数理解析研究所講究録
第44巻 1968年 123-132

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE GENERALIZED VARIANCE

広島大 理　藤越康祝

§1. 序

$X(n\times p)$ の各行は互に独立で共分散行列 Σ, $\mathcal{E}[X]=M$ なる多次元正規分布に従うものとする. すなわち, X の p.d.f. は

$$(1.1)\qquad (2\pi)^{-\frac{pn}{2}}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\,\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(X-M)'(X-M)\right]dX$$

である. ただし, $n\geq p$, $\mathrm{etr}\,A=\exp\{\mathrm{trace}\,A\}$. $X'X=nS$ の分布は non-centrality parameter matrix $\Sigma^{-\frac{1}{2}}M'M\Sigma^{-\frac{1}{2}}=\Omega$ なる non-central Wishart 分布と呼ばれるものである. 我々は generalized variance, すなわち, $|S|$ の non-null case における漸近展開を考える. null case, すなわち, $\Omega=0$ のとき, $\sqrt{n}\{|S|/|\Sigma|-1\}$ の漸近分布が $N[0,2p]$ となることはよく知られている(cf. [2]). Bagai [3] は non-central linear case, すなわち, $\mathrm{Rank}\,\Omega=1$ のとき, $p=2(1)10$ の場合について $|S|$ の exact 分布を与えている. しかし,

結果は複雑である．$|S|$ の moment は，Constantine [4]により．matrix argument の hypergeometric function を用いて．一般の場合に求められている．

我々は．non-centrality parameter matrix Ω の order が定数のとき，すなわち，$\Omega=O(1)$ のとき．Constantine が与えた moment をもとにして得られる特性関数を展開し．それを反転することにより．$|S|$ の漸近展開が得られることを示す．$\Omega=O(n)=n\Theta$ のときは．non-central Wishart 分布の関数の漸近分布を求める方法を与え，この結果を用いて．$|S|$ の漸近分布を求める．

§2．$\Omega=O(1)$ のとき

Costantine[4]は $|S|$ の h 次の moment を matrix argument の hypergeometric function を用いて．次のように与えている．

$$(2.1)\qquad \mathcal{E}[\,|S|^h]=|\Sigma|^h\left(\frac{2}{n}\right)^{ph}\frac{\Gamma_p[\frac{n}{2}+h]}{\Gamma_p[\frac{n}{2}]}\cdot \mathrm{etr}\left(-\frac{\Omega}{2}\right){}_1F_1\left(\frac{n}{2}+h;\frac{n}{2};\frac{\Omega}{2}\right)$$

ただし，

$$\Gamma_p[a]=\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left[a+\tfrac{1}{2}(1-j)\right]$$

$${}_1F_1(a;b;S)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{(a)_\kappa}{(b)_\kappa}\frac{C_\kappa(S)}{k!}$$

$$(a)_\kappa = \prod_{j=1}^{p}\left(a+\tfrac{1}{2}(1-j)\right)_{k_j} = \prod_{j=1}^{p}\frac{\Gamma[a+\frac{1}{2}(1-j)+k_j]}{\Gamma[a+\frac{1}{2}(1-j)]}$$

関数 $C_\kappa(S)$ は分割 $\kappa=(k_1,\cdots,k_p)$，$k=k_1+\cdots+k_p$，$k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 0$ に対応する zonal polynomial である．(2.1)より，統計量 $Z=\sqrt{n}\log(|S|/|\Sigma|)$ の特性関数は次のように与えられる

.

$$C(t) = \mathcal{E}[e^{itZ}]$$

$$= \mathcal{E}[(|S|/|\Sigma|)^{it\sqrt{n}}]$$

(2.2)
$$= \left(\frac{2}{n}\right)^{itp\sqrt{n}}\cdot\frac{\Gamma_p[\frac{n}{2}+\sqrt{n}it]}{\Gamma_p[\frac{n}{2}]}\cdot \mathrm{etr}\left(-\frac{\Omega}{2}\right)\,{}_1F_1\left(\frac{n}{2}+\sqrt{n}it;\frac{n}{2};\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$= C_1(t)\cdot \mathrm{etr}\left(-\frac{\Omega}{2}\right)\,{}_1F_1\left(\frac{n}{2}+\sqrt{n}it;\frac{n}{2};\frac{\Omega}{2}\right)$$

$\Omega=0$ のとき，$\mathrm{etr}(-\frac{\Omega}{2})\,{}_1F_1(\frac{n}{2}+\sqrt{n}it;\frac{n}{2};\frac{\Omega}{2})$ は 1 になるから，$C_1(t)$ は null case の場合の特性関数を与えている．$C_1(t)$ の展開に対して，よく知られた公式

(2.3)
$$\log\Gamma[x+h] = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x+h-\frac{1}{2}\right)\log x - x - \sum_{r=1}^{s}(-1)^r B_{r+1}(h)\cdot\frac{1}{r(r+1)}\cdot\frac{1}{x^r} + O(|x|^{-s-1})$$

を用いる．ただし，$B_r(h)$ は Bernoulli の多項式で，とくに $B_2(h)=h^2-h+\frac{1}{6}$，$B_3(h)=h^3-\frac{3}{2}h^2+\frac{1}{2}$，である．

(2.4) $$\log C_1(t) = -pt^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{-\frac{p(p+1)}{2}(it) - \frac{2p}{3}(it)^3\right\} + \frac{1}{n}\left\{\frac{p(p+1)}{2}(it)^2 + \frac{2p}{3}(it)^4\right\} + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

従つて.

(2.5) $$C_1(t) = e^{-pt^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{p(p+1)}{2}(it) + \frac{2p}{3}(it)^3\right\} + \frac{1}{n}\left\{\frac{p(p+1)}{2}(it)^2 + \frac{p^2(p+1)^2}{8}(it)^2 + \frac{p(p+1)2p}{6}(it)^4 + \frac{2p}{3}(it)^4 + \frac{(2p)^2}{18}(it)^6\right\}\right] + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

$$\frac{\left(\frac{n}{2}+\sqrt{n}it\right)_\kappa}{\left(\frac{n}{2}\right)_\kappa} = \prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma\left[\frac{n}{2}\left(1+\frac{2it}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{2}(1-j)+k_j\right]\Gamma\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}(1-j)\right]}{\Gamma\left[\frac{n}{2}\left(1+\frac{2it}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{2}(1-j)\right]\Gamma\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}(1-j)+k_j\right]}$$ であるか

ら. 公式 (2.3) を用いて.

(2.6) $$\frac{\left(\frac{n}{2}+\sqrt{n}it\right)_\kappa}{\left(\frac{n}{2}\right)_\kappa} = 1 + \frac{2it}{\sqrt{n}}k + \frac{2(it)^2}{n}k(k-1) + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

をうる. (2.6) より.

(2.7) $$\begin{aligned} &\operatorname{etr}\left(-\frac{\Omega}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n}{2}+\sqrt{n}it; \frac{n}{2}; \frac{\Omega}{2}\right) \\ &= \operatorname{etr}\left(-\frac{\Omega}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{C_\kappa\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{k!}\left\{1 + \frac{2it}{\sqrt{n}}k + \frac{2(it)^2}{n}k(k-1) + O(n^{-\frac{3}{2}})\right\}\end{aligned}$$

をうる. $(\operatorname{tr} S)^k = \sum_{\kappa} C_\kappa(S)$ が成立しているから. 一般に.

次の関係式をうる.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{C_\kappa(S)}{k!}\{k(k-1)\cdots(k-r+1)\}$$

(2.8) $$= \sum_{k=r}^{\infty}\frac{(\mathrm{tr}S)^k}{k!}k(k-1)\cdots(k-r+1)$$

$$=(\mathrm{tr}S)^r\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(\mathrm{tr}S)^{k-r}}{(k-r)!} = (\mathrm{tr}S)^r\,\mathrm{etr}(S)$$

上の公式を用いて.

(2.9) $$\mathrm{etr}(-\tfrac{\Omega}{2})\,{}_1F_1(\tfrac{n}{2}+\sqrt{n}it;\tfrac{n}{2};\tfrac{\Omega}{2}) = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\mathrm{tr}\Omega + \frac{(it)^2}{n}\frac{(\mathrm{tr}\Omega)^2}{2} + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

をうる. (2.5)と(2.9)より.

(2.10) $$C(t) = e^{-Pt^2}\Big[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\frac{P(P+1)}{2}(it) - \mathrm{tr}\Omega(it) + \frac{2P}{3}(it)^3\Big\} + \frac{1}{n}\Big\{\frac{P(P+1)}{2}(it)^2 + \frac{P^2(P+1)^2}{8}(it)^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\Omega)^2(it)^2 - \frac{P(P+1)}{2}\mathrm{tr}\Omega(it)^2 + \frac{2P}{3}(it)^4 + \frac{P(P+1)2P}{6}(it)^4 + \frac{(2P)^2}{18}(it)^6\Big\}\Big] + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

をうる. (2.10)を反転することにより次の定理をうる.

[Theorem 1]

$\Omega = \Sigma^{-\frac{1}{2}}M'M\Sigma^{-\frac{1}{2}} = O(1)$ と仮定する.

$\tilde{z} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2p}} \log \frac{|S|}{|\Sigma|}$ とおく．このとき，

$$P\{\tilde{z} \leq x\} = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2p}\sqrt{n}}\left\{\left(\frac{p(p+1)}{2} - \mathrm{tr}\,\Omega\right)\Phi'(x) + \frac{1}{3}\Phi^{(3)}(x)\right\}$$

$$+ \frac{1}{2p\cdot n}\left\{\left(\frac{p(p+1)}{2} + \frac{p^2(p+1)^2}{8} + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\Omega)^2 - \frac{p(p+1)}{2}\mathrm{tr}\,\Omega\right)\Phi^{(2)}(x)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3} + \frac{p(p+1)}{6} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\Omega\right)\Phi^{(4)}(x) + \frac{1}{18}\Phi^{(6)}(x)\right\} + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

なる漸近展開が成立する．ただし．$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$．$\Phi^{(r)}(x)$ は $\Phi(x)$ の r 回の微分である．

§3. $\Omega = n\Theta = O(n)$ のとき

non-central Wishart 分布 $X'X = W$ の特性関数 $C_W(T)$ は Anderson [1] より次のように与えられる．

$$(3.1) \qquad C_W(T) = |I - 2i\Sigma^{\frac{1}{2}}T\Sigma^{\frac{1}{2}}|^{-\frac{n}{2}}\,\mathrm{etr}\left\{-\frac{\Omega}{2} + \frac{1}{2}(I - 2i\Sigma^{\frac{1}{2}}T\Sigma^{\frac{1}{2}})^{-1}\Omega\right\}$$

ただし．$T = \left(\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})t_{ij}\right)$，$t_{ij} = t_{ji}$ ．このことより，

$$S^* = \sqrt{n}\left\{\Sigma^{-\frac{1}{2}}S\Sigma^{-\frac{1}{2}} - (I + \Theta)\right\}$$

の特性関数 $C_{S^*}(T)$ は

$$(3.2) \qquad C_{S^*}(T) = |I - \frac{2i}{\sqrt{n}}T|^{-\frac{n}{2}}\,\mathrm{etr}\left\{-\frac{n}{2}\Theta + \frac{n}{2}(I - \frac{2i}{\sqrt{n}}T)^{-1}\Theta\right\}\mathrm{etr}\left\{-\sqrt{n}\,iT(I+\Theta)\right\}$$

となる．$C_{S^*}(T)$ を展開する．十分大きな n に対して．次の公式がなりたつことはよく知られている．

(3.3) $$(I-\frac{2i}{\sqrt{n}}T)^{-1}=I+\frac{2i}{\sqrt{n}}T+(\frac{2i}{\sqrt{n}}T)^2+\cdots$$

(3.4) $$|I-\frac{2i}{\sqrt{n}}T|^{-\frac{n}{2}}=\exp\{-\frac{n}{2}\log|I-\frac{2i}{\sqrt{n}}T|\}$$
$$=\exp\left[\frac{n}{2}\{\mathrm{tr}(\frac{2i}{\sqrt{n}}T)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\frac{2i}{\sqrt{n}}T)^2+\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\frac{2i}{\sqrt{n}}T)^3+\cdots\}\right]$$

(3.3) と (3.4) を用いて．$C_{S^*}(T)$ の展開式

(3.5) $$C_{S^*}(T)=\mathrm{etr}\{-T^2(I+2\Theta)\}\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{4}{3}\mathrm{tr}(iT)^3(I+3\Theta)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}\left\{2\mathrm{tr}(iT)^4(I+4\Theta)+\frac{8}{9}\{\mathrm{tr}(iT)^3(I+3\Theta)\}^2\right\}\right]+O(n^{-\frac{3}{2}})$$

をうる．(3.5) において．$p=1$ とし．それを反転することにより．

(3.6) $$P\{a^*\le x\}=\Phi(\frac{x}{\sqrt{2(1+2\theta)}})-\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1+3\theta}{(1+2\theta)^{\frac{3}{2}}}\Phi^{(3)}(\frac{x}{\sqrt{2(1+2\theta)}})$$
$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1+4\theta}{(1+2\theta)^2}\Phi^{(4)}(\frac{x}{\sqrt{2(1+2\theta)}})+\frac{1}{9}\frac{(1+3\theta)^2}{(1+2\theta)^3}\Phi^{(6)}(\frac{x}{\sqrt{2(1+2\theta)}})\right\}+O(n^{-\frac{3}{2}})$$

なる漸近展開をうる．上の式は．non-centrality parameter の order が n であるときの non-central χ^2－分布の漸近展

関を与えている.

(3.5)はS^*の漸近分布が平均0, s^*_{ij}とs^*_{kl}の共分散が g_{ijkl} なる多次元正規分布になることを示している. g_{ijkl} は

$$(3.7)\qquad 2\,\mathrm{tr}\,T^2(I+2\Theta)=\sum_{i\le j}\sum_{k\le l} g_{ijkl}\,t_{ij}\,t_{kl}$$

で定義される. このことより, central Wishart 行列の関数の漸近分布を求める公式(塩谷, 早川[5])を non-central Wishart 行列の関数の漸近分布を求める公式に拡張することができる.

[Lemma]

$\tilde{S}=\Sigma^{-\frac{1}{2}}S\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ とおく. $f(\tilde{S})$ は $\tilde{S}=I+\Theta$ の近傍で, 2回の微分が存在するとする. このとき:

$$\sqrt{n}\,\{f(\tilde{S})-f(I+\Theta)\}$$

の漸近分布は平均0の正規分布で, $f(\tilde{S})$の漸近分布における分散は

$$\text{A-var}\{f(\tilde{S})\}=\frac{2}{n}\,\mathrm{tr}\,F^2(I+2\Theta)$$

で与えられる. ただし, $F=\left(\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})f_{ij}\right)$, $f_{ij}=\left.\frac{\partial f(\tilde{S})}{\partial \tilde{s}_{ij}}\right|_{\tilde{S}=I+\Theta}$

[Proof]

$\hat{s}_{ij}$ と $\hat{s}_{k\ell}$ の漸近分散が $g_{ijk\ell}$ であることと，(3.7)を用いて

$$\mathrm{A\text{-}var}\{f(\hat{S})\} = \sum_{i\le j}\sum_{k\le \ell} \left.\frac{\partial f(\hat{S})}{\partial \hat{s}_{ij}}\right|_{\hat{S}=I+\Theta} \cdot \left.\frac{\partial f(\hat{S})}{\partial \hat{s}_{k\ell}}\right|_{\hat{S}=I+\Theta}$$

$$\times \frac{1}{n} g_{ijk\ell} = \frac{2}{n}\operatorname{tr} F^2(I+2\Theta)$$

(Q.E.D)

Lemmaより次の結果をうる．

[Theorem 2]

$\Omega = \Sigma^{-\frac{1}{2}}M'M\Sigma^{-\frac{1}{2}} = n\Theta = O(n)$ と仮定する．このとき，

$$\sqrt{n}\left\{\frac{|S|}{|\Sigma|} - |I+\Theta|\right\}, \text{ および, } \sqrt{n}\log\frac{|S|}{|\Sigma|\,|I+\Theta|}$$

の漸近分布は，それぞれ，$N[0,\ 2|I+\Theta|^2\operatorname{tr}(I+\Theta)^{-2}(I+2\Theta)]$，
$N[0,\ 2\operatorname{tr}(I+\Theta)^{-2}(I+2\Theta)]$ である．

[Proof]

Lemmaにおいて $f(\hat{S}) = |\hat{S}|$ とする．すると，

$$F = \left.\left(\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})\frac{\partial|\hat{S}|}{\partial \hat{s}_{ij}}\right)\right|_{\hat{S}=I+\Theta} = |I+\Theta|(I+\Theta)^{-1}$$

となる．従って，前半の結果をうる．後半は前半の結果を用いるとよい．

(Q.E.D)

参考文献

[1] Anderson, T. W. (1946). The non-central Wishart distribution and certain problems of multivariate statistics. A. M. S. 17. 409～431.

[2] Anderson, T. W. (1958). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York.

[3] Bagai, O. P. (1965). The distribution of the generalized variance. A. M. S. 36. 120～130.

[4] Costantine, A. G. (1963). Some non-central distribution in multivariate analysis. A. M. S. 34. 1270～1285.

[5] 塩谷実, 早川毅 (1964). Wishart 行列の関数の漸近分布 統計数理研究所彙報. 12. ・191～198.