数理解析研究所講究録
第44巻 1968年 55-68

多変量解析論における漸近的分布について

日大 生産工 塩谷 実

§1. 緒言

多変量解析における検定の多くは，尤度比，Union-Intersection Principle にもとづいて検定基準が導びかれている。しかしその正確な標本分布は，仮説の下であつても，なかなか求めるのが困難であり，そのため漸近分布による近似が重要となりBartlett が個別的にもとめていた結果を，Anderson の本〔1〕に紹介されているような形に G.E.P. Box により統一され〔2〕実際問題に広く使用されている。この場合検定統計量Wの仮説の下でのモーメントが正確にもとめられており，かつ

$$(1)\qquad E(W^h)=K\left[\frac{\prod_{j=1}^{b}y_j^{y_j}}{\prod_{i=1}^{a}x_i^{x_i}}\right]^h\frac{\prod_{i=1}^{a}\Gamma\{x_i(1+h)+\xi_i\}}{\prod_{j=1}^{b}\Gamma\{y_j(1+h)+\eta_j\}},\qquad h=0,1,2,\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{a}x_i=\sum_{j=1}^{b}y_j$$

なる形をもつていることが要求されている。

これが適用できない場合には，統計量の形にもとづいて，個別に漸近分布が考えられる。尤度比λに対して，$-2\log\lambda$ が漸近的に χ^2- 分布にしたがうという Wilks の結果は周知の通りである。Studentized Statistics の場合には次のような漸近展開を求める方法がある。$S_n : p\times p$ を自由度 n のウイッシャート分布 $W_p(\frac{1}{n}\Sigma, n)$ にしたがういわゆるウイッシャート行列とする。このとき $P\cdot\lim_{n\to\infty} S_n = \Sigma$ である。別に X を S_n とは独立な確率行列とし，考える統計量が $T(X, S_n)$ と X と S_n の関数であるとする。いま $T(X, S_n)$ の分布は未知であるが，$T(X,\Sigma)$ の分布はわかっており，これを足場に $T(X,S_n)$ の分布の漸近展開を求めようとする。$T(X,S_n)$，$T(X,\Sigma)$ は連続な密度関数をもち，十分大きい n に対して，条件付き確率 $P\{T(X,S_n)\le t(n)\mid S_n\}$ は Σ のまわりで Taylor 展開ができるとして

$$
\begin{aligned}
P\{T(X,S_n)\le t(n)\} &= \int P\{T(X,S_n)\le t(n)\mid S_n\}\, dW_p(\tfrac{1}{n}\Sigma, n) \\
&= \int \exp\{\mathrm{tr}(S_n-\Sigma)\partial\}\cdot P\{T(X,\Sigma)\le t(n)\}\, dW_p(\tfrac{1}{n}\Sigma, n) \\
&= \exp(-\mathrm{tr}\,\Sigma\partial)\cdot\left|I_p-\tfrac{2}{n}\Sigma\partial\right|^{-\frac{n}{2}}\cdot P\{T(X,\Sigma)\le t(n)\} \qquad (2) \\
&= \exp\{-\mathrm{tr}(\Sigma\partial)-\tfrac{n}{2}\log\left|I_p-\tfrac{2}{n}\Sigma\partial\right|\}\, P\{T(X,\Sigma)\le t(n)\}
\end{aligned}
$$

こゝに $\Sigma=(\sigma_{ij})$，$\partial : p\times p = \left(\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial\sigma_{ij}}\right)$，（$\delta_{ij}$ はクロネッカーの δ）である。$t(n)=t_0+t_1(n)+t_2(n)+\cdots$，（$t_0$ は定数，$t_i(n)=O(\frac{1}{n^i})$）の展開をもつ場合を考えると

$$P\{T(X,S_n)\le t(n)\}=\Big[1+\{\frac{1}{n}\sum_{rstu}\sigma_{ur}\sigma_{st}\partial_{rs}\partial_{tu}+t_1(n)D\}$$

$$+\{\frac{4}{3}\frac{1}{n^2}\sum_{rstuvw}\sigma_{wr}\sigma_{st}\sigma_{uv}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\sum_{rstuvwxy}\sigma_{ur}\sigma_{st}\sigma_{yv}\sigma_{wx}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}\partial_{xy}$$

$$(3)\qquad +t_2(n)D+\frac{1}{2}t_1^2(n)D+\frac{1}{n}\sum_{rstu}\sigma_{ur}\sigma_{st}(t_1^{(rs,tu)}(n)D+2t_1^{(rs)}(n)\partial_{tu}D$$

$$+t_1(n)\partial_{rs}\partial_{tu}D\,)\}+O(\frac{1}{n^3})\Big]\cdot P\{T(X,\Sigma)\le t_0\}$$

が得られる。 $D\equiv\partial/\partial t_0$, $t_1^{(rs)}(n)=\frac{1}{2}(1+\delta_{rs})\partial t_1(n)/\partial\sigma_{rs}$, … である。 $t_i(n)\equiv 0$, $t_1^{(rs,s)}(n)\equiv 0$, … とすれば, $P\{T(X,S_n)\le t_0\}$ の展開式となる。上の各項に含まれる微係数を評価すれば, n^{-2}のオーダーの項までの漸近展開が得られる。G.S.James [6], 塩谷 [9, 10], 伊藤 [3,4], 丘本 [7] 等の仕事はこの種のものである。しかし誤差に対する理論的限界を評価することが困難で, 個々の場合には何らかの数値的なチエックを必要とする段階である。

仮説が正しくない場合の検定力関数を求めること, 換言すれば, 検定統計量の *nonnull distribution* を求めることはますます困難であり, こゝでも漸近展開による近似を得ようと努力される。そして上のような方法とか, 特性関数の展開の反転を利用するなどの方法がとられる。

ところで一方では多変量正規理論に, A.T. James [5] により, *Group Representation* の理論が導入され, それまで得られなかつた各種統計量の一般分布が, *zonal polynomial* による展開式として正確な表現が与えられるようになつた。この講究

録の早川氏のすぐれた論文にもその例がみられる。しかし正確な表現が与えられるが，いざ具体的に数値的に評価しようとするとき，またその正確な表現から出発して何かの問題を解くために先に進もうとするときには，まだまだ動きがとれない。その理由は，zonal polynomial の性質がまだまだ十分わかつていないこと，及び，まだ数値的な評価に耐えるほど簡明ではないということであろうと思う。このため漸近的な展開は依然として重要であり，exact な分布を zonal polynomial で展開する手前でくずして漸近的な展開を得る研究も最近にはみられ，また数値的にも検討されるようになつた。とにかく正確な分布の表現が得られ目標がはつきりしてきている以上，この方からの研究を進めると同時に，いままでの漸近展開による近似の精度もはつきりさせられてくるであろうし，漸近分布そのものもすぐれたものが得られるようになることが大いに期待されるのである。

以上は多変量解析論にあらわれる漸近分布に関するごく大雑把な概観であり，将来の研究方向に対する私見を述べたものであるが，筆者は正確な分布とは反対の方向からの approach の一助として，Wishart 行列の関数として得られる検定統計量が多いことに着目し，その nonnull distributions の第一次近似にあたるものをいくつか求めた。§2 に今までに得た結果

をリストし，§3で *step-down* 方式による成分変量の組の間の独立性を検定する場合を取り扱う。

§2. すでに求められている結果.

母集団は p 変量正規分布でその分散·共分散行列，相関行列をそれぞれ $\Sigma\equiv(\sigma_{ij})>0$，$P\equiv(\rho_{ij})>0$ とする．標本の方のものをそれぞれ $S\equiv(s_{ij})$，$R\equiv(r_{ij})$ で表わし，その自由度は n である。そして S, R, Σ, P に対して

$$(4)\quad S=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_q \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{array} & \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{q1} & \cdots & S_{qq} \end{bmatrix} \end{array},\quad S_{(i)}=\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{i1} & \cdots & s_{ii} \end{bmatrix},\quad S_{[i]}=\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{i1} & \cdots & S_{ii} \end{bmatrix}$$

のような記号を用いる。

[I] $\sqrt{n}\{(|R_{(2)}|,\cdots,|R_{(p)}|)-(|P_{(2)}|,\cdots,|P_{(p)}|)\}$ の同時極限分布は，平均 $(0,\cdots,0)$ の正規分布で，その共分散は $i\leq j$ のとき

$$(5)\quad \phi_{ii}=2|P_{(i)}|^2(\mathrm{tr}\,P_{(i)}^{(2)}-i),$$

$$(6)\quad \phi_{ij}=2|P_{(i)}||P_{(j)}|\{\mathrm{tr}\,P_{(i)}^2-i+\mathrm{tr}\,P_{ij}^{*\prime}(I-P_{(i)}^{-1})P_{ij}^*\}$$

こゝに $P_{ij}^*=(\rho_{\alpha\beta})$，$\alpha=1,\cdots,i$；$\beta=i+1,\cdots,j$。$i>j$ のときは上の式で i と j を交換したものである。

[II] $\sqrt{n}\{|R|-|P|\}$ の極限分布は平均 0，分散 $2|P|^2(\mathrm{tr}\,P^2-p)$ をもつ正規分布である。

[III] p 変数を q 個の組に分けたとき，独立性の尤度比検定

規準 $V=|S|/(|S_{11}|\cdots|S_{qq}|)=|R|/(|R_{11}|\cdots|R_{qq}|)$ の漸近分布は，平均 $\mu=|\Sigma|/(|\Sigma_{11}|\cdots|\Sigma_{qq}|)=|P|/(|P_{11}|\cdots|P_{qq}|)$，分散 $\frac{2}{n}\mu^2\{tr(D_\Sigma^{-1}\Sigma)^2-p\}=\frac{2}{n}\mu^2\{tr(D_P^{-1}P)^2-p\}$ の正規分散である。こゝに $D_\Sigma=diag\{\Sigma_{11},\cdots,\Sigma_{qq}\}$，$D_P=diag\{P_{11},\cdots,P_{qq}\}$．独立性の仮説が正しいとき分布は degenerate する。

[IV] Sphericity，すなわち，$H_0:\Sigma=\sigma^2 I$ の尤度比検定規準 $W=|S|/(trS/p)^p$ の漸近分布は，平均 $\tau=|\Sigma|/(tr\Sigma/p)^p$，分散 $\frac{2}{n}\tau^2\{p^2tr\Sigma^2/(tr\Sigma)^2-p\}$ の正規分布である。

[V] Roy-Bargmann による step-down multiple correlation は次のように定義される。$\bar{r}_i\equiv\bar{r}_{i(1,\cdots,i-1)}$，$\bar{\rho}_i\equiv\bar{\rho}_{i(1,\cdots,i-1)}$ を x_i と $(x_1,\cdots,x_{i-1})$ の间の重相関係数とするとき

(7) $1-\bar{r}_i^2=|S_{(i)}|/(s_{ii}|S_{(i-1)}|)$，$1-\bar{\rho}_i^2=|\Sigma_{(i)}|/(\sigma_{ii}|\Sigma_{(i-1)}|)$，$i=2,\cdots,p$

このとき，$\sqrt{n}\{(\bar{r}_2^2,\cdots,\bar{r}_p^2)-(\bar{\rho}_2^2,\cdots,\bar{\rho}_p^2)\}$ の極限分布は正規で，平均は $(0,\cdots,0)$，分散共分散は

(8) $\varphi_{ii}=4\bar{\rho}_i^2(1-\bar{\rho}_i^2)^2$，

(9) $\varphi_{ij}=\varphi_{ji}=2(1-\bar{\rho}_i^2)(1-\bar{\rho}_j^2)\{\bar{\rho}_{ij}^2-\bar{\rho}_{j(1,\cdots,i)}^2+\bar{\rho}_{j(1,\cdots,i-1)}^2\}$，$(i<j)$．

[VI] x_1 と $(x_2,\cdots,x_i)$ の间の重相関係数を $\dot{r}_i\equiv r_{1(2,\cdots,i)}$（標本），$\dot{\rho}_i\equiv\rho_{1(2,\cdots,i)}$（母集団）で表わす。$\dot{r}_2^2,\cdots,\dot{r}_p^2$ の漸近的同時分布は，平均が $(\dot{\rho}_2^2,\cdots,\dot{\rho}_p^2)$，分散共分散が

(10) $\psi_{ii}=\frac{4}{n}\dot{\rho}_i^2(1-\dot{\rho}_i^2)^2$，　$\psi_{ij}=\frac{2}{n}\dot{\rho}_i^2(1-\dot{\rho}_j^2)(2-\dot{\rho}_i^2-\dot{\rho}_j^2)$，$(i<j)$

なる正規分布である。

§3. Step-Down 方式による成分変量の組の間の独立性を検定するための統計量の漸近的同時分布.

独立性の検定の対象とされている p-変量ベクトルの分割を $\underset{p}{\underline{x}'} = (\underset{p_1}{\underline{x}_1'}, \underset{p_2}{\underline{x}_2'}, \cdots, \underset{p_q}{\underline{x}_q'})$ とする。§2の記号を使つて，全体的な独立性の仮説 $H_0 : \Sigma_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ を次のように $q-1$ 個の部分仮説に分解する。

$$(11) \qquad H_0 = H_0^{(1)} \cap H_0^{(2)} \cap \cdots \cap H_0^{(q-1)}$$

$$(12) \qquad H_0^{(i)} : \ \underline{x}_{i+1}' \text{ と } (\underline{x}_1', \cdots, \underline{x}_i') \text{ は独立；} \Sigma_{i+1,1} = \cdots = \Sigma_{i+1,i}$$

$i = 1, \cdots, q-1$。これら $q-1$ 個の仮説が全部採択されるときに限つて H_0 は採択され，一つでも棄却される部分仮説があれば，H_0 は棄却される。変量の組の並べ方に対して不変でなく，実際的考慮により前もつて順序をきめておかねばならない。またこの仮説の分解により，不十分ではあるが，どの部分に独立性があり，どの部分に従属性があるかの知識を得るのに助けとなるであらう。

$H_0^{(i)}$ を検定するのに $(\underline{x}_1', \cdots, \underline{x}_{i+1}')$ の周辺分布における尤度比検定規準

$$(13) \qquad V_i = |S_{[i+1]}| / (|S_{[i]}| \, |S_{i+1,i+1}|), \qquad i = 1, \cdots, q-1$$

を用いれば，これは不偏検定である [8]。そして§2の [III] における全体的な意味における独立性の検定統計量 V との関係は

$$(14)\qquad V=\frac{|S|}{|S_{11}||S_{22}|\cdots|S_{qq}|}=\frac{|S_{[2]}|}{|S_{11}||S_{22}|}\cdot\frac{|S_{[3]}|}{|S_{[2]}||S_{33}|}\cdots\cdots\frac{|S_{[q]}|}{|S_{[q-1]}||S_{qq}|}$$
$$=V_1V_2\cdots V_{q-1}$$

となつている。H_0の下では，V_i，$i=1,\cdots,q-1$ は互に独立であるから Box による漸近展開を用いて

$$(15)\qquad W_i=-\{n-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(p_1+\cdots+p_{i+1})\}\log V_i,\quad i=1,\cdots,q-1$$

が自由度 $p_{i+1}(p_1+\cdots+p_i)$ の χ^2分布すると近似して検定が行われる。

すなわち与えられた有意水準αに対して，

$$(16)\qquad \alpha=1-\prod_{i=1}^{q-1}(1-\alpha_i)$$

を満たすようにα_iを定め，χ^2表より上方 $100\alpha_i$ %点 $\chi^2_{\alpha_i}$ を求めて，すべての $i=1,\cdots,q-1$ に対して $W_i\leq\chi^2_{\alpha_i}$ が成立すれば，H_0を採択し，少くとも1つのiに対して成り立たなければH_0を棄却する。

さてこゝで問題にしようというのは，上の V_i，$i=1,\cdots,q-1$ の，H_0が真でない一般のΣの時の漸近分布である。いますべての$H_0^{(i)}$，$i=1,\cdots,q-1$ が真でないものと仮定する。V_iは Wishart 行列の関数であること，$S=\Sigma$ の近傍で2階の微係数をもつことに注意すれば，$(V_1,V_2,\cdots,V_{q-1})$は漸近的に，平均ベクトル$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{q-1})$，$\mu_i=|\Sigma_{[i+1]}|/(|\Sigma_{[i]}||\Sigma_{i+1,i+1}|)$，をもつ正規分布に従うことがわかる。[1の定理4・2・5]　問題は分散,共分散を評価することである。いわゆるデルタ法により，$i<j$として

$$\mathrm{Cov}(V_i, V_j) = \mathrm{Cov}\left(\frac{|S_{[i+1]}|}{|S_{[i]}||S_{i+1,i+1}|}, \frac{|S_{[j+1]}|}{|S_{[j]}||S_{j+1,j+1}|}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_i \mu_j \Bigg[\frac{\mathrm{Cov}(|S_{[i+1]}|, |S_{[j+1]}|)}{|\Sigma_{[i+1]}||\Sigma_{[j+1]}|} + \frac{\mathrm{Cov}(|S_{[i]}|, |S_{[j]}|)}{|\Sigma_{[i]}||\Sigma_{[j]}|} + \frac{\mathrm{Cov}(|S_{i+1,i+1}|, |S_{j+1,j+1}|)}{|\Sigma_{i+1,i+1}||\Sigma_{j+1,j+1}|} \\
&\quad + \frac{\mathrm{Cov}(|S_{i+1,i+1}|, |S_{[j]}|)}{|\Sigma_{i+1,i+1}||\Sigma_{[j]}|} + \frac{\mathrm{Cov}(|S_{[i]}|, |S_{j+1,j+1}|)}{|\Sigma_{[i]}||\Sigma_{j+1,j+1}|} - \frac{\mathrm{Cov}(|S_{[i]}|, |S_{[j+1]}|)}{|\Sigma_{[i]}||\Sigma_{[j+1]}|} \\
&\quad - \frac{\mathrm{Cov}(|S_{[i+1]}|, |S_{[j]}|)}{|\Sigma_{[i+1]}||\Sigma_{[j]}|} - \frac{\mathrm{Cov}(|S_{[i+1]}|, |S_{j+1,j+1}|)}{|\Sigma_{[i+1]}||\Sigma_{j+1,j+1}|} - \frac{\mathrm{Cov}(|S_{i+1,i+1}|, |S_{[j+1]}|)}{|\Sigma_{i+1,i+1}||\Sigma_{[j+1]}|} \Bigg]
\end{aligned} \tag{17}$$

を計算することになる。これらの各種の共分散を計算するために次の公式を利用する。

［公式］ $f(S)$, $g(S)$ を S の関数とし，2 階の微係数をもつとき，同時漸近分布における共分散は

$$\mathrm{Cov}\{f(S), g(S)\} = \frac{2}{n} f(\Sigma) g(\Sigma)\, \mathrm{tr}(\Phi\Sigma\Psi\Sigma) \tag{18}$$

であたえられる。たゞし $\Phi = (\phi_{ij})$, $\phi_{ij} = \partial \log f(\Sigma)/\partial\sigma_{ij}$, $\Psi = (\psi_{ij})$, $\psi_{ij} = \partial \log g(\Sigma)/\partial\sigma_{ij}$ である。

［証明］

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\{f(S), g(S)\} &= E\left\{\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial f(S)}{\partial s_{ij}}\Big|_{S=\Sigma} (s_{ij} - \sigma_{ij})\right\}\left\{\sum_{k,\ell=1}^{p} \frac{\partial g(S)}{\partial s_{k\ell}}\Big|_{S=\Sigma} (s_{k\ell} - \sigma_{k\ell})\right\} \\
&= f(\Sigma) g(\Sigma) \sum_{i,j=1}^{p} \sum_{k,\ell=1}^{p} \phi_{ij} \psi_{k\ell}\, E(s_{ij} - \sigma_{ij})(s_{k\ell} - \sigma_{k\ell}) \\
&= f(\Sigma) g(\Sigma) \sum_{i,j=1}^{p} \sum_{k,\ell=1}^{p} \phi_{ij} \psi_{k\ell} \cdot \frac{1}{n} (\sigma_{ik}\sigma_{j\ell} + \sigma_{i\ell}\sigma_{jk}) \\
&= \frac{2}{n} f(\Sigma) g(\Sigma) \sum_{i,j=1}^{p} \sum_{k,\ell=1}^{p} \phi_{ij} \psi_{k\ell} \sigma_{ik} \sigma_{j\ell} \\
&= \frac{2}{n} f(\Sigma) g(\Sigma)\, \mathrm{tr}(\Phi\Sigma\Psi\Sigma)
\end{aligned}$$

この公式を用いて (17) の共分散を 2, 3 例として計算してみよう。

(19) $\quad Cov(|S_{[\alpha]}|,|S_{[\beta]}|)=\frac{2}{n}(p_1+p_2+\cdots+p_\alpha)|\Sigma_{[\alpha]}||\Sigma_{[\beta]}|$, $(\alpha\leq\beta)$

[証明] 公式により $\quad Cov(|S_{[\alpha]}|,|S_{[\beta]}|)=\frac{2}{n}|\Sigma_{[\alpha]}||\Sigma_{[\beta]}|\,tr(\Phi\Sigma\Psi\Sigma)$.

$$\phi_{ij}=\partial\log\begin{vmatrix}\Sigma_{[\alpha]} & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}/\partial\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\Sigma_{[\alpha]}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{ij},\quad \Phi=\begin{bmatrix}\Sigma_{[\alpha]}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

同様に

$$\Psi=\begin{bmatrix}\Sigma_{[\beta]}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

故に

$$\Phi\Sigma\Psi\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{[\alpha]}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_{[\alpha]} & *\\ * & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_{[\beta]}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_{[\beta]} & *\\ * & *\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}I_{p_1+\cdots+p_\alpha} & *\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{p_1+\cdots+p_\beta} & *\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{p_1+\cdots+p_\alpha} & *\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$tr(\Phi\Sigma\Psi\Sigma)=p_1+\cdots+p_\alpha$$

かくして (19) の結果が得られる。

特に $\alpha=\beta$ のときは

(20) $\quad Var(|S_{[\alpha]}|)=\frac{2}{n}(p_1+\cdots+p_\alpha)|\Sigma_{[\alpha]}|^2$.

同様に

(21) $\quad Cov(|S_{\alpha\alpha}|,|S_{[\beta]}|)=\frac{2}{n}p_\alpha|\Sigma_{\alpha\alpha}||\Sigma_{[\beta]}|$, $\quad(\alpha\leq\beta)$

(22) $\quad Cov(|S_{[\alpha]}|,|S_{\beta\beta}|)=\frac{2}{n}|\Sigma_{[\alpha]}||\Sigma_{\beta\beta}|\,tr\left\{\Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta1}\cdots\Sigma_{\beta\alpha})\Sigma_{[\alpha]}^{-1}\begin{bmatrix}\Sigma_{1\beta}\\ \vdots\\ \Sigma_{\alpha\beta}\end{bmatrix}\right\}$, $(\alpha<\beta)$

[証明] 公式により $\quad Cov(|S_{[\alpha]}|,|S_{\beta\beta}|)=\frac{2}{n}|\Sigma_{[\alpha]}||\Sigma_{\beta\beta}|\,tr(\Phi\Sigma\Psi\Sigma)$.

$$\Phi\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{[\alpha]}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{[\alpha]} & \begin{bmatrix} \Sigma_{1,\alpha+1} & \cdots & \Sigma_{1q} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \Sigma_{\alpha,\alpha+1} & \cdots & \Sigma_{\alpha q} \end{bmatrix} \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{p_1+\cdots+p_\alpha} & \Sigma_{[\alpha]}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma_{1,\alpha+1} & \cdots & \Sigma_{1q} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \Sigma_{\alpha,\alpha+1} & \cdots & \Sigma_{\alpha q} \end{bmatrix} \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\Psi\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta 1} \cdots \Sigma_{\beta,\beta-1}) & I_{p_\beta} & \Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta,\beta+1} \cdots \Sigma_{\beta q}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故に

$$\Phi\Sigma\Psi\Sigma = \begin{array}{c} p_1+\cdots+p_\alpha \\ p_{\alpha+1}+\cdots+p_{\beta-1} \\ p_\beta \\ p_{\beta+1}+\cdots+p_q \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_{p_1+\cdots+p_\alpha} & \Sigma_{[\alpha]}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma_{1,\alpha+1} & \cdots & \Sigma_{1,\beta-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \Sigma_{\alpha,\alpha+1} & \cdots & \Sigma_{\alpha,\beta-1} \end{bmatrix} & \Sigma_{[\alpha]}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma_{1\beta} \\ \vdots \\ \Sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} & \Sigma_{[\alpha]}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma_{1,\beta+1} & \cdots & \Sigma_{1q} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \Sigma_{\alpha,\beta+1} & \cdots & \Sigma_{\alpha q} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} p_1+\cdots+p_\alpha & p_{\alpha+1}+\cdots+p_{\beta-1} & p_\beta & p_{\beta+1}+\cdots+p_q \end{array} \end{array} \times$$

$$\times \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta 1} \cdots \Sigma_{\beta\alpha}) & \Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta,\alpha+1} \cdots \Sigma_{\beta,\beta-1}) & I_{p_\beta} & \Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta,\beta+1} \cdots \Sigma_{\beta q}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} p_1+\cdots+p_\alpha & p_{\alpha+1}+\cdots+p_{\beta-1} & p_\beta & p_{\beta+1}+\cdots+p_q \end{array} \end{array} \begin{array}{c} p_1+\cdots+p_\alpha \\ p_{\alpha+1}+\cdots+p_{\beta-1} \\ p_\beta \\ p_{\beta+1}+\cdots+p_q \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} p_1+\cdots+p_\alpha \\ p_{\alpha+1}+\cdots+p_{\beta-1} \\ p_\beta \\ p_{\beta+1}+\cdots+p_q \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \Sigma_{[\alpha]}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma_{1\beta} \\ \vdots \\ \Sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta 1} \cdots \Sigma_{\beta\alpha}) & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} p_1+\cdots+p_\alpha & p_{\alpha+1}+\cdots+p_{\beta-1} & p_\beta & p_{\beta+1}+\cdots+p_q \end{array} \end{array}$$

故に

$$tr(\Phi\Sigma\Psi\Sigma)=tr\{\Sigma_{\beta\beta}^{-1}(\Sigma_{\beta 1}\cdots\Sigma_{\beta\alpha})\Sigma_{[\alpha]}^{-1}\begin{bmatrix}\Sigma_{1\beta}\\ \vdots\\ \Sigma_{\alpha\beta}\end{bmatrix}\}$$

となるから (22)の結果が得られる。同様に

(23) $$Cov(|S_{\alpha\alpha}|,|S_{\beta\beta}|)=\frac{2}{n}|\Sigma_{\alpha\alpha}||\Sigma_{\beta\beta}|\,tr(\Sigma_{\alpha\alpha}^{-1}\Sigma_{\alpha\beta}\Sigma_{\beta\beta}^{-1}\Sigma_{\beta\alpha}),\ (\alpha\leq\beta)$$

も計算される。

(19) ～ (23) の結果を (17) に適用すれば

$$\begin{aligned}Cov(V_i,V_j)=\frac{2}{n}\mu_i\mu_j\Big[&(p_1+\cdots+p_{i+1})+(p_1+\cdots+p_i)+tr(\Sigma_{i+1,i+1}^{-1}\Sigma_{i+1,j+1}\Sigma_{j+1,j+1}^{-1}\Sigma_{j+1,i+1})\\ &+p_{i+1}+tr\{\Sigma_{j+1,j+1}^{-1}(\Sigma_{j+1,1}\cdots\Sigma_{j+1,i})\Sigma_{[i]}^{-1}\begin{bmatrix}\Sigma_{1,j+1}\\ \vdots\\ \Sigma_{i,j+1}\end{bmatrix}\}-(p_1+\cdots+p_i)\\ &-(p_1+\cdots+p_{i+1})-tr\{\Sigma_{j+1,j+1}^{-1}(\Sigma_{j+1,1}\cdots\Sigma_{j+1,i+1})\Sigma_{[i+1]}^{-1}\begin{bmatrix}\Sigma_{1,j+1}\\ \vdots\\ \Sigma_{i+1,j+1}\end{bmatrix}\}-p_{i+1}\Big]\end{aligned}$$

(24) $$\begin{aligned}=\frac{2}{n}\mu_i\mu_j\Big[&tr(\Sigma_{i+1,i+1}^{-1}\Sigma_{i+1,j+1}\Sigma_{j+1,j+1}^{-1}\Sigma_{j+1,i+1})+tr\{\Sigma_{j+1,j+1}^{-1}(\Sigma_{j+1,1}\cdots\Sigma_{j+1,i})\Sigma_{[i]}^{-1}\begin{bmatrix}\Sigma_{1,j+1}\\ \vdots\\ \Sigma_{i,j+1}\end{bmatrix}\}\\ &-tr\{\Sigma_{j+1,j+1}^{-1}(\Sigma_{j+1,1}\cdots\Sigma_{j+1,i+1})\Sigma_{[i+1]}^{-1}\begin{bmatrix}\Sigma_{1,j+1}\\ \vdots\\ \Sigma_{i+1,j+1}\end{bmatrix}\}\Big],\ (i<j).\end{aligned}$$

同様の計算により, V_i, $i=1,\cdots,q-1$, の分散は

(25) $$Var(V_i)=\frac{4}{n}\mu_i^2\,tr\{\Sigma_{i+1,i+1}^{-1}(\Sigma_{i+1,1}\cdots\Sigma_{i+1,i})\Sigma_{[i]}^{-1}\begin{bmatrix}\Sigma_{1,i+1}\\ \vdots\\ \Sigma_{i,i+1}\end{bmatrix}\}$$

と求められる。

(24) はまとめて次のように書くこともできる。

(26) $\mathrm{Cov}(V_i, V_j) = \frac{2}{n}\mu_i\mu_j \cdot \mathrm{tr}\left\{\Sigma_{j+1,j+1}^{-1}(\Sigma_{j+1,1}\cdots\Sigma_{j+1,i+1})\left(\begin{bmatrix}\Sigma_{[i]} & 0\\ 0 & \Sigma_{i+1,i+1}\end{bmatrix}^{-1} - \Sigma_{[i+1]}^{-1}\right)\begin{bmatrix}\Sigma_{1,j+1}\\ \vdots \\ \Sigma_{i+1,j+1}\end{bmatrix}\right\}$

また次の式は，$\mathrm{Cov}(V_i, V_j)$，$\mathrm{Var}(V_i)$ の意味を暗示するものであろう。

(27) $\mathrm{Cov}(V_i, V_j) = \frac{2}{n}\mu_i\mu_j$ [{ x'_{j+1} と ($x'_1, \cdots, x'_i$) の間の正準相関係数の自乗和}

+{ x'_{j+1} と x'_{i+1} の間の正準相関係数の自乗和}

−{ x'_{j+1} と ($x'_1, \cdots, x'_i, x'_{i+1}$) の間の正準相関係数の自乗和}]

(28) $\mathrm{Var}(V_i) = \frac{4}{n}\mu_i^2$ { x'_{i+1} と ($x'_1, \cdots, x'_i$) の間の正準相関係数の自乗和}

かくして

[すべての $H_0^{(i)}$, $i=1, \cdots, g-1$, が真でないないとき，$(V_1, \cdots, V_{g-1})$ は漸近的に，平均ベクトル $(\mu_1, \cdots, \mu_{g-1})$，分散,共分散 (24), (25) をもつ $g-1$ 変量の正則正規分布にしたがう。]

$H_0^{(i)}$, $i=1, \cdots, g-1$ のうちに真のものがある場合には，(25) からわかるように，漸近分布は異常分布になる。$H_0^{(g-1)}, H_0^{(g-2)}, \cdots, H_0^{(j)}$ が真であるときには，$V_{g-1}, \cdots, V_j$ は互に独立でかつ $(V_{j-1}, V_{j-2}, \cdots, V_1)$ とも独立で別に取り出して取り扱える。

参 考 文 献

[1] Anderson, T. W., (1958), Introduction to Multivariate Statistical Analysis, New York, John Wiley & Sons.

[2] Box, G. E. P., (1949), " A general distribution theory for a

class of likelihood criteria," Biometrika, Vol. 36, PP. 317-346

[3] Ito, K., (1956), "Asymptotic formulae for the distribution of Hotelling's generalized T_0^2-statistics," Ann. Math. Stat., Vol. 27.

[4] Ito, K., (1960), "Asymptotic formulae for the distribution of Hotelling's generalized T_0^2 statistic, II," Ann. Math. Stat., Vol. 31.

[5] James, A. T., (1964), "Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples" Ann. Math. Stat., Vol. 35

[6] James, G. S., (1954), "Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown," Biometrika, Vol. 41, PP. 19-43

[7] Okamoto, M., (1963), "An asymptotic expansion for the distribution of the linear discriminant function," Ann. Math. Stat., Vol. 34

[8] Narain, R. D., (1950), "On the completely unbiased character of tests of independence in multivariate normal systems," Ann. Math. Stat., Vol. 21, PP. 293-298.

[9] 塩谷実 (1956), Hotellingの T^2 統計量の分布について, 統数研彙報, オ4巻, 33-42頁.

[10] Siotani, M., (1959), "The extreme value of the generalized distances of the individual points in the multivariate normal sample." Ann. Inst. Stat. Math., Vol. 10, PP. 183-208.