数理解析研究所講究録
第44巻 1968年 87-102

1 多変量正規分布での推定量の許容性
2 多変量正規分布に関するミニマックス不変予測域

大阪市大 商学部 石井 吾郎

§1. 序

1 については多変量正規分布に関し普通用いられている平均ベクトル及び共分散行列の推定量が許容的なものであるかと云うことについての Stein [11], [12] の結果を少し修正した形で紹介する。その内容は石井 [4], [5] と殆んど同様であるのでここには書かない。 そこで

2 についてのみ記述する. §2では分布形を正規分布とはかぎらず ミニマックス不変予測域の一般論を述べる. §3において多変量正規分布の 線形模型に対する予測問題に§2の 結果を適用する. 尚ほ詳しくは Ishii [7] を見られたい.

§2. ミニマックス不変予測域

$X=(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ と $Y=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ とは互に独立ではあるが同じ母数 θ を持つ分布に従う確率変数と

する．Xは観測可能な確率変数で，Yは未来の確率変数であるとしよう．　$\mathcal{X}=\{X\}$，$\mathcal{Y}=\{Y\}$，Xを観測したとき$\mathcal{Y}$の中にある可測集合 S_X を作り

(1)　$\forall\theta \qquad P_\theta\{Y\in S_X\}\geqq 1-\varepsilon$

であつて且つ S_X がある意味でなるべく狭いものを求めたい．

$n=1$ のときには Fraser－Guttman [2],[3] の β－expectation tolerance region の考え方と一致する．$n>1$ のとき Ishii－Kudo [6] で1変量正規分布の線形模型に対し予測域を作つた．$n>1$ で且つ正規分布でない他の分布に対する予測域，及び多変量正規分布の線形模型に対する予測域を Ishii [7] で扱かつている．この paper で使う方法は [6] [7] の不変原則と Stein [10]，Wijsman [13] の random orthogonal transformation である．

以下の記号を用いる．

$\mathcal{X}=\{X=(X_1, X_2, \cdots, X_m)\}$

$\mathcal{Y}=\{Y=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)\}$

$\Theta=\{\theta\}$

$\mathcal{P}=\{f_\theta\ ;\ \theta\in\Theta,\ f_\theta=p(X,\theta)\,q(Y,\theta)\}$，$p(X,\theta)\,q(Y,\theta)$ は$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$上の$\sigma$－有限な測度に関する確率密度．

$\mathcal{Z}=\{Z\ ;\ Z=Z(X)$，最小十分統計量$\}$，$p(X,\theta)$から導かれるZの確率密度を　$t(Z,\theta)$　とする．

$\mathcal{A}=\{A(Y)\ ;\ 0\leqq A(Y)\leqq 1$ なる可測関数$\}$　$A(Y)$ は randomized prediction region，$A(Y)$ がある集合の指示関数になるとその集合を予測域という．

$G=\{g\}$　$\mathfrak{X}$上の変換群

$\hat{G}=\{\hat{g}\}$　$\mathcal{Y}$上の変換群

$\mathring{G}=\{\mathring{g}\}$　$\mathcal{Z}$上の変換群で $\mathring{g}Z(X)=Z(gX)$ をみたすもの

$\bar{G}=\{\bar{g}\}$　Θ上の変換群

$\tilde{G}=\{\tilde{g}\}$　$\mathcal{A}$上の変換群で $\tilde{g}A(Y)=A(\hat{g}^{-1}Y)$ をみたすもの

G，$\hat{G}$，$\mathring{G}$，$\bar{G}$，$\tilde{G}$　の間の関係は次の関係で $\leftrightarrow$ 同型，$\rightarrow$ 準同型であるとする．

$g\rightarrow\mathring{g}\leftrightarrow\bar{g}\rightarrow\hat{g}\leftrightarrow\tilde{g}$

仮定1．　Θは$\bar{G}$の下で等質空間である．Θのある点を固定して，それをθ_0とする．

仮定2．　$\mathcal{Z}$と$\mathring{G}$には $1:1$ の対応があり，且つ$\mathcal{Z}$は$\mathring{G}$の下で等質空間である．$\mathring{G}$の単位元に対応する$\mathcal{Z}$の元をZ_0とかく．

仮定3．　$\mathfrak{X}$，$\mathcal{Y}$，$\mathcal{Z}$　上のσ有限な測度λ_1，λ_2，λ_3　に関し変換 g，$\hat{g}$，$\mathring{g}$ に対するヤコービアンΓ_1，Γ_2，Γ_3があつて

(i)　$\lambda_1(dgX)=\Gamma_1(g)\lambda_1(dX)$，　$\lambda_2(d\hat{g}Y)=\Gamma_2(\hat{g})\lambda_2(dY)$，

$\lambda_3(d\mathring{g}Z)=\Gamma_3(\mathring{g})\lambda_3(dZ)$

(ii) $p(X, \bar{g}^{-1}\theta) = p(gX, \theta)\,\Gamma_1(g)$, $\quad q(Y, \bar{g}^{-1}\theta) = q(\hat{g}Y, \theta)\,\Gamma_2(\hat{g})$

$t(Z, \bar{g}^{-1}\theta) = t(\mathring{g}Z, \theta)\,\Gamma_3(\mathring{g})$

この仮定より

$\Gamma_1(gg') = \Gamma_1(g)\Gamma_1(g')$, $\Gamma_2(\hat{g}\hat{g}') = \Gamma_2(\hat{g})\Gamma_2(\hat{g}')$, $\Gamma_3(\mathring{g}\mathring{g}') = \Gamma_3(\mathring{g})\Gamma_3(\mathring{g}')$

ここで2つの損失関数を定義する.

$$L_1(\theta, A(\cdot)) = \int_{\mathcal{Y}} (1 - A(Y))\, q(Y, \theta)\, \lambda_2(dY)$$

$$L_2(\theta, A(\cdot)) = L_2(\bar{g}\theta_0, A(\cdot)) = \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_{\mathcal{Y}} A(Y)\, \lambda_2(dY)$$

$$= \Gamma_2(\hat{g}^{-1}\hat{g}') \int_{\mathcal{Y}} A(\hat{g}'Y)\, \lambda_2(dY)$$

L_1 は $A(Y)$ の中に Y が含まれる確率を評価するもので，L_2 は $A(Y)$ の広さを評価するものである． L_2 の第3項に $\Gamma_2(\hat{g}^{-1})$ がついている理由は： 例えば X，Y が実数のとき $X \to aX$, $Y \to aY$ なる変換を施こしたときには予測域も当然 a 倍になるが損失は大きくなつたわけではないから $\frac{1}{a}$ をかけておくのが合理的であろう． この様な考えを一般化したわけである.

この損失関数 L_1, L_2 は

$$L_1(\bar{g}\theta, \tilde{g}A) = L_1(\theta, A)$$

$$L_2(\bar{g}\theta, \hat{g}A) = L_2(\theta, A)$$

なる関係をみたしている． 則ち損失関数はG－不変である．

Xを観測したとき，どのA(Y)をとるかをきめるのが予測方式である．

$$\delta : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}$$

を予測関数と呼ぶ． 予測関数δを採用したときの リスク

$r_1 = E(L_1(\theta, \delta(x)))$ につき

(1) $$\forall \theta \in \Theta , \quad r_1(\theta, \delta) = \iint_{\mathfrak{X}\mathcal{Y}} (1-\psi(x,Y))\, p(x,\theta)\, q(Y,\theta)\, \lambda_2(dY)\, \lambda_1(dx) \leqq \varepsilon$$

但し $\psi(x, \cdot) = \delta(x)$

のとき，δを水準 $1-\varepsilon$ の予測域という． 水準 $1-\varepsilon$ の予測域の中で第2のリスク $r_2 = E(L_2(\theta, \delta(x)))$ につき

(2) $$r_2(\theta, \delta) = \Gamma_2(\bar{g}^{-1}) \iint_{\mathfrak{X}\mathcal{Y}} \psi(x,Y)\ p(x, \bar{g}\theta_0)\ \lambda_2(dY)\ \lambda_1(dx)$$

但し $\bar{g}\theta_0 = \theta$

$\delta = \delta_0$ が $\sup_{\theta \in \Theta} r_2(\theta, \delta)$ の Minimum を与えているとき δ_0 を水準 $1-\varepsilon$ のミニマックス予測域であるという．

Z(X) は最小十分統計量であるから $\psi(X,Y)$ としてはZとYの関数になつているもののみを考える．すなわち $\psi(X,Y) = \varphi(Z,Y)$． Zが十分統計量であつて且つ $\mathring{g}Z(x) = Z(gx)$ なる性質を持つときには$\mathfrak{X}$上のG－不変な決定方式を$\mathfrak{Z}$上の$\mathring{G}$－不変な決定方式に持ち込みうる． 丘本[9] によると最

小十分統計量はこの性質をもつ。 損失関数がG－不変であるのでG－不変な決定方式を採用することにすると

$$\delta_0 \in \{\psi : \psi(X, Y) = \psi(gX, \hat{g}Y)\}$$

であり、更に最小十分統計量とYとの関数で且つG－不変なものの中からδ_0を選ぶことにすると

$$\delta_0 \in \{\varphi : \varphi(Z, Y) = \varphi(\mathring{g}Z, \hat{g}Y)\}$$

このようなものの中でミニマックスなものが見つかれば，それを ミニマックス不変予測域と呼ぶ． 以下において ミニマックス不変予測域を求める．

$\mathring{g}Z = Z_0$ なる $\mathring{g}$ を $\mathring{g}_Z^{-1}$ とかくことにする。

(3) $\quad \varphi(Z, Y) = \varphi(Z_0, \hat{g}_Z^{-1}Y) = \Phi(\hat{g}_Z^{-1}Y)$

$W = \hat{g}_Z^{-1}Y$ とおく ・

δとして(3)なるφを採用したときの第1のリスクr_1につき(1)は

$$r_1 = \iint_{\mathcal{Z}\,\mathcal{Y}} \varphi(Z, Y)\, g(Y, \theta)\, t(Z, \theta)\, \lambda_2(dY)\, \lambda_3(dZ) \geqq 1-\varepsilon$$

$$= \iint_{\mathcal{Z}\,\mathcal{Y}} \varphi(Z_0, \hat{g}_Z^{-1}Y)\, g(Y, \theta)\, t(Z, \theta)\, \lambda_2(dY)\, \lambda_3(dZ) \geqq 1-\varepsilon$$

$$\iint_{\mathcal{Z}\,\mathcal{Y}} \varphi(Z_0, W)\, g(\hat{g}_Z W, \bar{g}^{-1}\theta_0)\, t(Z, \bar{g}^{-1}\theta_0)\, \Gamma_2(\hat{g}_Z)\, \lambda_2(dW)\, \lambda_3(dZ) \geqq 1-\varepsilon$$

$$\iint_{\mathcal{Z}\,\mathcal{Y}} \Phi(W)\, g(\hat{g}\hat{g}_Z W, \theta_0)\, t(\mathring{g}Z, \theta_0)\, \Gamma_2(\hat{g})\, \Gamma_2(\hat{g}_Z)\, \Gamma_3(\mathring{g})\, \lambda_2(dW)\, \lambda_3(dZ) \geqq 1-\varepsilon$$

フビニの定理を用いて

$$(4)\quad \iint_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}} \Phi(W)\, g(\hat{g}_{z'} W, \theta_0)\, t(z', \theta_0)\, \Gamma_2(\hat{g}_{z'})\, \lambda_3(dz')\, \lambda_2(dW) \geqq 1-\varepsilon$$

$$但し\quad z' = \mathring{g} z, \quad \hat{g}_{z'} = \hat{g}\,\hat{g}_z$$

ここで

$$(5)\quad h(W) = \int_{\mathcal{Z}} g(\hat{g}_z W, \theta_0)\, t(z, \theta_0)\, \Gamma_2(\hat{g}_z)\, \lambda_3(dz)$$

とおくと，$h(W)$ は $W = \hat{g}_z^{-1} Y$ の密度関数で（それは θ とは無関係である）ある． このとき(4) は

$$(6)\quad \int_{\mathcal{Y}} \Phi(W)\, h(W)\, \lambda_2(dW) \geqq 1-\varepsilon$$

である． 次に才2のリスク r_2 につき (2) は

$$r_2 = \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \iint_{\mathcal{Z}\mathcal{Y}} \varphi(z, Y)\, t(z, \bar{g}\theta_0)\, \lambda_2(dY)\, \lambda_3(dz)$$

$$= \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_{\mathcal{Z}} \Gamma_2(\hat{g}_z^{-1}) \int_{\mathcal{Y}} \varphi(z_0, \hat{g}_z^{-1} Y)\, t(z, \bar{g}\theta_0)\, \lambda_2(dY)\, \lambda_3(dz)$$

$$= \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_{\mathcal{Z}} \Gamma_2(\hat{g}_z^{-1}) \int_{\mathcal{Y}} \Phi(W)\, t(z, \bar{g}\theta_0)\, \lambda_2(dW)\, \Gamma_2(\hat{g}_z)\, \lambda_3(d\overset{z}{W})$$

$$(7)\quad = \Gamma_2(\hat{g}^{-1}) \int_{\mathcal{Y}} \Phi(W)\, \lambda_2(dW)$$

条件 (6) をみたしながら (7) を最小にする $\Phi(W)$ はネイマンーピアッソンの Lemma と同じ考えにより

$$\Phi(W) = \begin{cases} 1 & h(W) > c \text{ のとき} \\ \gamma & h(W) = c \text{ のとき} \\ 0 & h(W) < c \text{ のとき} \end{cases}$$

であり，C 及び γ は (6) をみたすようにとる． $P(h(W)=C)=0$ のときには

(8) $S_x=\{Y:\ h(W)>C,\ W=\hat{g}_z^{-1}Y,\ Z=Z(X)\}$

なる S_x がミニマックス不変予測域を与える． 以上のことを定理の形にまとめると

定理 1. 仮定 1－3 がみたされているとき水準 $1-\varepsilon$ のミニマックス不変予測域は 次の S_x で与えられる．

$$S_x=\{Y;\ h(W)>C,\ W=\hat{g}_z^{-1}Y\ ,\ Z=Z(X)\}$$

ここに $h(W)$ は (5) 式で与えられ，C は (6) が成立するようにとる．

この定理で与えられたミニマックス不変予測域がミニマックス予測域である為には尚お若干の仮定が必要である．そのことについては [8][6][7] を見られたり．

§ 3. 多変量線形模型における予測域

§ 2 の結果を多変量線形模型に適用して見よう． 次の記号を用いることにする．

$$X=\underset{m\times p}{\begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mp} \end{bmatrix}}\ ,\qquad Y=\underset{n\times p}{\begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{np} \end{bmatrix}}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{ms} \end{bmatrix}_{m \times s}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{ns} \end{bmatrix}_{n \times s}$$

$$\mathrm{rank}\, P = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = k \leqq s < m$$

$$\exists\ U : n \times m \qquad Q = UP .$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{s1} & \cdots & \xi_{sp} \end{bmatrix}_{s \times p}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \cdots & \varepsilon_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{m1} & \cdots & \varepsilon_{mp} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{m+n,1} & \cdots & \varepsilon_{m+n,p} \end{bmatrix}_{(m+n) \times p}$$

ε_i を ε の第 i 行とすると ε_i, $i=1,2,\cdots m+n$ は互に独立で各 ε_i は $N(0,\ \sigma)$ に従う.

このとき 次の関係式が成り立っていると仮定する.

(1) $$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \xi + \varepsilon$$

(1) なる線形模型において X を観測して Y の予測域を作る.

(2) $g_{\alpha,\beta}$: $X \longrightarrow X\alpha + PP_1\beta$

$\hat{g}_{\alpha,\beta}$: $Y \longrightarrow Y\alpha + QP_1\beta$

但し α は $p\times p$ 三角行列 $\alpha_{ii}>0$, $\alpha_{ij}=0$ $i>j$

β は $k\times p$ 行列

P_1 は P の k コの線形独立な行ベクトルの転置

行列よりなる $s\times k$ 行列

なる変換を考える.

$$G=\{g_{\alpha,\beta}\}\ ,\quad \hat{G}=\{\hat{g}_{\alpha,\beta}\}$$

は

$$g_{\alpha_1,\beta_1}\,g_{\alpha_2,\beta_2}\,X = g_{\alpha_1,\beta_1}(X\alpha_2 + PP_1\beta_2) = X\alpha_2\alpha_1 + PP_1(\beta_2\alpha_1+\beta_1)$$

であるから

$$g_{\alpha_1,\beta_1}\,g_{\alpha_2,\beta_2} = g_{\alpha_2\alpha_1,\ \beta_2\alpha_1+\beta_1}$$

なる乗法に従う変換群である.

P の列ベクトルで張られる R^m の部分空間を $\angle(P)$ とする. $\angle(P)$ への射影作用素を C とすると, X を観測したときの最小十分統計量として

(3) $Z(X) = (Z_1(X),\ Z_2(X)) = (CX\ ,\ X'(I-C)X)$

を得る. $\mathcal{Z}=\{Z(X)\}$ 上に $g_{\alpha,\beta}$ より導かれる変換は

$$\mathring{g}_{\alpha,\beta}Z = (Z_1\alpha + PP_1\beta\ ,\ \alpha' Z_2\alpha) = Z(g_{\alpha,\beta}X)$$

である. 前節の ψ , φ は

$$\psi(X,Y) = \varphi(Z,\ Y)$$

$$= \varphi(Z_1, Z_2, Y) = \varphi(Z_1\alpha + PP_1\beta ; \alpha' Z_2 \alpha , Y\alpha + QP_1\beta)$$

となる. ここで $g_{\alpha,\beta}$ として

αを $\alpha = K^{-1}$ 但し $Z_2 = K'K$, Kは三角行列

βを $Z_1\alpha + PP_1\beta = 0$

にとると

(4) $\varphi = \varphi(0, I_p, (Y - UZ_1)K^{-1}) = \Phi((Y-UZ_1)K^{-1})$

(5) $= \Phi(W)$

但し $W = (Y - UZ_1)K^{-1}$

前節の定理1によればWの密度関数$h(W)$を求めることが出来れば, それより予測域を作ることが出来るわけである. よって以下で$h(W)$を求める.

Y, Z_1, Z_2 は互に独立で $\bar{N}(Q\xi, \sigma \otimes I_n)$, $\bar{N}(P\xi, *)$ ウィシャート分布 $W(m-k, \sigma)$ に従う.

γを三角行列で $\gamma \sigma \gamma' = I_p$

なるものとし, $Y^* = Y\gamma$, $UZ_1^* = UZ_1\gamma$, $Z_2^* = \gamma' Z_2 \gamma$

と変換すると, それらは

(6) $\bar{N}(Q\xi\gamma, I_p \otimes I_n)$, $\bar{N}(Q\xi\gamma, I_p \otimes UCU')$, $W(m-k, I_p)$

に従う.

$H = K\gamma$ とおくと

$Z_2^* = H'H$

$(Y^* - UZ_1^*)H^{-1} = (Y - UZ_1)K^{-1}$

であるから (4), (5) の Y, UZ_1, Z_2 を (6) に従うものとして扱つかつてよい。 $Y-UZ_1$ の分布は

$$Y-UZ_1 \ : \ \bar{N}(0, I_p \otimes (I_n + UCU'))$$

$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & k_{pp} \end{bmatrix}$ は $W(m-k, I_p)$ のバートレット分解であるから k_{ij} は互に独立でその分布は

k_{ii} : $d.f = m-i-k+1$ のカイ分布

k_{ij} : $N(0,1)$ $\quad i \neq j$

$$K = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & k_{1p} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & k_{p-1\,p} \\ \hline & 0 & & k_{pp} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} k_{11} & \cdots & k_{1\,p-1} & \\ & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & k_{p-1\,p-1} & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_{p-1} & \begin{matrix} k_{1p} \\ \vdots \\ k_{p-1\,p} \end{matrix} \\ \hline 0 & k_{pp} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} K_1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$K^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} K_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_{p-1} & \begin{matrix} -k_{1p} \\ \vdots \\ -k_{p-1\,p} \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_{p-1} & 0 \\ \hline 0 & k_{pp}^{-1} \end{array}\right]$$

$$\bar{W} = [\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_p] = [Y-UZ_1]K^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1p} \\ \vdots & & \\ w_{n1} & \cdots & w_{np} \end{bmatrix} = [\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_{p-1}, \bar{v}_p] \left[\begin{array}{c|c} I_{p-1} & 0 \\ \hline 0 & k_{pp}^{-1} \end{array}\right]$$

ここに $\bar{v}_p = \begin{bmatrix} v_{1p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{bmatrix} = [\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_{p-1}, (Y-UZ_1)_p] \begin{bmatrix} -k_{1p} \\ \vdots \\ -k_{p-1\,p} \\ 1 \end{bmatrix}$

$(Y-UZ_1)_p$ は 行列 $Y-UZ_1$ の第 p 列を示す.

$\overline{W}_1, \cdots, \overline{W}_{p-1}$ を与えたときの $\overline{V}_p$ の分布は (条件付分布)

$\overline{V}_p \ : \ N(0, \Sigma_p)$ 但し $\overline{W}_1 \cdots \overline{W}_{p-1}$ を与えたとき

ここに

$$\Sigma_i = I_n + UCU' + \overline{W}_{(i-1)} \overline{W}'_{(i-1)}$$

$$\overline{W}_{(i)} = [\overline{W}_1, \cdots, \overline{W}_i] = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{ni} \end{bmatrix}, \quad \overline{W}_{(0)} = 0$$

$\overline{W}_1, \cdots, \overline{W}_{p-1}$ を与えたときの $\overline{V}_p$ と k_{pp}^2 の同時分布は

$$\frac{|\Sigma_p|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp -\frac{1}{2} \overline{V}_p \Sigma_p^{-1} \overline{V}_p' \frac{1}{2^{\frac{m-p-k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-p-k+1}{2}\right)} e^{-\frac{k_{pp}^2}{2}} (k_{pp}^2)^{\frac{m-p-k+1}{2}-1}$$

である. $\overline{W}_p = k_{pp}^{-1} \overline{V}_p$ であるから上式で変数変換して積分することにより $\overline{W}_1, \cdots, \overline{W}_{p-1}$ を与えたときの $\overline{W}_p$ の条件付分布は.

(7) $\quad h(\overline{W}_p \mid \overline{W}_1, \cdots, \overline{W}_{p-1})$

$$= \frac{|\Sigma_p|^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n-p-k+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{m-p-k+1}{2}\right) \quad (1+\overline{W}_p' \Sigma_p^{-1} \overline{W}_p)^{\frac{m+n-p-k+1}{2}}}$$

よつて

(8) $\quad h(\overline{W}) = h(\overline{W}_p \mid \overline{W}_1, \cdots, \overline{W}_{p-1}) h(\overline{W}_{p-1} \mid \overline{W}_1, \cdots \overline{W}_{p-2}) \cdots h(\overline{W}_1)$

$$= \frac{|\Sigma_p|^{-\frac{1}{2}} \cdots |\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n-p-k+1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{m+n-k}{2}\right)}{\pi^{\frac{np}{2}} \Gamma\left(\frac{m-p-k+1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right) (1+\overline{W}_p' \Sigma_p^{-1} \overline{W}_p)^{\frac{m+n-p-k+1}{2}} \cdots (1+\overline{W}_1' \Sigma_1^{-1} \overline{W}_1)^{\frac{m+n-k}{2}}}$$

これより

$$(9)\quad S_x=\left\{Y;\ \frac{|\Sigma_p|^{-\frac{1}{2}}\cdots|\Sigma_1|^{-\frac{1}{2}}}{(1+W_p'\Sigma_p^{-1}W_p)^{\frac{m+n-p-k+1}{2}}\cdots(1+W_1'\Sigma_1^{-1}W_1)^{\frac{m+n-k}{2}}}>const\right\}$$

なる集合がミニマックス不変予測域を与える.

注意 1. $rank\ P = rank\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ なる仮定は $E(Y)$ の線形推定可能性を保証する仮定である.

注意 2. $p=1$ のときには (9) の S_x は

$$S_x=\left\{Y:\ W_1'\Sigma_1^{-1}W_1=\frac{(Y-UCX)'\Sigma_1^{-1}(Y-UCX)}{X'(I_m-C)X}<const\right\}$$

$const = F_{m-k}^{n}(\varepsilon)\times\frac{n}{m-k}$ なる楕円体になる. この形を [6] であつかつた.

注意 3. $P=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $Q=[1\ \cdots,1]$ のときには X: が同じ分布よりの独立 m個の標本で, それより未来の確率変数の予測域を作ることになる. このときの予測域を作つて見るとそれは Fraser-guttman の tolerance region と一致しない. その理由は才2の損失関数の相異による.

注意 4. X, Y に対する変換 (2) に P_1 なるものが入つているのは (σ,ξ) が最小十分母数ではなくと (σ,β)

が最小十分母数であるからである。Baranken [1]

Ref.

1. Barankin (1960) Sufficient parameter. Ann. Inst stat. math. vol 12

2 Fraser — Guttman (1956) Tolerance region. A.M.S. 27

3 Guttman (1959) Optimum tolerance region. A.M.S. 30

4 石井 (1967) 最小2乗推定は許容的でない. 大阪市大 商学部報告 89号

5 石井 (1967) Inadmissible minimax invariant estimator 京大数理研講究録 27

6 Ishii — Kudo (1963) Tolerance region. J. Math Osaka City Univ. 14

7 Ishii Minimax invariant prediction region. Ann. Inst stat math 次号

8 Kudo (1955) Minimax invariant est. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 6

9 丘本 (1964) 十分性と不変性 大阪統計談話会報告 8

10 Stein (1956) Multivariate analysis. Tech Rep. Stanford Univ

11 Stein (1956) Inadmissibility of the usual estimator Proc. Third Berkeley Symp. Math Statist Prob.

12 Stein - James (1960) Estimation with quadratic loss. Proc. Fourth Berkeley Symp Math Statist. Prob.

13 Wijsman (1957) Random orthogonal transformation. A.M.S. 28.