数理解析研究所講究録
第43巻 1968年 85-103



# Burgersモデル乱流に対する非線型波展開法

京大 理　　巽 友正

## §1. 高Reynolds数における乱流の場

無限空間を占める流体の中に生ずる一様な乱流は，通常，勝手な方向，波数，振幅と位相をもつ無数の平面正弦波の集合として理解される．この描像は，数学的には乱れの場の3次元Fourier分解を考えることに対応し，これから，異る波数の波の間の相互作用，各波のもつエネルギーのスペクトルなどの有用な物理的諸概念が生れてくることは周知の通りである．

この描像は単に乱れの場の数学的表現として用いられるばかりでなく，乱れの解析に際しての有用な近似手段の基礎としても用いられる．乱れの速度場の統計法則を速度積率場の集合によって記述する立場をとるとき，ある次数の速度積率場を支配する方程式には，運動方程式の非線型性により，必らず次数の一つだけ高い速度積率場が現われる．未知数

である速度積平均の数はつねに方程式の数より一つだけ多く，これらの方程式系を完結させるためには，一つの完結仮説の導入が必要となる。 これが，よく知られた乱流理論における非線型性の困難である。

完結仮説として考えられる最も簡単なものは，最低次(2次)の積平均に対する方程式だけを考え，その方程式における非線型項(3次)を無視する，いわゆる「弱い乱れ」の近似であろう。 2次の速度積平均はエネルギー・スペクトルに対応し，3次のそれはエネルギー伝達のし方を表わしていることを考えると，この線型近似は，異なる波数の波の間の相互作用を無視し，各々の波が独立に振舞う状態を想定することに当たる。 スペクトル方程式におけるエネルギー伝達関数を全く無視する代りに，これをスペクトルを含む適当な積分で置換えて，方程式を完結させる方法がある。 この近似理論は，積分表示を仮定する際に根拠となるさまざまな物理的考察に応じて多くの理論に分れるが，その代表的なものはHeisenbergの「渦動粘性」理論であろう(この種の近似的諸理論については Batchelor (1953) を参照)。

以上の諸理論に比べてより精度の高い近似方式は，考える方程式の個数を増し，それによって完結仮説の不完全さの影響をより希薄にすることであろう。 一方程式理論に比べ

に一段だけ近似を高めた理論は，2，3，4次の積平均を含む二つの方程式と一つの完結仮説とを用いる理論であり，これに属するものには，「4次キュムラント打切り」理論（Millionshtchikov (1941), Tatsumi (1954, 1957), Proudman と Reid (1954)）と，その変種である「直接相互作用近似」理論（Kraichnan (1959), (1964), (1965)），「Wiener-Hermite展開の第二近似」理論（Meecham と Siegel (1964)），さらに，4次項を全く無視した「4次相関打切り」理論（Deissler (1958)）などがある。

この近似方式は，考える方程式の数が多ければ多いほど精度の高い近似が得られることが期待されるが，一方において，方程式の形式の複雑さは次数とともに急激に増大するので，次数を高めることには実際的には限度がある。現在までに行われた近似では，2次から5次までの積平均を含む三つの方程式と一つの完結仮説とを用いた三方程理論が最高であり，その中には「5次相関打切り」理論（Deissler (1960)），および「5次キュムラント打切り」理論（川原（1968））がある。

以上の逐次近似理論はいずれも，速度積平均のより高次の項を摂動として取扱うという立場において共通しており，その方式によって得られた解が乱れのReynolds数 $R =$

$u_0\lambda_0/\nu$（$u_0$：乱れの代表的な速さ，$\lambda_0$：代表的な波長，$\nu$：流体の動粘性率）の昇べき級数の形をとることもまた同様である． ところが，Rの昇べき級数の収束性があまり良くないことは，流体の層流運動の分野においてすでに良く知られたことであり，たとえば，Reynolds数展開の第一近似と同等であるStokes，Oseenの近似解法は，高々R＝10の程度までしか有効な解を与えない．乱流の場合においても，上記の近似諸理論がRの大きい値において，程度の差こそあれ破綻を来していることは良く知られている．（その最も著しい例は，4次キュムラント打切り近似による負のエネルギーの発生であろう．）

一方，高Reynolds数における流れの場の構造に一つの普遍的な特徴があり，それが渦度の集中であることはすでに多くの研究者によって指摘されている（たとえば，Lighthill (1963), Batchelor (1967) 参照）．
Rの大きい値に対しては渦度は空間的に狭い領域に集中し，その他の流れの場のほとんど至るところで渦度は0の非回転流になる．層流運動の場合に，流れのこの漸近的性質を全面的に利用した理論が「境界層理論である（たとえば，Goldstein (1938)を参照）．この方法は，流れの場をほとんどいたるところの非回転流と，物体表面に沿う

非常に薄い境界層とに分けて取扱う一種の漸近解法であり，この理論の幅広い有用性はすでに多くの実例によって確かめられている。

一様な乱れの場もまた，境界のない一つの流体運動にほかならないことを考慮すれば，高Reynolds数における乱れの場は，それを線型方程式の解である正弦波の合成と考えるよりは，むしろ，むしろ無数の不連続面（あるいは線）とそれをとりまく非回転流として理解する方が，はるかに現実に近い近似であろうと想像される。このような考えの線に沿って，この論文では，「非線型波展開法」という一つの近似解法を提案する。

さしあたって，流体は簡単なBurgersの一次元モデル流体を考える。このモデル流体は，非圧縮粘性流体のNavier－Stokes運動方程式を簡単化した形の運動方程式をもっているが，この方程式の解が解析的に閉じた形に得られるという非常に大きな利点をもっている。この流体は，しかし，Navier－Stokes流体とは違って非圧縮ではなく，ある時刻において完全に連続的であった解にも，有限時間後には衝撃波のような不連続的な構造が現われる。その意味でこの流体は，非圧縮流体のモデルというよりは圧縮性流体のモデルと考える方が適当かも知れない。しかし，こ

こでは Burgers 流体の運動の実際的解釈という問題を離れて，高 Reynolds 数における漸近解法の一つの適用例として，Burgers 流体における乱流を取扱う．

## §2. Burgers 方程式の周期解.

一次元空間座標を $x$，時間を $t$，一次元速度を $u(x, t)$ で表わすとき，Burgers モデル流体の運動方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

で与えられる．

(1) 式の解は Burgers 自身（1950）によって詳しく調べられているが，粘性 $\nu$ の非常に小さい値，あるいは無次元形では Reynolds 数 $R$ の非常に大きい値に対して，つぎの二種類の解があることが知られている：

i) 滑らかな解.

(1) 式の右辺を無視したときの解で，

$$u(x, t) = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \tag{2}$$

ただし，$x_0$，$t_0$ はそれぞれ任意定数．

ii) 不連続解

二つの一様状態をつなぐ不連続面を表わす解で，

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_l + u_r) - \frac{1}{2}(u_l - u_r)\tanh\left[\frac{u_l - u_r}{4\nu}(x' - x_0)\right], \tag{3}$$

ただし，$c = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$，$x' = x - c(t - t_0)$，で $u_l$，$u_r$ $(u_l > u_r)$ はそれぞれ，不連続面の左，右における $u$ の値を表わす。(3) 式の表わす不連続面は，$u_l > u_r$ の場合のみ発生し，かつその面の左右における $u$ の平均値を位相速度として伝播する．不連続面の厚さは $\nu/(u_l - u_r)$ の程度であり，$\nu \to 0$ の極限において解 (3) は一つの階段函数

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x - x_0 < c(t - t_0), \\ u_r & x - x_0 > c(t - t_0), \end{cases} \tag{4}$$

に帰着する．

以上の二つの解を組合わせると，$\nu \to 0$ の極限において，つぎのような周期解を構成することができる：

$$u(x,t) = A(t)\,\mathrm{saw}\,x, \tag{5}$$

ただし，
$$A(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 t}, \tag{6}$$

で，saw $x$ はつぎのように定義される $x$ の周期函数である：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{saw}\,x &= \begin{cases} \dfrac{x}{L} + \dfrac{1}{2} & -\dfrac{L}{2} \leq x < 0, \\ \dfrac{x}{L} - \dfrac{1}{2} & 0 < x \leq \dfrac{L}{2}, \end{cases} \\ \mathrm{saw}\,x &= \mathrm{saw}\,(x+L). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$\mathrm{saw}\,x$ は図1に示すような周期 $L$ と鋸歯状の波形をもつ函数で、そのFourier級数展開は、

$$\mathrm{saw}\,x = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(2n\pi\frac{x}{L}\right) \quad (8)$$

で与えられる。また、$\mathrm{saw}\,x$ はつぎのような加法定理をもつ：

$$\mathrm{saw}\,nx = \sum_{m=0}^{n-1}\mathrm{saw}\left(x - \frac{m}{n}L\right) \quad n: \text{正整数} \quad (9)$$

saw 函数で表わされる解(5)は非常に安定な解であって、いま、ある時刻($t=0$)において正弦波形をもつ波

$$u(x,0) = A_0 \sin x \quad (10)$$

が与えられたとすると、$t>0$ において $u(x,t)$ は急速に変形して有限時間後には(5)の形に近づき、それ以後は(5)の形を保ちながら時間とともに減衰する(図2を参照)。また、初期形(10)から漸近形(5)への変化の過程は、ほとんど $\nu$ (あるいは $R$)の値によって変らず、$\nu$ の値の影響

は専ら不連続面の厚さにおいてだけ現われる.

## §3. 一次元乱れの saw 函数表示

いま, 区間 $-L/2 \le x < L/2$ において定義された有界変動不連続な函数 $u(x)$ が与えられたとき, つぎのような Stieltjes 積分を考える:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} saw(x-x')\, du(x')$$

$$= \frac{x}{L}\left[u\left(\frac{L}{2}\right)-u\left(-\frac{L}{2}\right)\right] - \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u(x')\,dx' + u(x).$$

函数 $u(x)$ が周期性

$$u(x) = u(x+L) \qquad (11)$$

と, 0 平均値

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u(x')\,dx' = 0 \qquad (12)$$

をもつと仮定すれば, 上の積分は記号的に,

$$u(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} saw(x-x')\, du(x') \qquad (13)$$

と書ける. 周期性 (11) によって, $u(x)$ の定義領域を全区間 $-\infty < x < \infty$ に拡張すれば, (13) は周期函数 $u(x)$ に対する saw 函数展開を与える.

もし，$u(x)$がいたるところで有限な微分係数

$$\frac{du}{dx} = \omega(x)$$

をもつならば，(13)式は，

$$u(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \omega(x')\, \mathrm{saw}(x - x')\, dx' \qquad (14)$$

と書ける．$\omega(x)$を三次元流体の速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ に対する渦度 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}$ と対比させて考えることができるから，ここでも $\omega(x)$を'渦度'と呼ぶことにしよう．このとき，(14)式は三次元流体における渦度と速度を結ぶBiot-Savartの関係式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d\boldsymbol{x}'$$

に対応している．

乱れの速度 $u(x)$の saw 函数表示(13)あるいは(14)は全く一般的な展開公式であるが，われわれはここで，乱れの場が集中した渦度の集合として記述されると仮定しよう：

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{N} w_i(t)\, \mathrm{saw}\left(x - x_i(t)\right), \qquad (15)$$

ただし，$w_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$．一般的な展開公式(13)によれば，$u(x)$は $du(x')$を振幅とする saw 函数

の和として表わされている。$du(x') > 0$ の領域では、saw 函数の不連続面は位相速度 $c = u(x')$ で伝播しながら、不連続面であり続ける。これに対して、$du(x') < 0$ の領域では、不連続の（$t=0$ で）もつ $+\infty$ の勾配は、$t>0$ では有限の勾配となり、(12) 式に従って連続直線の形を保ちながら減衰する。その結果、$t=0$ において (13) あるいは (14) 式で表わされる初期形をもつ $u(x,t)$ は、ある時間の後には $1/t$ の正勾配をもつ直線部分と、有限個の負の不連続とに帰着してしまうであろう。そのような時刻以後では、$u(x,t)$ は (15) 式で表わされるであろうし、また正勾配がすべて $1/t$ であることから、$x \neq x_i$ に対して

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N} \omega_i(t) = \frac{1}{t} \qquad (16)$$

が成立していなければならない。

(15) 式における $\omega_i$, $x_i$ は一般に $t$ の函数であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{d\omega_i}{dt}\,\mathrm{saw}(x-x_i) - \omega_i \frac{d}{dx}[\mathrm{saw}(x-x_i)]\frac{dx_i}{dt}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{d\omega_i}{dt}\,\mathrm{saw}(x-x_i) - \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\frac{dx_i}{dt}.\end{aligned}$$

ところが、不連続解 (3) から明らかなように、

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2}\left[u(x_i-0, t) + u(x_i+0, t)\right]$$
$$= u(x_i, t). \tag{17}$$

ここで，$u(x,t)$ の平均値が $0$ であることを考慮すれば，$\omega_i$ の一つの値に対して $dx_i/dt = u(x_i, t)$ の正負の値が同じ頻度で現われると考えられるから，$\sum_{i=1}^{N} \omega_i\, dx_i/dt$ はほとんど $0$ であると見なしてよい．しかし，この和を厳密に $0$ にするため，つぎのような形式的な条件を要求する．すなわち，$N$ を偶数であるとして，$N$ 個の不連続面を $i = 1, 2, \cdots N/2$ と $N/2+1,\ N/2+2, \cdots, N$ との二群に分け，各群に属する不連続面が $x=0$ を中心として一個づつ対称に分布しているものとする：

$$x_i = -x_{\frac{N}{2}+i}, \quad \omega_i = \omega_{\frac{N}{2}+i}. \tag{18}$$

このとき，

$$u(x) = \left[\sum_{i=1}^{N/2} + \sum_{i=N/2}^{N}\right] \omega_i \,\mathrm{saw}(x - x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{N/2} \omega_i \left[\mathrm{saw}(x - x_i) + \mathrm{saw}(x + x_i)\right]$$
$$= -\sum_{i=1}^{N/2} \omega_i \left[\mathrm{saw}(-x - x_i) + \mathrm{saw}(-x + x_i)\right]$$
$$= -u(-x). \tag{19}$$

それ故，(17) から，

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{dx_{\frac{N}{2}+i}}{dt}. \tag{20}$$

したがって、

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N/2} w_i \left( \frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \right) = 0$$

となり、$\partial u / \partial t$ は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{dw_i}{dt} \, \mathrm{saw}\,(x - x_i) \qquad (21)$$

と書ける。

(16), (21) を Burgers 方程式 (1) に代入すると、$x \neq x_i$ ($i = 1, 2, \cdots, N$) のとき方程式は、

$$\sum_{i=1}^{N} \left( \frac{dw_i}{dt} + \frac{w_i}{t} \right) \mathrm{saw}\,(x - x_i) = 0$$

となる。すべての $x$ ($\neq x_i$) の値に対してこの方程式が成立するためには、

$$\frac{dw_i}{dt} + \frac{w_i}{t} = 0$$

でなければならない。この方程式の解は、

$$w_i(t) = \frac{w_{i0}}{t}, \quad w_{i0} = w_i(1) \qquad (22)$$

で与えられる。

以上の (17), (22) の結果を考慮すると、(1) 式に従う $u(x, t)$ の saw 関数展開は、

$$u(x, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N} w_{i0} \, \mathrm{saw}\,[x - x_i(t)] \qquad (23)$$

で与えられ, $x_i(t)$ の時間的変化は,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \omega_{j0}\ \mathrm{saw}[x_i(t)-x_j(t)] \qquad (24)$$

で決定される。 許容性条件(18)は, もしそれが $t=0$ で満たされていれば, $t>0$ においても成立することは(20), (22)から明らかであろう。 高Reynolds数におけるBurgers方程式(1)の漸近解はかくして(23), (24)によって与えられ, 乱流としての $u(x,t)$ の特性は, $\omega_{i0}$, $x_i(1)$ の分布を指定することによって完全に決定される。

ここで注意しなければならない大事な点は, 以上の取扱いにおいて $N$ が一定には保たれないということである. 初期時刻 $t=0$ における連続函数 $u(x)$ から不連続な波形に移行する際, 発生する不連続面の個数は大体一周期 $L$ の内に $du(x')>0$ となる区間の個数に等しいと考えてよいであろう. ところが, 不連続面の伝播速度 $c_i = dx_i/dt$ が互いに等しくないことから, 不連続面同志の衝突が起る. いま, 渦度 $\omega_1$, $\omega_2$, 位相速度 $c_1$, $c_2$ の二つの波が衝突したとすると, 衝突後は二つの波は合体して,

$$\omega' = \omega_1 + \omega_2, \qquad c' = c_1 + c_2 \qquad (25)$$

をそれぞれ渦度, 位相速度とする一つの波になる. こうして, 一回の衝突ごとに $N$ は一つずつ減少する. しかし, $N$ は限り

なく減少するのではなく，その下限は大体，$e_i$ がほとんど至るところで0となる状態におけるNの値，すなわち，最初の波形における $u(x')=0$ の個数に等しいと考えられる。このようにして，Nが最初の $u(x)$ の極大(小)値の個数から0点の個数にまで減少していくとき，その減少の程度は最初の時機において大きく，後になるほど緩やかになるであろう．したがって，N＝一定の仮定はこの減衰の後期においては良い近似で成立していると考えられる．以下の議論では，この「無衝突」の近似を採用し，N＝一定として計算することにする．

## §4. 相関とスペクトル

一次元乱れの場 $u(x,t)$ が長さ $L$ の周期性をもつならば，それはつぎのようなFourier級数に展開することができる：

$$u(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\, e^{ikx}, \qquad (26)$$

ここに，$k=2n\pi/L$ ($n$：整数) は波数を表わす．$u$ は実数であるから $v_k$ は複素数で，

$$v_{-k}=v_k^*$$

でなければならない（*は共役複素数）。複素数 $v_k$ のうち，絶対値 $|v_k|$ は波数 $k$ の成分波の振幅を，偏角 $\arg v_k$ はその位相を表わしている。$v_k$ は，(26) の逆変換公式によって，

$$v_k(t) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u(x,t)\, e^{-ikx}\, dx \qquad (27)$$

で表わされる。

$u(x,t)$ が不規則な乱流波形をとることは，$v_k$，したがって実変数 $|v_k|$，$\arg v_k$ がともに偶然量であることに対応する。したがって，$u(x,t)$ に関する統計的法則は，$|v_k|$，$\arg v_k$ の確率分布を指定することによって与えられる。$v_k$ を含む統計量に関する変換公式を導いておこう。$u(x)$ あるいは $v_k$ に分布が与えられたとし，それらに関する平均を〈 〉で表わす。

平均：

$$\langle v_k\rangle = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \langle u(x)\rangle\, e^{-ikx}\, dx = 0. \qquad (28)$$

ただし，考える乱流は平均をもたない，$\langle u(x)\rangle = 0$，を仮定している。

相関：

$$\langle v_k v_{k'}^{*}\rangle = \frac{1}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \langle u(x)\, u(x')\rangle\, e^{-i(kx-k'x')}\, dx\, dx'$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} C(r)\, e^{-ikr}\, dr & k=k', \\ 0 & k\neq k'. \end{cases} \qquad (29)$$

ここに、

$$C(r) = \langle u(x)\, u(x+r) \rangle \qquad (30)$$

は相関函数で、一様な乱れにおいては $x$ によらない。

$C(r)$が偶函数、$C(r) = C(-r)$、であることは一様性からの帰結である。

<u>スペクトル：</u>

$$E_k = \langle |u_k|^2 \rangle = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} C(r)\, e^{-ikr}\, dr$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} C(r) \cos kr\, dr \qquad (31)$$

をエネルギー・スペクトルという。$C(r)$は逆に(31)の逆変換によって、

$$C(r) = 2\sum_{k>0}^{\infty} E_k \cos kr \qquad (32)$$

で表わされる。

周期 $L \to \infty$ の極限を考えると、$E_k$ の極限は存在しないが、

$$\sum_{k}^{k+\Delta k} E_k = E(k)\,\Delta k \qquad (33)$$

で表わされる函数 $E(k)$ の極限は存在するから、$E(k)$ をエネルギー・スペクトル函数という。$L \to \infty$ の極限において、

(31), (32) 式はそれぞれつぎのようになる：

$$E(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty C(r)\cos kr\,dr. \tag{34}$$

$$C(r) = 2\int_0^\infty E(k)\cos kr\,dk. \tag{35}$$

とくに，単位質量あたりの乱れの運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}\langle u^2\rangle = \frac{1}{2}C(0) = \int_0^\infty E(k)\,dk \tag{36}$$

で与えられる．

1. Batchelor, G. K. (1953). The theory of homogeneous turbulence, Cambridge U. P.

2. Batchelor, G. K. (1967). An introduction to fluid dynamics, Cambridge U. P.

3. Burgers, J. M. (1950). Proc. Acad. Sci. Amsterdam 53, 247.

4. Deissler, R. G. (1958). Phys. Fluids, 1, 111.

5. Deissler, R. G. (1960). Phys. Fluids, 3, 176.

6. Goldstein, S. (1938). Modern developments in fluid dynamics, Vol. 1, Oxford U. P., (1965) Dover.

7. Kawahara, T. (1968). To be published in J. Phys. Soc. Japan.

8. Kraichnan, R. (1959). J. Fluid Mech. 5, 497.

9. Kraichnan, R. (1964). Phys. Fluids, 7, 1030.

10. Kraichnan, R. (1965). Phys. Fluids, 8, 575.

11. Lighthill, M. J. (1963). Laminar boundary layers (L. Rosenhead ed.), Ch. II.

12. Meecham, W. C. & Siegel, A. (1964). Phys. Fluids, 7, 1178.

13. Millionshtchikov, M. (1941). C. R. Acad. Sci. U. R. S. S. 32, 615.

14. Proudman, I. & Reid, W. H. (1954). Phil. Trans. A, 247, 163.

15. Tatsumi, T. (1954). Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 307.

16. Tatsumi, T. (1957). Proc. Roy. Soc. A, 239, 16.