数理解析研究所講究録
第44巻 1968年 9-18

Matrix Arguments の分布

阪大 基礎工 麻生泰弘

§0. 序

多変量正規分布に基づく多変量解析では，Wishart分布が基本的な役目をはたしている。A.T. Jamesは，直交群上の不変測度と直交群のcoset spaceとして導かれる多様体とをうまく用いて，Wishart分布や種々のcentral分布を導き，更に群上の平均を用いてnoncentral Wishart分布を導いた。その後，彼は，このnoncentral Wishart分布に対して，正値実対称行列のzonal polynomialによる表現を与えた。A.G. Constantineはこのzonal polynomialを用いて種々のnoncentral分布を与えた。多変量解析では，行列の固有根と固有ベクトルとの分布が重要であるが，此等の分布は，行列の分布よりある程度導ける。ここでは，(noncentral) Wishart分布の一般化として行列要素の(noncentral) Γ分布を導入し，これと関連した実対称行列の空間での分布を，出来るだけ系統的に導くことを

試する。詳しくは，Ann. Inst. Stat. Math. に寄稿した小生の論文を参照されたい。

§1. Central 分布

S_p を (p,p) 実対称行列の空間とし，S_p^+ を (p,p) 正値実対称行列のなす convex cone とする。いま，$L\in GL(p;R)$ に対して，空間 S_p 上の変換 $a(L)$ を

$$(1)\qquad a(L):S\longrightarrow LSL',\quad S\in S_p$$

で定義すると，$a(L_1L_2)=a(L_1)a(L_2)$，$L_1,L_2\in GL(p;R)$ が成立し，対応

$$(2)\qquad a:L\rightarrow a(L),\quad L\in GL(p;R)$$

は群 $GL(p;R)$ の空間 S_p に於ける表現 (S_p,a) を与え，空間 S_p^+ は空間 S_p の a-不変部分空間である。更に，群 $\mathfrak{A}(GL(p;R))=\{a(L),L\in GL(p)\}$ は，S_p^+ の上で trasitive に働く，即ち cone S_p^+ は，homogeneous convex cone である。また直交群 $O(p;R)$ は，単位行列 E_p に於ける isotropy subgroup $\mathfrak{A}(O(p;R))=\{a(H),H\in O(p;R)\}$ を与える。いま群 $\mathfrak{A}(GL(p;R))$ の部分群 $\mathfrak{A}(O(p;R))$ による left-coset $\{a(LH);H\in O(p;R)\}$ をとると，$a(LH)E_p=a(L)E_p$ より，これは $S=LL'\in S_p^+$ と対応し，この対応は一対一である。この意味で，

$$(3)\qquad S_p^+=\mathfrak{A}(GL(p;R))/\mathfrak{A}(O(p;R)),$$

となる。

次に，この空間 S_p^+ に於ける点 S を通り，点 E_p を中心とする sphere を集合 $\{\alpha(H_1LH_2)E_p;\ L\in GL(p;R),\ LL'=S,\ H_1, H_2 \in O(p;R)\}$ で定義しよう。これは集合 $\{HSH';\ S\in S_p^+,\ H\in O(p;R)\}$ と同値である。この場合，行列 S, $T\in S_p^+$ の間に，$T=cS$, $c>0$ なる関係があれば，$HTH'=c(HSH')$ となり，特に scalar matrix cE_p, $c>0$ を通る sphere は cE_p である。

S_p^+ 上の函数 $f(S)$ が symmetric fn. であるとは，任意の $H\in O(p;R)$ に対して

$$f[\alpha(H^{-1})S] = f(S)$$

が成立するとき，即ち点 $S\in S_p^+$ を通り，点 E_p を原点とする sphere の上で constant-valued な函数をいう。

- 函数 $f(S)$, $S\in S_p^+$ が $\alpha(GL(p;R))$-不変な函数ならば，symmetric function である。
- Symmetric function $f(S)$, $S\in S_p^+$ は，行列 S の固有根のみに depend する。
- この意味で，実対称行列の zonal polynomial は symmetric function (polynomial) である。

Proposition 1.

空間 S_p^+ の上の分布 $dF(S) = f(S)dS$ について，$f(S)$

が symmetric function のとき，かつそのときのみ行列 S の固有根と固有ベクトルとは独立に分布し，後者の分布は直交群 $O(p;R)$ の上の一様分布である。この様な分布を symmetric な分布という。

Definition 1. Γ 分布 $\Gamma_p(s;C,A)$

$$(4)\quad dF(S)=\begin{cases}\dfrac{1}{\det(C)^s\Gamma_p(s)}\operatorname{etr}\{-C^{-1}(S-A)\}\det(S-A)^{s-\frac{p+1}{2}}dS, & \\ \qquad C\in S_p^+,\ s>\dfrac{p-1}{2},\ S-A \text{ pos. def.}, & \\ 0\ , \quad その他 & \end{cases}$$

ここに $\Gamma_p(s)=\int_{S_p^+}\operatorname{etr}(-S)\det(S)^{s-\frac{p+1}{2}}dS=\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{p-i+1}{2}\right)$

$\Gamma_p(s;E_p,0)=\Gamma_p(s)$ をこの分布の標準形という。分布 $\Gamma_p(s;C,A)$ の特性函数は

$$(5)\quad \varphi(\Theta)=\operatorname{etr}(i\Theta A)\det(E_p-i\Theta C)^{-s},\quad i=\sqrt{-1}$$

$$\Theta=(\varepsilon_{ij}\theta_{ij}),\quad \theta_{ij}=\theta_{ji};\quad \varepsilon_{ij}=1\ (i=j),\quad \varepsilon_{ij}=1/2\ (i\neq j)$$

で与えられる。このことから，この分布は

$$\Gamma_p(s;C,A)+\Gamma_p(s;C,B)=\Gamma_p(s;C,A+B),$$

$$\Gamma_p(s_1;C,A)+\Gamma_p(s_2;C,A)=\Gamma_p(s_1+s_2;C,A)$$

と再生性をもつが，$s>\frac{p-1}{2}$ の故に，無限分解可能ではない。また，分布 $\Gamma_p(s)$ は symmetric な分布である。

Definition 2. Dirichlet 分布 $D_p(s_1,\ldots,s_k,s_{k+1})$

$S_1,S_2,\ldots,S_p\in S_p$ に対して

$$(6)\quad d\mathrm{F}(S_1,S_2,\ldots,S_k)=\begin{cases}\dfrac{1}{B_p(s_1,\ldots,s_k,s_{k+1})}\prod_{i=1}^{k}\det(S_i)^{s_i-\frac{p+1}{2}}\cdot \\ \quad\cdot\det(E_p-S_1-S_2-\ldots-S_k)^{s_{k+1}-\frac{p+1}{2}}dS_1\cdots dS_k, \\ \quad s_1,\ldots,s_{k+1}>\frac{p-1}{2},\ S_1,\ldots,S_k\in S_p^+, \\ \quad E_p-S_1-S_2-\ldots-S_k\ \text{pos. def.} \\ 0,\quad その他\end{cases}$$

ここに

$$B_p(s_1,\ldots,s_{k+1})=\int\Big[\prod_{i=1}^{k}\det(S_i)^{s_i-\frac{p+1}{2}}\Big]\det(E_p-S_1-\ldots-S_k)^{s_{k+1}-\frac{p+1}{2}}$$
$$dS_1\cdots dS_k=\Gamma_p(s_1+\ldots+s_{k+1})\big/(\Gamma_p(s_1)\cdots\Gamma_p(s_{k+1})).$$

特に $k=1$ のときを，B-分布 $Be_p(s_1,s_2)$.

Definition 3. F-分布 $F_p(\alpha,\beta)$

$$(7)\quad d\mathrm{F}(S)=\begin{cases}\dfrac{1}{B_p(\alpha,\beta)}\dfrac{\det(S)^{\alpha-\frac{p+1}{2}}}{\det(E_p+S)^{\alpha+\beta}}dS,\quad S\in S_p^+,\ \alpha,\beta>\frac{p-1}{2} \\ 0,\quad その他\end{cases}$$

。分布 $Be_p(s_1,s_2)$ 及び $F_p(\alpha,\beta)$ も symmetric distribution である。

さて，行列 S_1 及び S_2 の分布を，それぞれ独立に分布 $\Gamma_p(s_1;C)$ 及び $\Gamma_p(s_2;C)$ に従っているものとするとき，行列

$$(8)\quad S=T'S_1T\ ,\qquad TT'=S_2^{-1}$$

の分布を考えよう。　実数 R の上の分布に関しては
これは　F 分布 $F(s_1,s_2)$ をする。我々の場合，

1) $T' = T$ とすると，行列 S の分布は

$$d\bar{F}(S) = \frac{1}{B_p(\delta_1, \delta_2)} \det(S)^{\delta_1 - \frac{p+1}{2}} \cdot \frac{1}{\det(C)^{\delta_1+\delta_2}\, \Gamma_p(\delta_1+\delta_2)} \cdot$$

(9)

$$\cdot \int_{S_2 \in S_p^+} \operatorname{etr}\left[- T^{-1} C^{-1} T'^{-1} (E_p + S) \right] \det(S_2)^{\delta_1+\delta_2 - \frac{p+1}{2}} dS_2 \cdot dS$$

で与えられる。特に行列 C が scalar matrix の場合には行列 S の分布は $F_p(\delta_1, \delta_2)$ となる。

2) $C = \Gamma\Gamma'$ とし，$S_1 = \Gamma' T_1 \Gamma$，$S_2 = \Gamma' T_2 \Gamma$，$T = \Gamma^{-1} T_2^{1/2}$，但し $T_2^{1/2} = (T_2^{1/2})'$，ととると，行列 S は

$S = T_2^{1/2} T_1 T_2$ となり，行列 S の分布は $F_p(\delta_1, \delta_2)$。

3) T が positive diagonal elements をもった，lower triangular matrix の場合は，行列 S の分布は

(10) $$d\bar{F}(S) = \frac{1}{B_p(\delta_1, \delta_2)} \det(S)^{\delta_1 - \frac{p+1}{2}} \det(E_p + S)^{-(\delta_1+\delta_2) + \frac{p+1}{2}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \det((E_p + S)_{[i]})} dS,$$

但し，$(E_p + S)_{[i]} = (\delta_{\nu\mu} + s_{\nu\mu});\ \nu, \mu = p-i+1, \dots, p$

で与えられる。

4) T が positive diagonal elements をもった，upper triangular matrix の場合は，行列 S の分布は

(11) $$d\bar{F}(S) = \frac{1}{B_p(\delta_1, \delta_2)} \det(S)^{\delta_1 - \frac{p+1}{2}} \det(E_p + S)^{-(\delta_1+\delta_2) + \frac{p+1}{2}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \det((E_p + S)^{[i]})} dS,$$

但し $(E_p+S)^{[i]}=(s_{\nu\mu}+s_{\nu\mu})\,;\ \nu,\mu=1,\cdots,i$
で与えられる。なお，行列 S の固有根は，分布 $F_p(s_1,s_2)$ の場合と同一。3) 及び 4) は Olkin-Rubin の結果である。

§2. Noncentral 分布

Definition 1. 非心 Γ-分布 $\Gamma_p(s;C,\Omega)$

$$(1)\quad dF(S)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{etr}(-C^{-1}S)\det(S)^{s-\frac{p+1}{2}}}{\Gamma_p(s)\det(C)^{s}}\operatorname{etr}(-C^{-1}\Omega)\,{}_0F_1(s;C^{-1}SC^{-1}\Omega)\,dS, & s>\frac{p-1}{2},\ S,C\in S_p^{+},\ \Omega\in S_p\\ 0, & その他\end{cases}$$

行列 C が単位行列の場合，即ち $C=E_p$ のときを，この分布の標準形：$\Gamma_p(s;E_p,\Omega)=\Gamma_p(s;\Omega)$.

分布 $\Gamma_p(s;C,\Omega)$ の特性函数は，

$$(2)\quad \varphi(\Theta)=\operatorname{etr}\left[-[E_p-[E_p-i\Theta C]^{-1}]C^{-1}\Omega\right]\det(E_p-i\Theta C)^{-s}.$$

Definition 2. 非心 B-分布 $Be_p(s_1,s_2;\Omega)$

$$(3)\quad dF(S)=\begin{cases}\dfrac{\det(S)^{s_1-\frac{p+1}{2}}\det(E_p-S)^{s_2-\frac{p+1}{2}}}{B_p(s_1,s_2)}\operatorname{etr}(-\Omega)\,{}_1F_1(s_1+s_2;s_1;S\Omega)\,dS & \\ \qquad ,\ s_1,s_2>\frac{p-1}{2},\ E_p-S\ \text{pos.def.},\ S\in S_p^{+} & \\ 0, & その他\end{cases}$$

Definition 3. 非心 F-分布 $F_p(s_1,s_2;\Omega)$

$$(4)\quad d\bar{F}(S)=\begin{cases}\dfrac{\det(S)^{s_1-\frac{p+1}{2}}\det(E_p+S)^{-\frac{s_1+s_2}{2}}}{B_p(s_1,s_2)}\,etr(-\Omega)\,{}_1F_1(s_1+s_2;s_1;\\ \qquad (E_p+S^{-1})^{-1}\Omega)\,dS,\\ \qquad s_1,s_2>\frac{p-1}{2},\ S\in S_p^+,\ \Omega\in S_p\\ 0\ ,\quad その他\end{cases}$$

なお，${}_0F_1$，${}_1F_1$ は matrix arguments の hypergeometric function の series に属する函数で，symmetric function である。当然のことながら，上の三つの分布は空間 S_p^+ での symmetric distribution ではない。しかしながら，これ等の分布の固有根は，次の symmetrization により計算出来る。即ち，

$d\tilde{F}(S)=\int d\bar{F}(H'SH)\,d\nu(H)$，$d\nu(H)$ は $O(p;R)$ の上の正規化された $O(p;R)$ 不変測度，より計算出来る。例えば，分布 $\Gamma_p(s;E_p,\Omega)$ に対しては，

$$d\tilde{F}(S)=\frac{etr(-S)\det(S)^{s-\frac{p+1}{2}}}{\Gamma_p(s)}\,etr(-\Omega)\,{}_0F_1(s;S,\Omega)\,dS,\quad S\in S_p^+,$$

ここに，

$${}_0F_1(s;S,\Omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(k)}\frac{1}{k!\,(s)_{(k)}}\frac{C_{(k)}(S)\,C_{(k)}(\Omega)}{C_{(k)}(E_p)},$$

$C_{(k)}(\cdot)$ は partition (k) に属する zonal polynomial.

さて，いま行列 S_1 と S_2 とは，それぞれ独立に分布 $\Gamma_p(s_1;C,\Omega)$，$\Gamma_p(s_2;C,0)$ に従っているものとする。このとき，

行列

(5) $$S = T^{-1} S_1 (T^{-1})' \quad , \quad S_1 + S_2 = TT'$$

の分布を考えよう。実数R上の分布の場合，これは非心B-分布 $Be(s_1, s_2; C^{-1}\Omega)$ となるが，我々の場合，

(イ) $T = T'$ の場合は，

$$dF(S) = \frac{\det(S)^{s_1 - \frac{p+1}{2}} \det(E_p - S)^{s_2 - \frac{p+1}{2}}}{B_p(s_1, s_2)} \, etr(-C^{-1}\Omega)$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma_p(s_1+s_2) \det(C)^{s_1+s_2}} \cdot$$

$$\cdot \int_{V \in S_p^+ , \, (V^{1/2})' = V^{1/2}} etr(-C^{-1}V) \det(V)^{s_1+s_2-\frac{p+1}{2}} {}_0F_1(s_1; C^{-1}\Omega C^{-1} V^{1/2} S V^{1/2}) dV \cdot dS$$

となり，特に行列Cおよび Ω が scalar matrix ならば，この行列Sの分布は分布 $Be_p(s_1, s_2; C^{-1}\Omega)$ となる。

(ロ) T が positive diagonal elements をもった lower triangular matrix の場合，

$$dF(S) = \frac{1}{B_p(s_1, s_2)} \det(S)^{s_1 - \frac{p+1}{2}} \det(E_p - S)^{s_2 - \frac{p+1}{2}} .$$

$$\cdot \int_T \left[etr(-T'T) \det(T'T)^{s_1+s_2} {}_0F_1(s_1; ST'C^{-1}\Omega T) \, 2^p \prod_{i=1}^{p} t_{ii}^{-i} \cdot dT \right] \cdot dS ,$$

特に，行列 $C^{-1}\Omega = \begin{bmatrix} a^2 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$ のときは，分布 $Be_p(s_1, s_2; C^{-1}\Omega)$.

参考文献：

A. T. James, "Zonal Polynomials of the Real Positive Definite Symmetric Matrices," Ann. Math. 74 (1961), pp. 455-464

A. T. James, "Group Methods in Normal Multivariate Distribution Theory," (Princeton Ph. D Thesis), (1952)

A. G. Constantine, "Some Non-Central Distribution Problemes in Multivariate Analysis," Ann. Math. Stat. 34 (1963), pp. 1270-1285

Y. H. Asoh, "On the P-distribution of matrix argument and related distribution," (submitted to Ann. Inst. Stat. Math.)