数理解析研究所講究録
第 44 巻 1968 年 19-22

Factorial Invariance について

阪大 基礎工　　麻生泰弘

§0. 序

p 変量の確率変数 x の相関行列を Σ とするとき，

$$(1) \quad \Sigma = A_{(p,q)} \Sigma_f A' + V, \quad q < p,$$

ここに，行列 A は階数 q の実行列，V は (p,p) 対角行列で対角線要素は正，と分解し，あわせて

$$(2) \quad x = Af + vs, \quad E(f) = E(s) = 0, \quad \mathrm{cov}(f, s) = 0,$$

v は (p,p) 対角行列で $vv' = V$

と表わし，この q-ベクトル f に正則一次変換 $GL(q;R)$ をほどこし，その結果を意味づけすることが，linear factor model による因子分析であろう。行列 A は因子荷重行列といわれ，直交因子（$\Sigma_f = E_q$）の場合，$h_i^2 = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}^2$ $(i=1, \ldots, p)$ は i-成分の communality といわれる。

処で，行列 V を specify してやると，行列 $\Sigma - V$ の階数は一意的に定まる。この行列 $\Sigma - V$ の階数を q とすると，確率変数 $x - vs$ の台は，この行列の nonzero eigenvalue に対応

する q 個の正規化された固有ベクトルにより basis を与えられる。特に直交因子の場合には，行列 V を specify することと，communality を specify することは equivalent である。

あるいは，表現(1)が成立する minimal rank q の推定といった問題もある。以下，直交因子の場合を考えよう。

次で，(2)に応じた表現

$$(3)\qquad x_i = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} f_k(\omega) + b_i s_i(\omega) \qquad (i=1,2,\dots,p)$$

に於て，(イ) test battery (x_i) の構成を変えた場合，(ロ) experimental subject の selective condition を変えることにより，(1)因子負荷行列 (a_{ik}) の numerical value の不変性，(2)行列 A のパターンの不変性を問題とするのが，factorial invariance の問題である。母集団に於ては，行列 Σ 及び行列 V が完全に specify されるので，上の注意により因子不変性は保証される。一般に，二つの実験により抽出された因子について因子不変性が保証されるには，それ等の因子負荷行列によって規定される空間が同一でなければならない。この場合について，因子の任意性を除く為に Thurstone は "simple structure" という概念を導入している。なお，Thurstone 自身が意識している "simple structure" は斜交因子解であり，彼はこの simple structure が " complety かつ overdetermined" ならば，因子不変性は保証されると述べている。そして，

通常我々は sampling experiments にもとづいて，因子を抽出している。しからば，因子不変性の問題は，pの値，標本の大いさn，あるいはcommunalityの推定の性質等を加味して論ぜられるべきであろう。

さて，ここでは，一つの実例を報告する。大阪大学医学部解剖教室の欠田助教授は，畿内の人頭蓋骨に関する彼のデータ($n=37$)と宮本氏のデータ($n=30$)とを提供してくれた。このデータについて，

(1) プールした$n=67$のデータについて，測定項目$p=24$と$p=30$との場合について因子不変性をみる，

(2) $p=24$として，欠田氏のデータと宮本氏のデータとについて因子不変性をみる，

といった二つの解析を試みた。前者については，先づセントロイド法で因子を抽出し，これを初期データにしてLawleyの最尤解をもとめ，次いでVarimaxにかけた。後者については，先づセントロイド法で因子を抽出し，それからVarimaxにかけた。これ等の計算は阪大計算センターのNEAC2200-500と東京理科大学のIBM1620とでなされた。

結果は，いずれも否定的にでたが，詳しい吟味は目下進行中である。

2

参考文献：

Thurstone, L. L.; Multiple Factor Analysis,
Chicago, 1965