると(4)から導かれるわけであるが，実際にそれを遂行することが困難であるために，$W(\mathbf{F})$を次の近似式でおきかえる．

$$(8)\qquad 4\pi W(X,Y,Z)F^2 \simeq W_1(F)=\frac{\alpha^{(\gamma+1)/\beta}\cdot\beta}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{\beta})}e^{-\alpha F^\beta}F^\gamma,$$

ただし，$W(\mathbf{F})$は X,Y,Z に関し対称であることを考慮した．(8)において，$\alpha F^\beta\equiv\frac{\chi^2}{2}$，$\frac{\gamma+1}{\beta}=\frac{n}{2}$ とおくと，(8)は自由度 n の χ^2 分布の頻度函数に変換できる．(8)より $F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ の k 次の積率 x^c_k，および F が F_0 よりも大きい確率 $P_r(F>F_0)$ を表わす式が求まる．

$$(9)\qquad x^c_k=\frac{\Gamma(\frac{\gamma+k+1}{\beta})}{\alpha^{k/\beta}\Gamma(\frac{\gamma+1}{\beta})},\qquad P_r(F>F_0)=\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{\beta},\alpha F^\beta)}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{\beta})},\quad \Gamma(\nu,x)\equiv\int_x^\infty e^{-x}x^{\nu-1}dx$$

よって，ある恒星系について振動力の積率の値を厳密な表式で幾つか計算しておき，それらが x^c_k のそれぞれの値とほぼ一致するように α,β,γ の値を定めると，$P_r(F>F_0)$ を求めることができる．

振動力の時間微分の周縁頻度分布 $W(\dot{F})$は，前節 c)(ii) に述べたようにテスト星が動いておれば非対称になるが，簡単のために $V_0=0$ にとると，対称になる．ところで，$\dot{F}$ の積率の値が次数とともに増大するのは，F の積率の場合よりも遥かに著しい．それゆえ，$W(\dot{F})$の近似式にも(8)式を用いることにお

れば，同様の手續きで $\dot{F}$ が $\dot{F}_0$ よりも大きい確率 $W(\dot{F})$ を導くことができる。

第1表は太陽近傍の恒星ガスについての数値例であって，確率 $Pr(F>F_0)$ または $Pr(\dot{F}>\dot{F}_0)$ と指定したときの F_0 または $\dot{F}_0$ の値と，F_0 または $\dot{F}_0$ を指定(例へば太陽近傍での $\bar{F}$, $\sqrt{\overline{F^2}}$ または $\bar{\dot{F}}$, $\sqrt{\overline{\dot{F}^2}}$ など)したときの $Pr(F>F_0)$ または $Pr(\dot{F}>\dot{F}_0)$ の値が示してある。

第1表　太陽近傍における $Pr(F>F_0)$ および $Pr(\dot{F}>\dot{F}_0)$

$Pr=0.5$	$Pr=0.1$	$Pr=0.01$	$\bar{F}_c=5.99\times10^{-3}$	$\sqrt{\overline{F^2}}=7.81\times10^{-1}$	$\alpha=6.1$, $\beta=1/9$
$F_0=1.44\times10^{-15}$	$F_0=1.35\times10^{-6}$	$F_0=4.33\times10^{-3}$	$Pr=0.85\times10^{-2}$	$Pr=6.1\times10^{-4}$	$\frac{\gamma+1}{\beta}=1/2$
$Pr=0.5$	$Pr=0.1$	$Pr=0.01$	$\bar{\dot{F}}_c=3.71\times10$	$\sqrt{\overline{\dot{F}^2}}=1.09\times10^{6}$	$\alpha=3.7$, $\beta=4/55$
$\dot{F}_0=1.75\times10^{-20}$	$\dot{F}_0=8.85\times10^{-7}$	$\dot{F}_0=2.01\times10^{-1}$			$\frac{\gamma+1}{\beta}=1/2$

ここで，$\bar{F}_c$ と $\bar{\dot{F}}_c$ は fitting で求めた α, β, γ の値(表の右側)を用いて(8)式で計算した F と $\dot{F}$ の平均値である。第1表を見ると，擾動力の分布は著しく $F=0$ 付近に集中しているため，その平均値や分散値をこえる F が出現する確率はそれぞれ約1%，約1/20%に過ぎないこと，またこの傾向は擾動力の時間変化の分布ではさらに著しいことがわかる。$Pr=0.5$ の F_0 または $\dot{F}_0$，すなわち公算誤差(probable error)に相対するものの数値は，パラメターの fitting 誤差を考えるとその儘には受取り難いが，極めて微小であることを示すから，恒星ガスにおける擾動力の影響は，従来の2体遭遇説から想定されているものに比べ

て桁はずれに大きく食違っているとは思われない。この点については次節で再び取上げる。

$\mathbb{F}$と$\dot{\mathbb{F}}$の相関を知るには$W(\mathbb{F},\dot{\mathbb{F}})$の具体的な表式が必要であるが、その近似式は既にえられた$C(\rho,\sigma)$（途中でcut-offされてはいるが）を(4)式に代入しLaplace変換を行なうことによって導くことができる。しかし、ここでは上の計算を利用して大体の傾向をみるため、第2表に示すようにそれぞれPr.の値を同じくする対ごとのscale timeを求めてみた。

第2表 Scale time からみた$\mathbb{F}$と$\dot{\mathbb{F}}$の相関

Pr. =	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01	
$F_0=$	1.99×10^{-19}	1.44×10^{-15}	2.16×10^{-9}	1.35×10^{-6}	3.17×10^{-5}	4.33×10^{-3}	pc/τ^2
$F_0/\dot{F}_0$	9.43×10^{6}	8.23×10^{4}	4.55×10	1.53	2.88×10^{-1}	2.16×10^{-2}	$\tau=10^6$ yr

第2表から、揺動力が大きいほどその時間変化が速かであること、また初期条件が全く at random に起れば、揺動力が$1.44\times10^{-15}\,pc/\tau^2$よりも大きい場合と小さい場合が同じ確率で現われ、そのscale timeが8.23×10^{10}年より長い場合と短かい場合も同じ頻度となることがわかる。したがって、太陽近傍で$\sqrt{\overline{F^2}}/\sqrt{\overline{\dot{F}^2}}$の値が1年程度になったのも、$\sqrt{\overline{F^2}}$の値が極めて稀にしか起らぬ異常に大きい揺動力の値であったからであると解すことができる。

§4 揺動力による恒星ガスの変化

恒星ガスが希薄であるから，その進化過程はVlasov方程式

(10) $$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\mathbf{v}_0\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{F}_s\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}=-\mathbf{F}_r\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}$$

で記述されるものと考える．ただし，f_0はテスト星群の速度頻度函数，$\mathbf{F}_s$は恒星ガス系内の$\mathbf{r}$点に働く力であるが粒子間の相互作用を無視したもの，$\mathbf{F}_r$はその点での揺動力（ただしフィールド星間の相互作用を無視している）である．簡単のために，ここでは$f_0=f_0(\mathbf{v}_0)$，$\mathbf{F}_s=0$とし，揺動力のみによる恒星ガスの進化を考える．この場合，(10)は

(11) $$\frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial t}=-\left(\frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial u}X+\frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial v}Y+\frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial w}Z\right)\equiv\varepsilon$$

となり，εは確率変数である．揺動力の成分X, Y, Zは対称的で同じ分布法則に従うから，$t=0$におけるf_0の形が与えられていると*，εの頻度分布がわかり，したがってJ個のεの和，$\sum_{j=1}^{J}\varepsilon$の頻度分布も求まる．頻度分布函数の具体的な形が不明のままでも，εの確率は既知の揺動力成分の確率から容易にえられるから，$\sum_{j=1}^{J}\varepsilon$の確率も誘導でき，$\sum_{j=1}^{J}\varepsilon$の頻度分布函数の近似式として(8)を採用すれば，(9)を利用して$\Pr(\sum_{j=1}^{J}\varepsilon>A)$，すなわち所定の値$A$よりも大きい$\sum_{j=1}^{J}\varepsilon$を生じる確率が求まる．

f_0の変化率εは一組の(X, Y, Z)の値できまるが，それらの値は1回の random trial に対応するゆえ，$\sum_{j=1}^{J}\varepsilon$は$J$回の独立な

---

*揺動力の計算には，簡単のためフィールド星の速度分布に(1)を仮定したが，これは逃脱星を判別するのに使われたのに過ぎない．それゆえ，近似的にはf_0の型が必らずしも(1)と同じでなくてもよいであろう．しかし，この場合にはテスト粒子群がフィールド粒子群にくらべて極めて希薄であることが必要である．

random trials による f_0 の合成変化率とみられる. ある時刻にランダムな空間分布をしている恒星ガスの各粒子が, 再びそれと独立なランダムの空間配置をとるまでの時間 τ を正確に評価するのは難かしいが, 粒子の空間速度の分散 $\sqrt{3}\sigma_0$ の速さで粒子間の平均距離 $1/n_0^{1/3}$ を進むに要する時間をとれば, $\sum_{j=1}^{J}\varepsilon_j$ は時間 $J\tau = J/\sqrt{3}\sigma_0 n_0^{1/3}$ に対応付けられる. n_0, μ, δ, f_0 などを固定した恒星ガスがランダムの初期条件から出発し, 十分長い時間 $J\tau$ がたてば, その間に恒星ガスが経過する諸段階は, 時刻に前後があるとしても, J 回の random trials よりなるとみれば, $\sum_{j=1}^{J}\varepsilon_j$ は時間 $J\tau$ 間の総変化率と考えることができる. もちろん, その間に f_0 が変化していくから順次改訂の必要があろう.

以上のような考え方で, 太陽近傍の恒星ガス($\tau = 10\,\mathrm{yr}$)につき, テスト粒子はフィールド粒子と同じ Maxwell 型速度分布($\sigma = 12\,\mathrm{km/s}$)に従うとして, $J = 10^7, 10^8, 10^9$ のそれぞれに対する $\Pr(\sum_{j=1}^{J}\varepsilon(v_0) > A)$ を求めてみた. ただし, 計算を簡単にするため $f_0(v_0) = f(v_0)$ は一定のままとした. 付図は $\frac{\gamma+1}{\beta} = 1$ の場合における $v_0 = 0.5\sigma$, 2.74σ の 3ヶ所における A の値を示したものである.

2 体遭遇論では恒星ガスの緩和時間(Relaxation time)は $\sum(\Delta E)^2/E^2 = 1$ または $\sum m^2\Psi = 1$ で定義されており, 太陽近傍では $10^{14}\,\mathrm{yr}$ である.[1)2)] ここでは $\sum^{J}\frac{1}{J}\varepsilon$ を求めているので, 付図の結果を 2 体遭

遭論の緩和時間と比較することはできない。しかし，時間$J\tau$後の速度頻度函数がほゞMaxwell型で近似できると仮定すれば，その変化$\Delta f(v_0)=f(v_0\sigma')-f(v_0\sigma)$は平均運動エネルギーの変化$m\sigma'^2/2-m\sigma^2/2=(k-1)m\sigma^2/2$に対応させることができる（第2表）。附図には$k=1/4, 1/2, 2, 4$に対応する$\left|\frac{\Delta f(v_0)}{f(v_0)}\right|$の値が横線で示してある。これとみると，約$10^{13}$年$(J=10^8)$たつと全粒子の50%が最初の運動エネルギーを$1/2\sim1/4$乃至$2\sim4$倍に変えるとみられそうである。前に断ったように$\sum^{J}\frac{1}{f(v_0)}\frac{\partial f(v_0)}{\partial t}$の計算に$f(v_0)$の改訂を行ってはいないが，2体遭遇論からの緩和時間に比べると，この$J\tau$の値は1桁小さい。

第2表　$\Delta f(v_0)/f(v_0)$

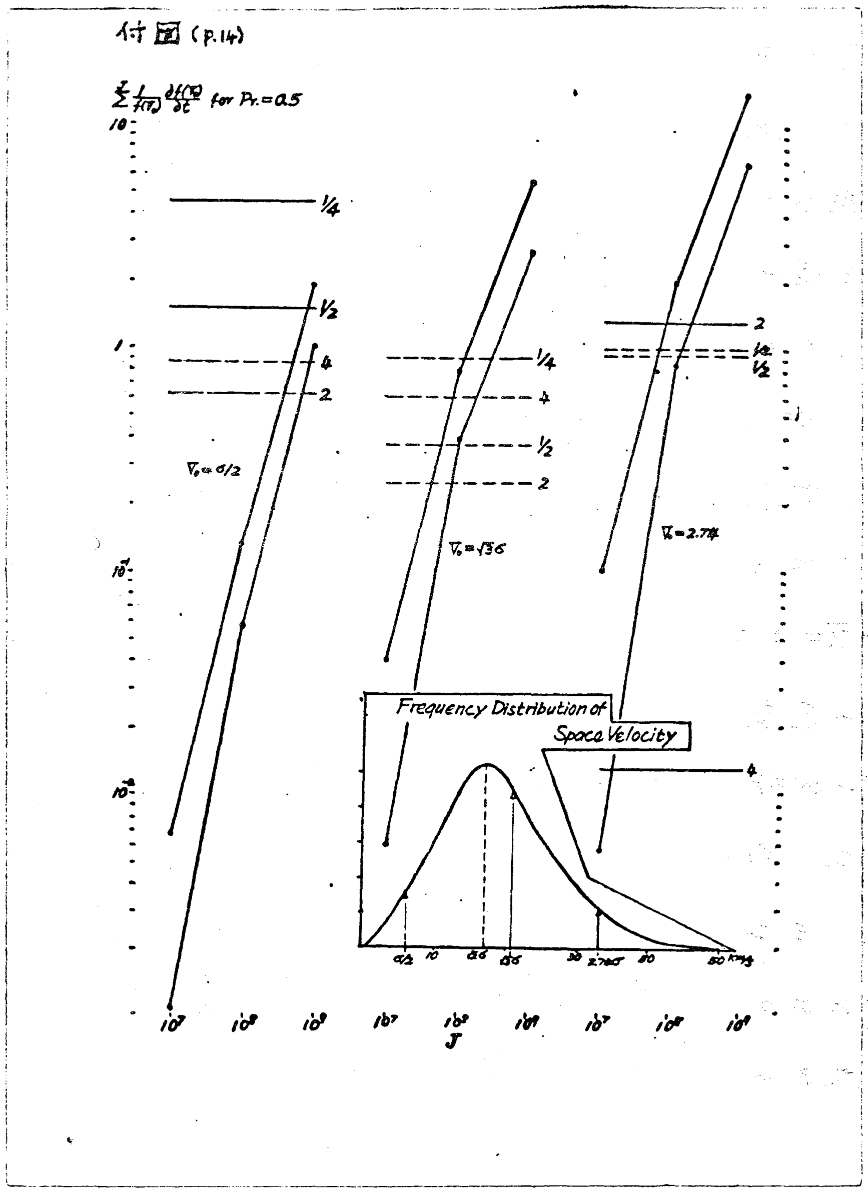
v_0 \ k	1/4	1/2	2	4
$\sigma/2$	4.50	1.50	−0.62	−0.86
$\sqrt{3}\sigma$	−0.91	−0.37	−0.25	−0.61
2.74σ	−1.00	−0.93	1.31	0.03

2体遭遇論による遭遇効果の算定と上述の確率論的考察との相異点は，(i) フィールド星の速度分布はいずれもMaxwell型と仮定していても，前者ではそれが無限遠点で成立つとするのに対し，後者ではどこでも成立つとしたこと，また(ii)取扱う量が前者ではフィールド星が無限遠からきて再び無限遠に去る間にテスト星に与える力積であるのに対し，後者では全フィールド星がテスト星に及ぼす力であることである。2体遭遇論では，したがって作用時間がはいり込んでいるが，遭遇効果を評価する際テスト星からある距離以上に遠くでの遭遇はcut-off

されるから，作用時間は零から無限大に跨がり，$\frac{\partial f}{\partial t}$をどれだけの有効時間の平均とみてよいのか判然としない．また，フィールド星の速さがテスト星のそれに近づけば共鳴的現象が現われるが，従来の取扱いではすべて無視されている．

ガス粒子の相互作用を一義的に追求する場合には，問題としている変化量，例えば$\frac{\partial f}{\partial t}$は平均的なものを表わすとみてよい．しかし，摂動力の立場では平均値は必らずしも代表値とは認め難く，確率的に変化を追求する方がより妥当である．正規型分布函数は，Boltzmann方程式やVlasov方程式を満足するので変らぬというのも，平均においてと解される（(11)において$\bar{X}=\bar{Y}=\bar{Z}=0 \therefore \frac{\partial f}{\partial t}=0$）．本節で取扱った簡単な1例は，初めMaxwell型の速度分布であった場合でも，恒星ガスの平均運動エネルギーが非可逆的に変わり，したがって平均密度が一定のまゝでも，局所的に粒子の凝集や拡散が起りうることを示す．しかし，ランダム試行の回数Jを遥かに大きくとれば，大数の法則によって，$\sum^{J} \frac{\partial f(V_0)}{\partial t}/f_0(V_0)$は正規分布に近づくから，フラツキは大きいが平均的には最初の速度分布となる．

追記　§4の$\sum\frac{(\Delta E)^2}{E^2}=1$に相当する緩和時間の計算は，その後よりよい近似で繰返へしたところ，本稿の値よりも長くなった．しかし，加速度にあたる$\frac{1}{f_0}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$をも考慮に入れると，結果的には緩和時間は本稿の値よりも短かくなる見込みである．


付図 (p.14)
for Pr.=0.5
1/4
1/2
4
2
Frequency Distribution of
Space Velocity
J
km/s