

# 工学上における非線形偏微分 方程式の近似解の例

慶大 工学部 鬼頭史域

1. 緒言 工学上の諸問題で、非線形の方程式を解く問題が多数あることは、昔から言われている。[文献(1)] においては、近頃私の方で考えている非線形偏微分方程式の例を述べた。なお、併せて、私共 engineer が研究途上に出合った直交関数列の問題を、ここに附記しておいた。

## 2. 弾性棒の大たわみ振動の問題。

弾性棒の大たわみ振動を考える、ひとつの方法として、Hamiltonの最小作用の原則によって、運動方程式を立てることが行なわれる。[例えば、文献(7)] それに関連して、附帯条件つきの変分問題が取扱われる。ここでは、附帯条件が(等周問題と異なり)微分方程式の形で表えられる。[文献(3), (4), (5)]。問題は

$$\Phi(x, x', \dots; y, y', \dots) = 0 \quad \text{---(2)}$$

のわとに

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\xi} F(x, y, \ddot{x}, \ddot{y}, \dots; x', y', x'', y'', \dots) d\xi \quad \text{----- (1)}$$

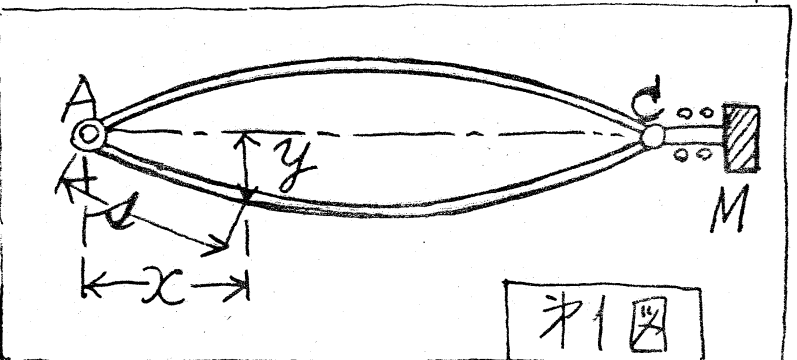
を極大極小ならぬることである。ここで  $x' = \partial x / \partial \xi$ ,  $x'' = \partial^2 x / \partial \xi^2$ ,  $\dots$ ,  $\ddot{x} = \partial^2 x / \partial t^2$ ,  $\dots$  と書く。

未定乗数法が適用できると思われるが、次記の簡単なケースは直接に式が立てられる。

大たわみ振動の基本式. 第1図 のように、左端は

角変位に対するバネ、右端は  $x$  方向にスライドし得るように、バネ  $C$  と質量  $M$  と、つないであるものとする。棒の

曲げだけを考え、伸びは考えないものとする。一般に、 $\xi, t$  の関数  $U(\xi, t)$  に



対して  $U' = \partial U / \partial \xi$ ,  $U'' = \partial^2 U / \partial \xi^2$ ,  $\ddot{U} = \partial^2 U / \partial t^2$ , 等と書くものとする。また:—

$s = \text{arc length}$ ,  $\xi = s/l$ ,  $\lambda = 1/l$ ,  $\rho A = \text{mass per unit length, of the bar}$ ,  $l = \text{棒の長さ}$ ,  $EI = \text{棒の曲げ剛性}$ ,  $I = \text{動エネルギー}$ ,  $V_i = \text{歪みエネルギー}$ , とすると,

$$T_1 = \frac{\rho A l}{2} \int_0^1 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] d\xi,$$

$$V_1 = \frac{1}{2} E I l \int_0^1 \lambda^2 [\overline{x''^2} + \overline{y''^2}] d\xi,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2), \quad V_2 = \frac{1}{2} C (x_1 - l)^2, \quad (x_1 \text{ は } \xi=1 \text{ における } x \text{ の値})$$

$$T_3 = 0, \quad V_3 = \frac{1}{2} A (x'_0)^2 \quad (x'_0 \text{ は } x' \text{ の } x=0 \text{ における値})$$

そして

$$T_s = T_1 + T_2, \quad V_s = V_1 + V_2 + V_3$$

とおき、作用関数  $L_s = T_s - V_s$  に対して、

Hamiltonの原則により

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L_s dt = 0 \quad \text{--- (3)}$$

を作ればよい。なお、 $x, y$  の間には常に関係式

$$(x')^2 + (y')^2 = l^2 \quad \text{--- (4)}$$

が成り立たねばならない。この変分問題を解くた

めには

(a). 積分 ( $t=t_1 \sim t_2; \xi=0 \sim 1$ ) の被積分の項

(b). 境界値 ( $t=t_1, t_2; \xi=0, 1$ ) に対する項

の両者を考えねばならない。こゝでは (a) の問題だけをとりあげる。

変分法の既知の方法によつて計算すると、(3)の中味は

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 [Q \delta x + R \delta y] d\xi \quad \text{--- (5)}$$

の形になる。ここで、簡単のために

$$\left. \begin{aligned} Q &= PA l \ddot{x} + EI \lambda^4 l x^{(4)} \\ R &= PA l \ddot{y} + EI \lambda^4 l y^{(4)} \end{aligned} \right\} \text{----(6)}$$

とおく。なお、(4)によって  $x' \delta x' + y' \delta y' = 0$  であるが、 $0 < x' \leq 1$  であるから

$$\delta x' = -(y'/x') \delta y' \quad \text{----(7)}$$

となる。

条件式(4)のもと、(5)式の変分問題 一般に

$$\int_0^{\xi} Q d\xi = Q_p, \quad \int_0^{\xi} R d\xi = R_p$$

と書くことにすると、

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 [Q \delta x] d\xi \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ |Q_p \delta x|_0^1 - \int_0^1 Q_p \delta x' d\xi \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ |Q_p \delta x|_0^1 - \int_0^1 \left( -\frac{y'}{x'} Q_p \right) \delta y' d\xi \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ |Q_p \delta x + \frac{y'}{x'} Q_p \delta y|_0^1 \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{y'}{x'} Q_p \right) \delta y \cdot d\xi \right] \end{aligned}$$

それ故、 $\delta x, \delta y$ のうちで、 $\delta y$ だけを独立変分とみなせば、方程式(3)より

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{y'}{x'} Q_p \right\} - R = 0, \text{ 従つて, } y' Q_p - x' R_p = 0 \quad (8)$$

これが、われわれの問題に対する基本微分方程式である。[ラグランジュの未定乗数法を(後りに)適用してみても、同じ結果、(8)が得られる。] さらに、便宜上

$$\int_0^{\xi} x d\xi = X, \int_0^{\xi} y d\xi = Y, \frac{EI\lambda^4 l}{\rho A l} = k,$$

とおけば、方程式(8)は

$$\left. \begin{aligned} Y'' [\ddot{X} + k X^{(4)}] - X'' [\ddot{Y} + k Y^{(4)}] &= 0, \\ (X'')^2 + (Y'')^2 &= l^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

という形に直される。

逐次累近解法。微小振動に対しては

$$X_0'' = l, X_0 = \frac{1}{2} l \xi^2,$$

であつて、方程式(9)は

$$0 - X_0'' [\ddot{Y}_0 + k Y_0^{(4)}] = 0,$$

すなわち、既知の弾性棒の横振動の方程式となる。

そこで

$$\left. \begin{aligned} Y &= Y_0 + \mu Y_1 + \mu^2 Y_2 + \dots \\ X &= X_0 + \mu X_1 + \mu^2 X_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

とおき、微分演算子

$$B \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

を使い, (9)の代わりに, 方程式

$$\left. \begin{aligned} X'' [BY] &= \lambda Y'' [BX], \\ (X'')^2 + (Y'')^2 &= l^2 \end{aligned} \right\} \text{----- (11)}$$

を, ( $\mu$ の各べきの係数を比較して) 解いてゆくことを, 現在試みている。

### 3. 直交関数列に関する問題 (engineer の立場から)

(1). 緒言. 私共が, 今取扱っている問題のひとつに, 流体と弾性体とのかね合い振動の問題 (Hydro-elasticityの問題) がある。そこで, 同一領域 ( $0 \leq x \leq 1$ ) に対して, 2組の直交関数列  $[f_i(x), g_i(x); i=1, 2, 3, \dots]$  をとりあつかう必要がおこる。これに関連して, 次記のような問題が, おこってくる。

(ロ). 問題 1. ここに正規直交(完全)関数列  $f_1(x), f_2(x), \dots$  が与えられたとき, 例えば

$$y_i(x) = \sum_{m=1}^i A_{im} f_m(x) \quad (i=1, 2, \dots)$$

なる関数列を作り, 既知関数  $F(x)$  に対して

$$\int_0^1 F(x) \varphi_i(x) dx = 0 \quad \text{---- (12)}$$

ならぬたい。  $f_i(x)$  は

$$\int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

となっているものとする。

$\varphi_i(x)$  は関数列ではあるが、お互いに直交するに限らない。 Schmidtの方法によれば、 $\varphi_i(x)$  から linear combination によって  $h_i(x)$  を作り、 $h_i(x)$  が正規直交(完全)であるようにすることは可能である。 [例えば文献(3), (4), Kap. II, §1.2] われわれインジニアとしては、簡便な実行方法がほしい。

(1). 問題 2. ここに、全く独立した 2つの正規直交(完全)関数列  $f_1(x), f_2(x), \dots; g_1(x), g_2(x), \dots$  が与えられているものとする。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx &= \delta_{ij}, \\ \int_0^1 g_i(x) g_j(x) dx &= \delta_{ij}, \end{aligned} \right\} \text{---- (13)}$$

そこで

$$\left. \begin{aligned} f_i(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_{is} g_s(x) \\ g_i(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} N_{is} f_s(x) \end{aligned} \right\} \text{---- (14)}$$

と展開すると

$$M_{is} = \int_0^1 f_i(x) g_s(x) dx, \quad N_{is} = \int_0^1 g_i(x) g_s(x) dx,$$

さて  $N_{is} = M_{si}$  である。しかし、一般に  $N_{is} \neq$

$N_{si}$ ,  $M_{is} \neq M_{si}$  ( $s \neq i$ )。そこで、

$$K_{st} = \sum_{i=1}^{\infty} M_{is} N_{it} = \sum_{i=1}^{\infty} M_{is} M_{ti} \quad \text{---(15)}$$

と定義する。この  $K_{st}$  の数値を求める方法を知らたい。

例えば  $f_i(x)$ ,  $g_j(x)$  に対する積分方程式の核

$\mathcal{K}_f(x, \xi)$ ,  $\mathcal{K}_g(x, \xi)$  の項で表わしたい。なお、

(14) より

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_{is} \left[ \sum_{t=1}^{\infty} N_{st} f_t(x) \right] \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} M_{is} N_{st} f_t(x) \end{aligned}$$

さらに  $f_i(x)$ ,  $f_j(x)$  をかけて積分すると ( $i \neq j$ )

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \sum_{s=0}^{\infty} M_{is} N_{si} = \sum_{s=1}^{\infty} (M_{is})^2 \\ 0 &= \sum_{s=1}^{\infty} M_{is} N_{sj} = \sum_{s=1}^{\infty} M_{is} M_{js} \end{aligned} \right\} \text{---(16)}$$

ということは、わかっている。



4. 拡散型方程式の問題. 岸上, 宮本 (慶応義塾大学, 工学部) [温度とともに物性値が変化する場合の一次元非定常熱伝導, 日本機械学会論文集, 32巻, 244号, 昭41-12月] は, 偏微分方程式

$$c(\theta) \rho(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} + A(x),$$

を取扱った。例えば  $0 < \theta < 90^\circ \text{C}$  に対して

$$c(\theta) = 0.160 (1 + 0.00384 \theta),$$

$$K(\theta) = 0.293 (1 - 2 \times 0.000605 \theta),$$

の場合を調べている [階差方程式, 計算機, 摂動法]

一般の初期値問題  $w$  を或る量 (例えば, 濃度) とするとき, 偏微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ D &= a w + b, \quad (a, b \text{ は定数}) \end{aligned} \right\} \text{--- --- (17)}$$

に対して,  $t=0$  のとき  $w = \varphi(x, y, z)$  となるような  $w$  の (逐次近似的な) 求め方が要望される。

$\varphi(x, y, z)$  は  $|x|, |y|, |z| < \infty$  に対して, 有限であるが, 連続であるに限らないものとする。

参考文献

- (1) Th. v. Kármán, The Engineer grapples with non-linear problems, Aug. 1940, Amer. Math. Soc.
- (3) Courant-Hilbert, Methoden der Math. Physik, I, 2 Aufl. 1931, Kap. IV, § 7-3, Differentialgleichungen as Nebenbedingungen.
- (4) Courant-Hilbert, Methods of Math. Physics, Vol. I, 1953, Chap. IV, § 7-3, Differential equations as subsidiary conditions.
- (5) A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 7. Abschnitt, Die Allgemeine Probleme der Variationsrechnung.
- (6) A. R. Forsyth, Calculus of Variations, 1927, Chap. VIII, Relative maxima and minima, of Single Integrals, § 269~270.
- (7) H. Wagner, Large-amplitude Free-vibrations of a Beam, Journ. Appl. Mech., Dec., 1965
- (8) 鬼頭 変分法と工学, 数学セミナー, 1964, 10, 11, 12月号 (文末に近頃の教科書名を記しておいた。)
- (9) S. E. Dreyfus, Dynamic Programming and the Calculus of Variations, 1965, Academic Press, Chap. III.
- (10) W. F. Ames, Non-linear partial Differential Equations, Academic Press, 1967.
- [新刊書の例として] (以上)