数理解析研究所講究録
第44巻 1968年 103-122

共分散行列に関する検定の不偏性
単調性および漸近展開について

広島大学　理学部　杉浦成昭
広島大学　理学部　長尾寿夫

§0. 序

この稿は多次元正規分布の共分散行列に関する検定の性質をのべたものである。§1ではAnderson & Gupta [1]によって二標本の共分散行列の均一性に関するmodified LR test が不偏であるかどうか示すのは困難であると述べている。Sugiura & Nagao [8]によって，Pitman [5] がBartlett test の不偏性を示した方法を一般化することによって上の問題を肯定的に解決した。その考えを使うことによって一標本の共分散行列がある既知な行列に等しい検定，sphericity testならびに共分散行列と平均に関する検定が不偏であることを示す。またその内のいくらかはk標本に拡張する。§2はNagao [4] によるもので§1で考えた一標本の共分散行列の均一性に対する検定の検定力に関して不偏よりも良い結果を導びきそれをk標本に拡張する。また§3はSugiura [7] によるもので§1で考えた検定統計量について，仮説，対立仮説の下で漸近展開あるいは極限分布を求める。仮説の下では漸近的にχ^2分布にしたがうが，対立仮説の下では適当に正規化することによって正規分布である。

§1．不偏性

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ $(N>p)$ をp次元列ベクトルで平均μ，共分散行列Σ $(\det|\Sigma|\neq 0)$ をもつ正規分散からの random sample とする。仮説$H_1: \Sigma=\Sigma_0$ 対立仮説$K_1: \Sigma\neq\Sigma_0$ を検定したい。ただしΣ_0は既知な正値行列，平均μは未知である。$\bar{X}=N^{-1}\sum_{\alpha=1}^{N}X_\alpha$，$S=\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha-\bar{X})(X_\alpha-\bar{X})'$ とおくとき尤度比検定 (L R test) の acceptance region は

$$(1.1)\qquad \omega_1'=\left\{S \;\middle|\; |S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}}\operatorname{etr}\left[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{-1}S\right]\geq c_\alpha\right\}$$

であたえられる。ここで$|S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}}$を$|S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{N-1}{2}}$におきかえた testを modified LR test とよぶことにすると $p=1$ の場合 UMP unbiased test である。多次元の場合次の結果が得られる。

定理1.1．仮説$H_1: \Sigma=\Sigma_0$ 対立仮説$K_1: \Sigma\neq\Sigma_0$ に対して，$n=N-1$とするとき acceptance region

$$(1.2)\qquad \omega_1=\left\{S \mid |S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{-1}S]\geq c_\alpha\right\}$$

をもつ modified LR testは不偏である。

証明. 統計量SはWishart $W(\Sigma,n)$にしたがうことから,
K_1の下でSがω_1に含まれる確率を$P_K(\omega_1)$とすると

$$(1.3)\qquad P_K(\omega_1)=c_{p,n}\int_{S\in\omega_1}|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma^{-1}S]\,dS$$

であたえられる。ただし etrは exptr を表わし $S=(s_{ij})$ とすると $dS=\prod_{i\leq j}ds_{ij}$ を意味する。定数$c_{p,n}$は

$$(1.4)\qquad c_{p,n}^{-1}=\pi^{\frac{1}{4}p(p-1)}2^{\frac{np}{2}}\prod_{i=1}^{p}\Gamma[\tfrac{1}{2}(n-i+1)]\ .$$

$U=\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}S\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと, Jacobianは
$|\partial U/\partial S|=|\Sigma_0\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}(p+1)}$であたえられるから, (1.3)は

$$(1.5)\qquad P_K(\omega_1)=c_{p,n}\int_{U\in\omega_1^*}|U|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{-1}U]\,dU$$

ただし $\omega_1^*=\{U \mid \Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}U\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}\in\omega_1\}$.
したがって

$$(1.6)\qquad P_H(\omega_1)-P_K(\omega_1)=c_{p,n}\left\{\int_{U\in\omega_1}-\int_{U\in\omega_1^*}\right\}|U|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\times|\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}}\operatorname{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{-1}U]\,dU$$

一方 $U\in\omega_1$ に対して $|U|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\frac{1}{2}\Sigma_0^{-1}U]\geq C_\alpha|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}$
であるから $\int_{U\in\omega_1}|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dU<+\infty$ である。
かくして

$$(1.7)\quad P_H(\omega_1)-P_K(\omega_1)\geq C_{p,n}C_\alpha\left\{\int_{U\in\omega_1-\omega_1\cap\omega_1^*}-\int_{U\in\omega_1^*-\omega_1^*\cap\omega_1}\right\}|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dU$$

$$=C_{p,n}C_\alpha\left\{\int_{U\in\omega_1}-\int_{U\in\omega_1^*}\right\}|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dU$$

ところが $|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dU$ はAを任意のnonsingular matrix とすると，変換 $U\longrightarrow A'UA$ に対して不変な測度である。すなわち

$$\int_{U\in\omega_1^*}|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dU=\int_{U\in\omega_1}|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dU.$$

ゆえに

$$(1.8)\quad P_H(\omega_1)-P_K(\omega_1)\geq 0$$

かくて定理1.1 は示された。

同様な方法によって，次の定理を得る。

定理1.2. 仮説 $H_1:\Sigma=\Sigma_0,\ \mu=\mu_0$ 対立仮説 $K_1:\Sigma\neq\Sigma_0,\ \mu=\mu_0$ に対して(1.1)で定められた acceptance region ω_1 をもつ，LR test は不偏である。ただし Σ_0,μ_0 は既知であり，このとき $S^*=\sum_{\alpha=1}^N(x_\alpha-\mu_0)(x_\alpha-\mu_0)'$ としてSにおきかえたものである。

定理1.1をk標本に拡張することが出来る。$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{iN_i}$を$P$次元正規分布平均$\mu_i$ 共分散行列Σ_iからのrandom sampleとする（$N_i>P,\ i=1,2,\cdots,k$）。$S_j=\sum_{\alpha=1}^{N_j}(X_{j\alpha}-\bar{X}_j)(X_{j\alpha}-\bar{X}_j)'$, $\bar{X}_j=N_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{N_j}X_{j\alpha}$, $n_j=N_j-1$とおくと次の定理が得られる。

定理1.3. 仮説H_1'': $\Sigma_j=\Sigma_{0j}$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 対立仮説K_1'': $\Sigma_i\neq\Sigma_{0i}$ for some i に対して acceptance region

$$(1.9)\quad \omega_1''=\left\{(S_1,S_2,\cdots,S_k)\,\middle|\,\prod_{j=1}^{k}\left[|S_j\Sigma_{0j}^{-1}|^{\frac{n_j}{2}}\operatorname{etr}\left[-\tfrac{1}{2}\Sigma_{0j}^{-1}S\right]\right]\geq c_\alpha\right\}$$

をもつmodified L R testは不偏である。

次に二標本問題について述べる。$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{iN_i}$を平均$\mu_i$, 共分散行列$\Sigma_i$からのrandom sampleとする（$N_i>P,\ i=1,2$）。仮説$H_2$: $\Sigma_1=\Sigma_2$ 対立仮説K_2: $\Sigma_1\neq\Sigma_2$ に対するL R testのacceptance regionは$S_i=\sum_{\alpha=1}^{N_i}(X_{i\alpha}-\bar{X}_i)(X_{i\alpha}-\bar{X}_i)'$とおくことによって（$i=1,2$）,

$$(1.10)\quad \omega_2'=\left\{(S_1,S_2)\,\middle|\,|S_1|^{\frac{N_1}{2}}|S_2|^{\frac{N_2}{2}}|S_1+S_2|^{-\frac{1}{2}(N_1+N_2)}\geq c_\alpha\right\}$$

であたえられる。このtestは$P=1$の場合不偏であるのは$N_1=N_2$にかぎることがBrown [2] によって示されている。N_iを自由度N_i-1におきかえて得られるtestはUMP unbiased testである。多次元の場合次の定理が得られる。

この問題はAnderson & Gupta [1]によってConjectureされたものである。

定理1.4. 仮説 $H_2: \Sigma_1=\Sigma_2$ 対立仮説 $K_2: \Sigma_1\neq\Sigma_2$ に対して，acceptance region

$$(1.11)\quad \omega_2=\left\{(S_1,S_2)\ \middle|\ |S_1|^{\frac{n_1}{2}}|S_2|^{\frac{n_2}{2}}|S_1+S_2|^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)}\geq C_\alpha\right\}$$

をもつmodified LR testは不偏である。

証明. S_1,S_2は独立でそれぞれ $W(\Sigma_1,n_1)$，$W(\Sigma_2,n_2)$ にしたがうから，Kの下で (S_1,S_2) が ω_2に含まれる確率を $P_K(\omega_2)$ とすると，

$$(1.12)\quad P_K(\omega_2)=C_{p,n_1}C_{p,n_2}\int_{(S_1,S_2)\in\omega_2}\left[\prod_{i=1}^{2}|S_i|^{\frac{1}{2}(n_i-p-1)}|\Sigma_i|^{-\frac{n_i}{2}}\right]\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}(\Sigma_1^{-1}S_1+\Sigma_2^{-1}S_2)\right]dS_1dS_2$$

である。$U_i=\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}S_i\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}$ $(i=1,2)$ なる変換をほどこすと，Jacobianは，$|\partial(U_1,U_2)/\partial(S_1,S_2)|=|\Sigma_2|^{-(p+1)}$であたえられ，一般にAを任意のnonsingular matrixとすると $(S_1,S_2)\in\omega_2 \Longleftrightarrow (AS_1A',AS_2A')\in\omega_2$ であるから(1.12)は次の如くなる。

$$(1.13)\quad P_K(\omega_2)=C_{p,n_1}C_{p,n_2}\int_{(U_1,U_2)\in\omega_2}|\Sigma_2\Sigma_1^{-1}|^{\frac{n_1}{2}}|U_1|^{\frac{1}{2}(n_1-p-1)}|U_2|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}(\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-1}\right.$$

$$\left.\times\Sigma_2^{\frac{1}{2}}U_1+U_2)\right]dU_1dU_2\ .$$

次に $U_1=V_1$, $U_2=V_1^{\frac{1}{2}}V_2V_1^{\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと，Jacobian は $|\partial(U_1,U_2)/\partial(V_1,V_2)|=|V_1|^{\frac{1}{2}(p+1)}$ であり，再び領域 ω_2 の不変なことをつかって，

(1.14) $$P_K(\omega_2)=C_{p,n_1}C_{p,n_2}\int_{(I,V_2)\in\omega_2}|\Sigma_2\Sigma_1^{-1}|^{\frac{n_1}{2}}|V_1|^{\frac{1}{2}(n_1+n_2-p-1)}|V_2|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)}\operatorname{etr}\left[-\frac{1}{2}(\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-1}\Sigma_2^{\frac{1}{2}}+V_2)V_1\right]dV_1dV_2$$

$$=\frac{C_{p,n_1}C_{p,n_2}}{C_{p,n_1+n_2}}\int_{(I,V_2)\in\omega_2}|\Sigma_2\Sigma_1^{-1}|^{\frac{n_1}{2}}|V_2|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)}|\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-1}\Sigma_2^{\frac{1}{2}}+V_2|^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)}dV_2$$

$W=\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}V_2\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}\Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと

(1.15) $$P_K(\omega_2)=\frac{C_{p,n_1}C_{p,n_2}}{C_{p,n_1+n_2}}\int_{W\in\omega_2^*}|W|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)}|I+W|^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)}dW$$

ただし $\omega_2^*=\{W\mid(I,\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}W\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\Sigma_2^{\frac{1}{2}})\in\omega_2\}$ である。定理1.1の証明と同じように考えて，$P_H(\omega_2)\geq P_K(\omega_2)$．

再び一標本に帰って sphericity test といわれる次の仮説を考える。仮説 $H_3: \Sigma=\sigma^2I$ 対立仮説 $K_3: \Sigma\neq\sigma^2I$ に対する LR test の acceptance region は $n=N-1$ とおくと

(1.16) $$\omega_3=\left\{S \;\middle|\; |S|^{\frac{n}{2}}(\operatorname{tr}S)^{-\frac{pn}{2}}\geq C_\alpha\right\}$$

であたえられる。この testの不偏なことは，すでに Gleser[3] が Bartlett test の equal sample size の場合の不偏性を使う

ことによって示した。しかしここでは直接証明をあたえる。

定理1.5. 仮説H_3: $\Sigma=\sigma^2 I$ 対立仮説K_3: $\Sigma\neq\sigma^2 I$に対して、acceptance region ω_3 をもつ L R test は不偏である。

証明. $P_K(\omega_3)$ を次の様に定義する。

$$(1.17)\quad P_K(\omega_3)=C_{p,n}\int_{S\in\omega_3}|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma^{-1}S]\,dS$$

$T'\Sigma T=\Lambda$　$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$となる直交行列$T$が存在する。$A=T'ST$なる変換をほどこすと，Jacobianは1であり，領域ω_3は不変であるから

$$(1.18)\quad P_K(\omega_3)=C_{p,n}\int_{A\in\omega_3}|A|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Lambda|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Lambda^{-1}A]\,dA\ .$$

次に$U=\Lambda^{-\frac{1}{2}}A\Lambda^{-\frac{1}{2}}$なる変換をほどこすと

$$(1.18)\quad P_K(\omega_3)=C_{p,n}\int_{\Lambda^{\frac{1}{2}}U\Lambda^{\frac{1}{2}}\in\omega_3}|U|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}U]\,dU\ .$$

ここで$U=v_{11}V_0$　ただしV_0は次の行列である。

$$(1.19)\qquad V_0=\begin{pmatrix}1 & v_{12} & \cdots\cdots & v_{1p}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ & & & \\ v_{p1} & \cdots\cdots & & v_{pp}\end{pmatrix}$$

Jacobianは$|\partial U/\partial(v_{11},V_0)|=v_{11}^{\,p(p+1)/2\,-1}$であり領域$\omega_3$は正の定数倍に対して不変であるから

$$(1.20)\quad P_K(\omega_3)=C_{p,n}\int_{\Lambda^{\frac{1}{2}}V_0\Lambda^{\frac{1}{2}}\in\omega_3} v_{11}^{\frac{np}{2}-1}|V_0|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}v_{11}V_0]\,dv_{11}dV_0$$

$$=2^{\frac{np}{2}}\Gamma[\tfrac{np}{2}]C_{p,n}\int_{\Lambda^{\frac{1}{2}}V_0\Lambda^{\frac{1}{2}}\in\omega_3}|V_0|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}(\mathrm{tr}V_0)^{-\frac{np}{2}}dV_0$$

したがって

$$(1.21)\quad P_H(\omega_3)-P_K(\omega_3)\geq 2^{\frac{np}{2}}\Gamma[\tfrac{np}{2}]C_{p,n}C_\alpha\left\{\int_{V_0\in\omega_3}-\int_{\Lambda^{\frac{1}{2}}V_0\Lambda^{\frac{1}{2}}\in\omega_3}\right\}|V_0|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dV_0$$

$W_0=\lambda_1^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}}V_0\Lambda^{\frac{1}{2}}$ なる変換を作ると，$|\partial W_0/\partial V_0|=|\Lambda|^{\frac{1}{2}(p+1)}\lambda_1^{-\frac{p(p+1)}{2}}$ であるから後の積分は $\int_{\Lambda^{\frac{1}{2}}V_0\Lambda^{\frac{1}{2}}\in\omega_3}|V_0|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dV_0=\int_{W_0\in\omega_3}|W_0|^{-\frac{1}{2}(p+1)}dW_0$．ゆえに示された。

Sのかわりに$\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}S\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$を考えることによって次の系を得る．

系．仮説H_3'：$\Sigma=\sigma^2\Sigma_0$，対立仮説K_3'：$\Sigma\neq\sigma^2\Sigma_0$に対するacceptance region

$$(1.22)\quad \omega_3'=\left\{S\;\middle|\;|S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}}(\mathrm{tr}\Sigma_0^{-1}S)^{-\frac{np}{2}}\geq C_\alpha\right\}$$

をもつLR testは不偏である。

定理1.5は，LR test であるけれども．k標本の場合は，LR testをmodifyしなければならないことを注意したい。

定理1.6．仮説H_3''：$\Sigma_j=\sigma^2\Sigma_{0j}$ $(j=1,2,\cdots,k)$対立仮説K_3''：$\Sigma_i\neq\sigma^2\Sigma_{0i}$ for some iに対して acceptance region

$$(1.23)\quad \omega_3'' = \left\{ (S_1, S_2, \cdots, S_k) \;\middle|\; \prod_{j=1}^{k} |S\Sigma_{0j}^{-1}|^{\frac{n_j}{2}} \left(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{tr}\,\Sigma_{0j}^{-1} S_j\right)^{-\frac{np}{2}} \geq c_\alpha \right\}$$

をもつ modified L R test は不偏である。$n_j = N_j - 1$, $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$.

同様にして次の定理を得る。

定理1.7. 仮説 $H_3''': \Sigma_j = \sigma_j^2 \Sigma_{0j}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 対立仮説 $K_3''': \Sigma_i \neq \sigma_i^2 \Sigma_{0i}$ for some i に対する acceptance region

$$(1.24)\quad \omega_3''' = \left\{ (S_1, S_2, \cdots, S_k) \;\middle|\; \prod_{j=1}^{k} \left[|S_j \Sigma_{0j}^{-1}|^{\frac{n_j}{2}} (\mathrm{tr}\, S_j \Sigma_{0j}^{-1})^{-\frac{n_j p}{2}} \right] \geq c_\alpha \right\}$$

をもつ modified L R test は不偏である。

次に共分散行列と平均に関する検定の不偏性について述べる。

定理1.8. 仮説 $H_4: \Sigma = \Sigma_0$ かつ $\mu = \mu_0$ 対立仮説 $K_4: \Sigma \neq \Sigma_0$ または $\mu \neq \mu_0$ に対する acceptance region

$$(1.25)\quad \omega_4 = \left\{ (\bar{x}, S) \;\middle|\; |S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}} \mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} \{ S + N(\bar{x} - \mu_0)(\bar{x} - \mu_0)' \} \right] \geq c_\alpha \right\}$$

をもつ L R test は不偏である。ただし Σ_0, μ_0 は既知である。

証明. K の下で ω_4 に $(\bar{x}, S)$ が含まれる確率 $P_K(\omega_4)$ は

$$(1.26)\quad P_K(\omega_4) = \frac{c_{p,n} N^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{(\bar{x}, S) \in \omega_4} |S|^{\frac{1}{2}(N-p-2)} |\Sigma|^{-\frac{N}{2}} \mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2} \Sigma^{-1} \{ S + N(\bar{x} - \mu) \times (\bar{x} - \mu)' \} \right] d\bar{x}\, dS$$

$U=\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}S\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}$, $\bar{Y}-\mu_0=\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\bar{X}-\mu)$ なる変換をほどこすと Jacobian は $|\partial(U,\bar{Y})/\partial(S,\bar{X})|=|\Sigma_0\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}(p+2)}$であるから

$$(1.27)\quad P_K(\omega_4)=\frac{C_{p,n}N^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\int_{(\bar{Y},U)\in\omega_4^*}|U|^{\frac{1}{2}(N-p-2)}|\Sigma_0|^{-\frac{N}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Sigma_0^{-1}\{U+N(\bar{Y}-\mu_0)(\bar{Y}-\mu_0)'\}\right]$$

$$\times d\bar{Y}\,dU$$

ただし $\omega_4^*=\{(\bar{Y},U)\mid(\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}(\bar{Y}-\mu_0)+\mu,\ \Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}U\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}})\in\omega_4\}$ である。ゆえに前と同じ議論によって $P_H(\omega_4)\geq P_K(\omega_4)$.

同じ考えによってk標本に拡張される。

定理1.9. 仮説H_4': $\Sigma_j=\Sigma_{0j}$, $\mu_j=\mu_{0j}$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 対立仮説K_4': $\Sigma_i\neq\Sigma_{0i}$ または $\mu_j\neq\mu_{0j}$ for some i,j に対して acceptance region

$$(1.28)\quad \omega_4'=\left\{(\bar{X}_1,\bar{X}_2,\cdots,\bar{X}_k,S_1,S_2,\cdots,S_k)\ \middle|\ \prod_{j=1}^{k}\left[|S_j\Sigma_{0j}^{-1}|^{\frac{N_j}{2}}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Sigma_{0j}^{-1}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\{S_j+N_j(\bar{X}_j-\mu_{0j})(\bar{X}_j-\mu_{0j})'\}\right]\right]\geq C_4\right\}$$

をもつLR testは不偏である。

§2. 単調性

§1で仮説H_1: $\Sigma=\Sigma_0$, 対立仮説K_1: $\Sigma\neq\Sigma_0$ に対する modified LR testが不偏なることを示した。ここではさらにくわしく検定力の評価をおこなう。

定理2.1. 仮説 $H_1:\Sigma=\Sigma_0$, 対立仮説 $K_1:\Sigma\neq\Sigma_0$ に対して, acceptance region ω_1 を持つ modified L R test の Power function は, $ch(\Sigma\Sigma_0^{-1})=(\delta_1^2,\delta_2^2,\cdots,\delta_p^2)$ なる P ; の固有値のみの関数であって, $\delta_1^2,\cdots,\delta_{i-1}^2,\delta_{i+1}^2,\cdots,\delta_p^2$ を固定したとき, もし $\delta_i^2\geq 1$ $(\delta_i^2\leq 1)$ なら, Power function は単調増加(減少)である。

証明. Power function $P_K(\omega_1|\Sigma)$ は

$$(2.1)\quad P_K(\omega_1|\Sigma)=c_{p,n}\int_{S\in\omega_1^c}|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma^{-1}S]\,dS$$

であたえられる。$A=\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}S\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと,

$$(2.2)\quad P_K(\omega|\Sigma)=c_{p,n}\int_{A\in\omega^c}|A|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma\Sigma_0^{-1}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-1}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}A]\,dA$$

ただし $\omega=\{A \mid |A|^{\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\frac{A}{2}]\geq c_\alpha\}$ である。

$H'\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}H=\Lambda$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\delta_1^2,\delta_2^2,\cdots,\delta_p^2)$ となる直交変換 H が存在するから $B=H'AH$ なる変換をほどこすと, (2.2) は

$$(2.3)\quad P_K(\omega|\Sigma)=c_{p,n}\int_{B\in\omega^c}|B|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Lambda|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Lambda^{-1}B]\,dB$$

となる。次に Gleser [3] が sphericity test の不偏性を示したときもちいた変換 $B=D^{\frac{1}{2}}RD^{\frac{1}{2}}$ (ただし $D^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}(b_{11}^{\frac{1}{2}},\cdots,b_{pp}^{\frac{1}{2}})$ R: 相関行列) をおこなうと, Jacobian は $|\partial B/\partial(R,D)|=|D|^{\frac{1}{2}(p-1)}$ であるから (2.3) は次の如くなる。

$$(2.4)\quad P_K(\omega|\Lambda)=C_{p,n}\int_{R>0}|R|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}dR\int_{\omega_R}|D|^{\frac{n}{2}-1}|\Lambda|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Lambda^{-1}D]\,dD$$

$$=C_{p,n}\int_{R>0}|R|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\beta(\delta_1^2,\delta_2^2,\cdots,\delta_p^2|R)\,dR$$

ただし $\omega_R=\{D\mid B=D^{\frac{1}{2}}RD^{\frac{1}{2}}\in\omega^c\}$, $\beta(\delta_1^2,\cdots,\delta_p^2|R)=\int_{\omega_R}\prod_{i=1}^p b_{ii}^{\frac{n}{2}-1}\times(\delta_i^2)^{-\frac{n}{2}}\exp[-\frac{b_{ii}}{2\delta_i^2}]\,db_{ii}$ である。

もし $\delta_i^{*2}\geq\delta_i^2\geq 1$ あるいは $\delta_i^{*2}\leq\delta_i^2\leq 1$ ならば, $b_1,\cdots,b_{i-1},b_{i+1},\cdots,b_p$ を固定して b_i について積分をおこなうと次の補題によって $\beta(\delta_1^2,\cdots,\delta_{i-1}^2,\delta_i^{*2},\delta_{i+1}^2,\cdots,\delta_p^2|R)\geq\beta(\delta_1^2,\cdots,\delta_i^2,\cdots,\delta_p^2|R)$, この不等式の両辺に $|R|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}$ をかけて積分すると結果が得られる。

証明の途中で使われた補題は Ramachandran [6] によって示されたものである。

補題. 一次元正規分布において仮説 $H:\sigma=\sigma_0$, 対立仮説 $K:\sigma\neq\sigma_0$ に対して, acceptance region

$$(2.5)\qquad \omega=\{S_1\mid (S_1\sigma_0^{-2})^{\frac{n}{2}}\exp[-\tfrac{1}{2}\sigma_0^{-2}S_1]\geq C_\alpha\}$$

であたえられる modified LR test の power function は $\delta^2=\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$ に関して単調性を有する。ただし $S_1=\sum_{\alpha=1}^N(x_\alpha-\bar{x})^2$, σ_0 は既知, 平均は未知である。

定理 2.1 と同じ証明方法によって次の定理を得る.

定理2.2. 仮説 $H_1': \Sigma=\Sigma_0, \mu=\mu_0$ 対立仮説 $K_1': \Sigma\neq\Sigma_0, \mu=\mu_0$ に対して acceptance region

$$(2.6)\quad \omega^* = \left\{ S^* \;\middle|\; |S^*\Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}}\,\mathrm{etr}\left[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{-1}S^*\right] \geq c_\alpha \right\}$$

をもつLR testのpowerは $ch(\Sigma\Sigma_0^{-1})$ に関して単調性を有する。

また定理2.1はk標本に対して拡張することが出来る。

定理2.3. 仮説 $H_1'': \Sigma_j=\Sigma_{0j}$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 対立仮説 $K_1'': \Sigma_i\neq\Sigma_{0i}$ for some i に対して acceptance region ω_1'' をもつ modified LR test の power は $ch(\Sigma_j\Sigma_{0j}^{-1})$ に関して単調性を有する $(j=1,2,\cdots,k)$。

§3. 漸近展開

仮説検定 (H_1, K_1) に対する modified LR test は

$$(3.1)\quad \lambda^* = (en^{-1})^{\frac{np}{2}}\,|S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{etr}\left[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{-1}S\right]$$

であたえられる。λ^* の l 次の moment が (H_1, K_1) に対して求められるから，それをつかうことによって次の定理を得る。

定理3.1. $f=\frac{1}{2}p(p+1)$ とするとき仮説 H_1 の下で

$$(3.2)\quad P(-2\log\lambda^*\leq c) = P(\chi_f^2\leq c) + \frac{1}{n}B_2\left\{P(\chi_{f+2}^2\leq c) - P(\chi_f^2\leq c)\right\} + \frac{1}{6n^2}\left\{(3B_2^2-4B_3)P(\chi_{f+4}^2\leq c) - 6B_2^2P(\chi_{f+2}^2\leq c)\right.$$

$$+(3B_2^2+4B_3)P(\chi_f^2\le c)\Big\}+\frac{1}{6n^3}\Big\{(4B_4-4B_2B_3+B_2^3)P(\chi_{f+6}^2\le c)$$

$$+B_2(4B_3-3B_2^2)P(\chi_{f+4}^2\le c)+B_2(4B_3+3B_2^2)P(\chi_{f+2}^2\le c)$$

$$-(4B_4+4B_2B_3+B_2^3)P(\chi_f^2\le c)\Big\}+O(n^{-4})$$

ただし $B_2=\frac{1}{24}p(2p^2+3p-1)$ ，$B_3=-\frac{1}{32}p(p-1)(p+1)(p+2)$，
$B_4=\frac{1}{480}p(6p^4+15p^3-10p^2-30p+3)$

定理3.2. $\tau^2=2\,\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1}-I)^2$ とすると，対立仮説K_1の下で，

$$(3.3)\quad P\Big(\Big[-2n^{-\frac{1}{2}}\log\lambda^*-\sqrt{n}\{\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1}-I)-\log|\Sigma\Sigma_0^{-1}|\}\Big]/\tau\le c\Big)$$

$$=\Phi(c)-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\frac{p(p+1)}{2\tau}\Phi'(c)+\frac{\Phi^{(3)}(c)}{\tau^3}\Big\{\frac{2p}{3}+\frac{4}{3}\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3-2\,\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2\Big\}\Big]$$

$$+\frac{1}{n}\Big[\frac{\Phi^{(2)}(c)}{8\tau^2}p(p+1)(p^2+p+4)+\frac{\Phi^{(4)}(c)}{\tau^4}\Big\{\frac{p}{3}(p^2+p+2)-p(p+1)\,\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2$$

$$+\frac{2}{3}(p^2+p-4)\,\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3+2\,\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^4\Big\}+\frac{\Phi^{(6)}(c)}{2\tau^6}\Big\{\frac{2}{3}p+\frac{4}{3}\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3$$

$$-2\,\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2\Big\}^2\Big]-\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big[\frac{p(2p^2+3p-1)}{12\tau}\Phi'(c)+\frac{p(p+1)(p^4+2p^3+13p^2+12p+32)}{48\tau^3}$$

$$\times\Phi^{(3)}(c)$$

$$+\frac{\Phi^{(5)}(c)}{\tau^5}\Big\{\frac{p}{60}(5p^4+10p^3+45p^2+40p+48)-\frac{p(p+1)}{4}(p^2+p+4)$$

$$\times\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2+\frac{p}{6}(p+1)(p^2+p-4)\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3+(p^2+p-4)\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^4$$

$$+\frac{16}{5}\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^5\Big\}+\frac{\Phi^{(7)}(c)}{\tau^7}\Big\{\frac{16}{3}p+\frac{32}{3}\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3-16\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2\Big\}$$

$$\times\Big\{\frac{p}{48}(p^2+p+4)-\frac{p(p+1)}{16}\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2+\frac{p^2+p-8}{24}\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3+\frac{1}{4}\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^4\Big\}$$

$$+\frac{\Phi^{(9)}(c)}{\tau^9}\frac{32}{3}\Big\{\frac{p}{6}+\frac{1}{3}\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2\Big\}^3\Big]+O(n^{-2}).$$

ただし $\Phi^{(i)}(c)$ は標準正規分布関数の i 回微分を表わす。

§1 の仮説検定 (H_4, K_4) に対する L R test は

$$(3.4)\quad \lambda=(eN^{-1})^{\frac{Np}{2}}|S\Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}}\operatorname{etr}\Big[-\frac{1}{2}\Sigma_0^{-1}\{S+N(\bar{x}-\mu_0)(\bar{x}-\mu_0)'\}\Big]$$

である。前と同じ方法によって次の定理を得る。

定理 3.3. $f=p+\frac{1}{2}p(p+1)$ とおくとき仮説 H_4 の下で

$$(3.5)\quad P(-2\log\lambda\le c)=P(\chi_f^2\le c)+\frac{1}{N}B_2\big[P(\chi_{f+2}^2\le c)-P(\chi_f^2\le c)\big]$$

$$+\frac{1}{6N^2}\big[(3B_2^2-4B_3)P(\chi_{f+4}^2\le c)-6B_2^2P(\chi_{f+2}^2\le c)+(3B_2^2+4B_3)$$

$$\times P(\chi_f^2\le c)\big]$$

$$+\frac{1}{6N^3}\Big[(4B_4-4B_2B_3+B_2^3)P(\chi^2_{f+6}\le c)+B_2(4B_3-3B_2^2)P(\chi^2_{f+4}\le c)$$

$$+B_2(4B_3+3B_2^2)P(\chi^2_{f+2}\le c)-(4B_4+4B_2B_3+B_2^3)P(\chi^2_{f}\le c)\Big]+O(N^{-4})$$

ただし $B_2=\frac{1}{24}p(2p^2+9p+11)$, $B_3=-\frac{1}{32}p(p+1)(p+2)(p+3)$,
$B_4=\frac{1}{480}p(6p^4+45p^3+110p^2+90p+3)$

定理3.4. $\tau^2=2\{\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1}-I)^2+2(\mu-\mu_0)'\Sigma_0^{-1}\Sigma\Sigma_0^{-1}(\mu-\mu_0)\}$ とするとき，対立仮説K_4の下で

(3.6) $$P\Big(\Big[-2N^{-\frac12}\log\lambda-\sqrt N\{\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1}-I)+(\mu-\mu_0)'\Sigma_0^{-1}(\mu-\mu_0)-\log|\Sigma\Sigma_0^{-1}|\}\Big]/\tau\le c\Big)$$

$$=\Phi(c)-\frac{1}{\sqrt N}\Big[\frac{\Phi(c)}{\tau}\frac{p(p+3)}{2}+\frac{\Phi^{(3)}(c)}{\tau^3}\Big\{\frac23 p+4(\mu-\mu_0)'\Sigma_0^{-1}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2(\mu-\mu_0)$$

$$+\frac43\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3-2\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2\Big\}\Big]+\frac1N\Big[\frac{\Phi^{(2)}(c)}{8\tau^2}p(p+3)(p^2+3p+4)$$

$$+\frac{\Phi^{(4)}(c)}{\tau^4}\Big\{\frac{p(p+1)(p+2)}{3}+2p(p+3)(\mu-\mu_0)'\Sigma_0^{-1}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2(\mu-\mu_0)+8(\mu-\mu_0)'$$

$$\times\Sigma_0^{-1}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3(\mu-\mu_0)+2\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^4+\frac23(p-1)(p+4)\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3-p(p+3)\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2\Big\}$$

$$+\frac{\Phi^{(6)}(c)}{2\tau^6}\Big\{\frac23 p+4(\mu-\mu_0)'\Sigma_0^{-1}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2(\mu-\mu_0)+\frac43\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^3-2\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma_0^{-1})^2\Big\}^2\Big]$$

$$+O(N^{-\frac32})$$

最後に仮説 H: $\Sigma_1=\cdots=\Sigma_k$ 対立仮説 K: $\Sigma_i\neq\Sigma_j$ for some $(i\neq j)$ に対する modified LR test は

$$(3.7)\quad \lambda^*=\left[\prod_{\alpha=1}^{k}|S_\alpha/n_\alpha|^{n_\alpha/2}\right]\left|\sum_{\alpha=1}^{k}S_\alpha/n\right|^{-n/2}$$

であたえられる。ただし $n=\sum_{\alpha=1}^{k}n_\alpha$

定理3.5. 対立仮説Kの下で

$$(3.8)\quad -\frac{2}{\sqrt{n}}\log\lambda^*-\sqrt{n}\log\left\{\left|\sum_{\alpha=1}^{k}\rho_\alpha\Sigma_\alpha\right|\Big/\prod_{\alpha=1}^{k}|\Sigma_\alpha|^{\rho_\alpha}\right\}$$

は漸近的に正規分布に従い，その平均は0，分散は $2\sum_{\alpha=1}^{k}\rho_\alpha\times tr\{\Sigma_\alpha(\sum_{\alpha=1}^{k}\rho_\alpha\Sigma_\alpha)^{-1}-I\}$ であたえられる。ここで $n_\alpha=\rho_\alpha n$ である。

参考文献

[1] Anderson, T. W. and Das Gupta, S. (1964). A monotonicity property of the power functions of some tests of the equality of two covariance matrices. Ann. Math. Statist. 35 1059−1063

[2] Brown, G. W. (1939). On the power of the L_1 test for equality of several variances. Ann. Math. Statist. 10 119−128

[3] Gleser, Leon J. (1966). A note on the sphericity test. Ann. Math. Statist. 37 464-467

[4] Nagao, H. (1967). Monotonicity of the modified likelihood ratio test for a covariance matrix. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. (to appear)

[5] Pitman, E. J. G. (1939). Tests of hypotheses concerning location and scale parameters. Biometrika 31 200−215

[6] Ramachandran, K.V. (1958). A test of variances. J. Amer. Statist. Assoc. 53 741-747

[7] Sugiura, N. Asymptotic expansions and limiting distribution of tests for covariances.

[8] Sugiura, N. and Nagao, H. Unbiasedness of some test criteria for the equality of one or two covariance matrices. (submitted to Ann. Math. Statist.)