数理解析研究所講究録
第45巻 1968年 1-29

制御理論の最近の動向

京都大学工学部 椹木義一

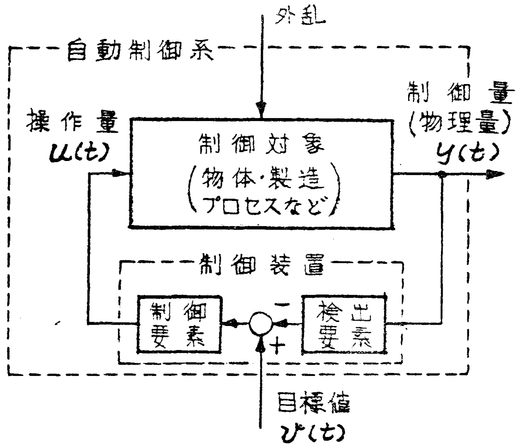
1. 緒　　言

自動制御の基礎概念を，第一図の助けをかりて定義の形で説明すると，以下のように述べられる。すなわち自動制御とは，「ある物体，製造プロセスあるいは機械などにおける物理量 $y(t)$ を，環境の変化に起因する外乱 $\xi(t)$ の影響を排除して，目標値 $v(t)$ にたえず一致させるような操作 $u(t)$ を自動的に行うことである」と述べられる。ただしここで t は言うまでもなく時間変数であり，時間関数 $y(t)$，$\xi(t)$ および $v(t)$ は，本節では，すべてスカラ関数とする。上述の説明をいま少し数学的に記述すると以下のようになる。すなわち制御対象といわれる物体とか製造プロセスに対して，力学的見地から，つぎの線形スカラ微分方程式

$$(1.1)\qquad y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny = b_0u^{(m)}+b_1u^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}\dot{u}+b_mu+g\xi$$

が確立されたものとしよう。ただし上式において、$\bullet$, (n) および (m) はいずれも第1,第 n および第 m 階の時間に関する微係数をあらわすもので、$1 \leq m \leq n$ である。また $a_1, \cdots, a_n$; $b_0, \cdots, b_m$ および g は常数である。

上述の定義に従えば、 $u\{t, y(t)\}$ のような操作,すなわち制御量 $y(t)$ の時々刻々の変化を観測して、その結果に応じて訂正操作を決定するという、第1図のようなフィード バック回路の構成が自然的に導かれ、各要素が情報の授受を行いながら全体としては自動制御系というひとつの System (第4節参照)を構成するものである。この事実は、古く電気通信工学の分野において認められないこともないが、広く工学分野に滲透したことは、原子エネルギの開発とともに画期的なものであるといえよう。 しかしながら自動制御が、単に実際面ばかりでなく、その研究面においても今日の隆盛をみるに至ったのには、いまひとつの理由がある。それは(1.1)式が右辺に二種類の項をもっていることである。常微分方程式論の表現をか



第1図　自動制御の基礎概念

りるならば、右辺はすべて強制項といえるであろうが、$u(t)$に関する項は、$\xi(t)$一項と異なっている。$\xi(t)$はたしかにこの力学系に対して、外部から印加されるものに対する表現であるが、$u(t)$に関しては、すでに述べたように、目標値に制御量を一致させるという制御の目的に応じて定められるべき性質のものであると解釈される。このような事情は自動制御独特のものであり、純粋数学の分野においても新しい興味をよび、現在われわれが近代制御理論とよんでいる非常に数学的な制御理論の誕生の要因となったことは否定できない。そして現状では、実際応用面には眼を閉じたような形で議論を抽象化しながら、純粋数学の一部門としての存在を確立しつつあるようにみうけられる。しかしこの傾向は多くのより実際的な問題点をさらに理論的に究明して、制御技術の一層の発展のための足がかりを見出そうという必然性をもって誕生したものである。それならばどういう必然性のもとに、どのような過程を辿って発展し、さらに今後どの方向の問題の解決に希望が見出されるであろうか。これを論じようとするのが本稿の目的である。もちろん自動制御と表題を冠する以上、第1図に示した制御装置をはじめとする制御回路要素設計の実際面、あるいはさらに各種製造プロセスの制御、計装技術の開発研究の現状と将来についても論及する必

要のあることは十分に認めるが、筆者のふん囲気は、むしろ重点を制御理論の面において議論を進める方に適している。したがって実際技術の詳細な展望を望まれる向には、別の文献を調査されることを希望する。

2. 伝達関数法と状態空間解析法

自動制御の初期においては、理論面よりも実際面の方が先行していた感があったのを誰しも否定できないであろう。したがって制御理論そのものも、実在する制御系の動的な特性を解明することに主眼がおかれ、この目的のために、Laplace 変換が重要な役割を果したのである。すなわちすべての変数初期値を零として，(1.1) 式に Laplace 変換，

$\mathcal{L}[y(t)] \triangleq Y(s)$，　$\mathcal{L}[u(t)] \triangleq U(s)$，

$\mathcal{L}[\xi(t)] \triangleq \Xi(s)$　を施せば、制御量 $y(t)$ と操作量 $u(t)$ および制御量 $y(t)$ と外乱 $\xi(t)$ との間の伝達関数 $G_U(s) = Y(s)/U(s)$ および $G_\Xi(s) = Y(s)/\Xi(s)$ が定義される。このような伝達関数から複素パラメータ s を $j\lambda$（λ：角周波数）とおくことによって，さらに周波数伝達関数 $G_U(j\lambda)$ および $G_\Xi(j\lambda)$ が定義されて、(1.1 式) で定められるプロセスの挙動が周波数領域であますところなく議論され、同時に時間領域での挙動も，伝

達関数と、Laplace 逆変換の性質をかりて把握することができた。さらに伝達関数法は単に線形連続制御系の動特性の解析的検討に止まらず，サンプル値制御系、非線形制御系にまでも導入されて、それらの安定度の改善、補償要素のパラメータ決定などと言う設計あるいはシンセシスの面をも含めた有力な情報をもたらすまでに駆使された。しかし自動制御の現実は制御理論のこの段階での完成を不満としていたのである。どういう問題が注目されたのであろうか。そのひとつはプロセスの動的挙動の“複雑さ”であり、他は制御系に印加される外乱などの信号の“不規則さ”である。このような制御系自身ならびにその環境と言う内外両面にまたがる問題の解決は、従来の制御理論による処理では到底不可能で、新しい理念の導入が要請されたのも当然である。

本節以後しばらくプロセスの複雑さと言う問題をとりあげよう。“複雑さ”と言う表現は非常にあいまいであるが，その最も直観的な場合として、多次元のプロセスを考えてみよう。それは自動制御の対象となるような工業プラントは、従来の伝達関数法で処理できるような低次元の単純なものではないからである。さらにその動特性も時間に対して決して一定ではなく、時々刻々変ってゆくことは、われわれの常に経験するところである。したがって、（1.1）式にかわって、

変係数型スカラ微分方程式

(2.1) $$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)\dot{y}+a_n(t)y$$
$$=b_0(t)u^{(m)}+b_1(t)u^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}(t)u+b_m(t)u+g(t)\xi$$

を与えよう。そしてこのプロセスの出力 $y(t)$ のみならず、その高階の微分値までも制御する必要性が現実に起っていることは事実である。ここで (2.1) 式に Laplace 変換を行って伝達関数を導くことは最早不可能であり、したがってこのような非定常多次元の問題は、時間領域で議論せざるをえなくなったわけであるが、そうかと言って微分方程式 (2.1) 式の解に直接注目するということも賢明な方法とは言えない。そこで多次元プロセスのある時刻 t における状態の表現を試みよう。この目的のために

(2.2) $$y(t)=x_1(t),\ \dot{y}(t)=x_2(t),\ \ddot{y}(t)=x_3(t),$$
$$\cdots,\ y^{(n-1)}(t)=x_n(t)$$

という関係のもとに、新らしい変数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$ を導入し、(2.1) 式を

(2.3) $$\dot{x}(t)=F(t)x(t)+B_0(t)u(t)+G_0(t)\xi(t)$$

というベクトル微分方程式に書き改めることにする。ただし上式は簡単のため、(2.1) 式において $b_0(t)=b_1(t)=\cdots=b_{m-1}(t)=0$, $b_m(t)=b(t)\neq 0$ として導かれ、また

(2.4a) $x(t)=[x_1(t)\quad x_2(t)\cdots x_{n-1}(t)\quad x_n(t)]'$
(2.4b) $B_0(t)=[0\quad 0\cdots b(t)]'$
(2.4c) $G_0(t)=[0\quad 0\cdots g(t)]'$

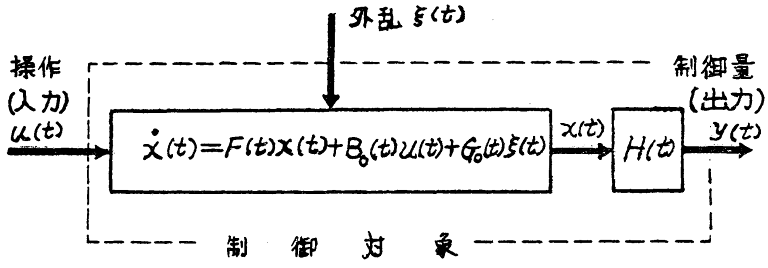
(2.5) $$F(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & & & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

であり、′は転置をあらわす。あきらかに（2.2）に与えられた n 個の変数の初期値 $x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)$ が与えられれば、ベクトル微分方程式（2.3）式の解 $x(t)$（$t \geq t_0$）は一義的に定められる。このようにある時刻 $t \geq t_0$ において、プロセスの動的な挙動を一義的に定めるために、初期状態 $t=t_0$ において、それらの値が定められねばならない最少個数の変数の一群を状態変数という。（2.4a）の各要素は状態変数であり、$x(t)$ はしたがって状態ベクトルといわれ、状態ベクトルのある空間を状態空間とよんでいる。［1.2］したがって（2.3）式は状態空間でプロセスの動的挙動を定めるベクトル微分方程式である。われわれが従来まで観測して出力あるいは制御量と称していたものは、状態ベクトルの一要素かまたは全然別のものになってしまった。（第2図参照）この見地から出力 $y(t)$ は、たとえば観測装置の変換特性というような物理的事情を考慮して、時間おくれも、観測雑音もなければ

$$(2.6) \qquad y(t) = H(t)\, x(t)$$

のようにして得られるものと考えるのが自然である。

ただし上式において、$y(t)$ は m 次元ベクトル $(m \leq n)$ であり、$H(t)$ は時間に依存する要素をもつ $(n \times m)$ マトリクスである。このようにして制御理論の出発点が伝達関数から(2.3)式のような状態空間において記述された微分方程式へと変ってしまったことは、近代制御理論をながめるときに見逃してはならない重要な点である。さらに前節において述べた自動制御の定義も「環境の変化に起因する外乱 $\xi(t)$ の影響を排除して、プロセスの状態 $x(t)$ を、新しい希望状態 $x_d(t_d)$. $(t < t_d)$ に移行せしめるような操作 $u(t)$ を自動的に行なうことである」と述べられよう。この定義に述べられた目的を果すために操作 $u(t)$ をどういうように定めればよいかということが制御理論の根本問題となってきた。古典的制御理論とも言うべき伝達関数中心の手法から状態空間解析にその基礎をおく近代制御理論への移行によって数多くの重要な制御問題



第2図 状態空間における制御対象の数学的モデル

がとかれ、また将来の自動制御のための有用な指針が確立されつつある。この事情を次節において展望してみよう。

3. 近代制御理論における諸問題

3.1　可制御性および可観測性：第一に以下に述べるような制御の根本問題にふれるような問題を考えてみる。いま雑音のないプロセスを考える。その微分方程式は、（2.3）式を参照することによって

（3.1）　$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$

$[0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 < \infty]$

のような一般的な形に書くことができよう。ただし上式において、$x(t)$ は n 次元状態ベクトル，$u(t)$ は m 次元操作ベクトル，$A(t)$ および $B(t)$ はそれぞれ $n \times n$，$n \times m$ マトリクスで、すべての要素は時間に関して連続な関数であるものとする。さてここで状態変数 $x_i(t)$，$(i=1,\cdots,n)$ のすべてが、ある定められた $u(t)$ という操作によって、希望状態 $x_i(t_1)$ に移動することが可能であろうか。換言すれば、操作 $u(t)$ を定めたとしても，n 個の状態変数のなかには、実際には制御不可能な状態変数があって、制御そのものが無意味になりはしないかという問題である。これは、一入力ー出力間の情報伝達にのみ終始して

きた伝達関数の範囲では考え及ばなかった問題であり、多次元の制御という実際的な立場に立って状態空間解析を導入することによって、始めて浮び上がったものと言うべきである．この問題を可制御性の問題という．

いま動特性が時間に対して不変であるようなプロセス、すなわち（３．１）式において、$A(t)\equiv A$，$B(t)\equiv B$（Ａ．Ｂはともに定数マトリクス）である場合を例にとって、可制御性の問題の数学的な表現をしよう。それは線形ベクトル微分方程式（３．１）式の解

（３．２）　$x(t)=\exp(At)\{x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\exp(-As)Bu(s)ds\}$
$(t\in[t_0,t_1])$

において、ある有限時間$[t_0,t_1]$の間に、$x(t_0)$から$x(t_1)$に状態ベクトルを移す関数$u(t)$が存在するかどうかという問題を解決することである。この問題に対する解を以下に定理の形で示そう。［３，４］

［定理－１］　あるプロセスの動特性が、$\dot{x}=Ax+Bu$によって定められる時、次の複合マトリクスの位数がnであるときに限り、このプロセスは状態変数に関して完全可制御あるいは（Ａ．Ｂ）可制御という。

（３．３）　$P_1=[B\vdots AB\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B]$

さてここで［定理－１］におけるプロセスの観測出力が、

（２．６）式の関係のもとに得られる場合を考えよう。ただし $H(t)\equiv H$ （H は定数マトリクス）とする。こういう場合にはたして $y(t)$ を観測することによって、プロセスの状態 $x(t)$ を知ることができるであろうか。換言すればマトリクスAおよびB、さらにベクトル $u(t)$ も既知であるとして、$y(t)\equiv Hx(t)$ すなわち

（３．４）　$$y(t)-H\int_{t_0}^{t}exp\{A(t-s)\}Bu(s)ds = Hx(t_0)\,exp(At)$$

を満足するような初期状態ベクトル $x(t_0)$ が定められるかどうかという問題である。これに対しては、以下に述べるような可観測性に関する定理が確立されている。［３、４］

［定理－２］　あるプロセスの動特性が $\dot{x}=Ax+Bu$ によって定められ、その出力が $y(t)=Hx(t)$ という関係によって得られるとき、つぎの複合マトリクスの位数が n であるときに限り、このプロセスは完全可観測である。

（３．５）　$$P_2=[H' \mid A'H' \mid \cdots \mid A'^{n-1}H']$$

この定理によって、ひとつのプロセスの可観測を調べることができるが、条件（３．５）を、条件（３．３）と比較すれば明らかなように、条件（３．５）は

（３．６）　$$\dot{z}(t)=-A'z(t)+H'u(t)$$

というベクトル微分方程式で定められるプロセスの状態変数

に関する完全可制御の条件と一致している。この事実を[定理ー1]で述べられたプロセスと(3.6)式で定められるプロセスとの間の双対性という。[3.4]

上述のような可制御性および可観測性に関する必要かつ十分な条件の確立によって、多次元の場合において、真に意義ある制御が行いうるか否かを判別することができるようになった。現在ではさらに動特性が時間とともに変化するプロセス[3〜5]時間おくれのあるプロセス[6]非線形伝達特性をもつプロセスなどに対する可制御性および可観測性の研究[6.7]も行なわれているが、問題はすべて解決したわけではない。たとえばすでに確立されている[定理ー1]あるいは[2]において、行列の位数の計算は実際には相当厄介であり、より実際的条件への発展、あるいは従来の伝達関数と対応させた考察のひとつとして、零点と極の配置と可制御性との問題の関連など課題は非常に多い。

3.2　最適制御理論：第2の問題は最適制御である。最適という表現は伝達関数法を基盤とする古典的な制御理論においても盛んに用いられていたが、これは既定の制御装置に対するいわゆるパラメータ調整であった。しかし多次元系では、調整の対象となるパラメータの個数も多くなり、それらを定める手順も複雑になると同時に、パラメータ調整だけで最適

制御が実現しうるかどうかも疑しいから、制御装置の最適動特性そのものを見出そうという動機が芽生えたのも当然であろう。こういう動機から、最適制御そのものの規準も古典的制御理論の時代に比べて、より高度な、またより実際的なもの、たとえば（ｉ）最短時間制御、（ii）最終値制御あるいは（iii）積分 $\int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t)\,dt$ を最小（又は最大）にする操作 $u(t)$ を決定するという最小（又は最大）積分制御というような制御規範が考慮されるようになった。これらの問題を統一的に取扱い、その解を与える手法として最大原理ならびにダイナミック プログラミングという二つの方法がある。これらを論ずるに先立ち、問題をいま少し数学的に表現しよう。

まずプロセスの数学モデルは（３．１）式によって与えられるものとし、また $x(t_0) \triangleq x_0$，ならびに $x(t_1) \triangleq x_{t_1}$ とする。つぎに操作信号 $u(t)$ にその物理的実現性を考慮して、ひとつの拘束条件を設けておこう。いま Compact set $U \subset E_m$ （E_m：m次元ユークリッド空間）を考え、操作ベクトル $u(t)$ の成分が $t \in [t_0, t_1]$ で可測で、かつ $u(t) \in U$ であるときこのような $u(t)$ を許容操作という。$u(t) \in U$ の具体的な形として $|u(t)| \leq K$ というようなものが考えられる。最後に制御性能評

価関数の数学的表現として、上述(iii)において $L(x,u,t)\equiv g(x,t)+h(u,t)$ とした

(3.7) $J \triangleq \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \{g(x,t)+h(u,t)\}dt$

という積分が最小になるように、操作 $u(t)$ を定めるものとする。ただし積分(3.7)において、関数 $g(x,t)$ および $h(u,t)$ は、$t\in[t_0,t_1]$ で、変数 x および u について、一価凸関数であり且各変数について2階まで偏微分可能であるものとする。また $h(u,t)$ は u について少なくとも2次であるものとする。このように種々の条件を設定しておいて、(3.7)の制御性能評価関数を最小(または最大)にするような許容操作 $u(t)\in U$ を見出そうというのが問題であり、これに対する解として、つぎの定理が確立されている。[8]

[定理−3] 最適制御問題に対する解になるべき許容操作 $u^*(t)$ ($t\in[t_0,t_1]$) が存在するためには、すべての $t\in[t_0,t_1]$ に対し

(3.8) $H[\psi(t),\ x(t),\ u^*(t),\ t]$

$$= \max_{u(t)\in U}\left[\psi'(t)\{A(t)x(t)+B(t)u(t)\}-\{g(x,t)+h(u,t)\}\right]$$

のような、$u^*(t)$ および $x(t)$ に対する Hamilton 関数 H をみたす零でない連続ベクトル関数 $\psi(t)$ が存在する必要がある。ただし

(3.9) $\Psi(t) \triangleq [\psi(t) \quad -1]'$

$\psi(t) \triangleq [\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \cdots \psi_n(t)]'$

であり、ベクトル関数 $x(t)$ および $\psi(t)$ は、つぎの一組の微分方程式

(3.10) $\dot{x}(t) = \partial H / \partial \psi = A(t)x(t) + B(t)u(t),$

$x(t_0) = x_0$

$\dot{\psi}(t) = -\partial H / \partial x = \partial g(x,t) / \partial x - A(t)'\psi(t),$

$\psi(t_1) = 0$

を満たさねばならない。

この原理によって、所要の操作 $u^*(t)$ を必要条件を満足する形において求めることができるが具体的な計算のためには、二点境界値問題をとかねばならない。しかしこれは、ベクトル関数 Ψ の初期値ベクトル $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, -1)$ を決定することが困難であることから、非常に難しいことである。

[定理−3]が Pontryagin によって確立された最大原理であるが、同じような問題をダイナミック プログラミングによって解くこともできる。[9] すなわち最適性の原理によって導かれる Bellman の方程式

(3.11) $-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \min_{u(t) \in U} [g(x,t) + h(u,t) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \{A(t)x(t) + B(t)u(t)\}]$

を解けばよい。ただし

(3.12) $$\phi(x,t)=\min_{u(t)\in U}\int_{t_0}^{t_1}\{g(x,t)+h(u,t)\}dt$$
$$(\phi=0 \quad \text{for } t=t_1)$$

である。(3.11)式をとけば、所要の操作は $u^*(t,x)$ というフィードバック制御の形で実現されるのであるが、(3.11)式の解析的な取扱いは、ごく簡単な場合を除いては、ほとんど不可能であり、ディジタル計算機の利用が必然的に要求される。

上述の最適制御理論は、動特性が非線形微分方程式によって定められるようなプロセスに対しても、もちろん適用可能である。しかしいずれの場合においてもディジタル計算機を活用せねばならず、この見地に立てばグラデイエント法も最適制御問題をとくためには、有力な実際的方法であると言えよう。[10.11] これに関する詳細な説明は省略するが、この方法によれば、プロセスの数式モデルが実情と少し違っていても適用できるという利点がある。しかしその反面、評価関数のパラメータ空間における単峰性など、理論的にはかなり強い制限があることも留意すべきである。

3.3 プロセス動特性の同定と感度解析:3.1あるいは3.2において、われわれはプロセスの動特性をベクトル微分方程式によって与えたのであるが、注目しているプロセス

が、たとえば（３．１）式のように、数学的に表現されるかどうかは甚だ疑問である。実際問題としては、そのプロセスの数学的表現をどのようにすればよいかという同定の問題が解決されて始めて意味のある理論展開が可能となるのである。したがってプロセス動特性の同定は、非常に重要な問題である。

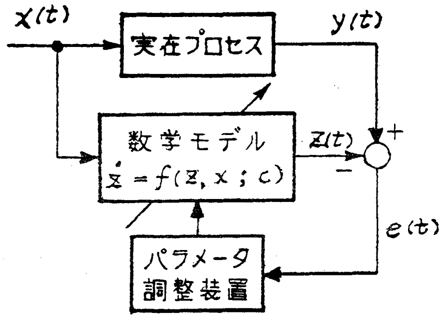
プロセス動特性同定の基本的手法には、Black box 法と Gray box 法という二つの方法がある。前者はプロセスの構造に関する予備知識が全くないという前提にたった手法であり、後者はプロセスの物理的、化学的な構造がある程度事前に把握できるときに用いられる手法である。いずれにしても、その根本思想は、同一入力に対する実在プロセスと数学モデルとの出力の差の適当な量、たとえば差の自乗平均値を最小にするような数学モデルを決定しようとするものであるが、とくに Gray box 法では、プロセスを調節可能なパラメータ $C_0, C_1, \cdots, C_N$ をもつ微分方程式を、たとえば第３図に示したように

$$\dot{z}(t) = f[z(t), x(t) ; C] \quad (3.13)$$

$$C = [C_0, C_1, \cdots, C_N]$$

の形に与えて、この数学モデルの出力と、実在プロセスの出力との差 $e(t) = y(t) - z(t)$ の二乗平均値を最小にす

るようにパラメータ$C_0, C_1, \cdots, C_N$を決定するのであるから、実際面への応用の可能性も広く、パラメータの決定にあたっては、グラディエント法が適用可能であろう。しかしながらどういう手法を採用したとしても、同定の完全を期待することは無理である。このことから現在では、プロセス同定の完全を期するよりも、むしろこの不完全さを補償した制御系シンセシスの手法を確立しようという傾向にある。この傾向は感度解析の概念[12.13]と最適制御の理念の結合によって生まれたものである.[14.15]



第3図 Gray box法によるプロセス動特性の同定

すなわち(3.13)式のような数学モデルを確立したものとして、いまプロセスの動特性が次式のように表現されたものとしよう.

(3.14) $\dot{x}(t)=f[x(t), u(t), C], \ x(t_0)=x_0$

さらに評価関数としては、(3.7)式の前半で定義されるような積分 J を考え、これを最小にするような許容操作$u^*(t)$を見出すという最適制御問題をとりあげよう。ここで上述のような最適化問題の解がパラメータの変化に対し非

常に sensitive であれば、この変化が僅かであっても、評価関数は最適な状態から大きくずれたものになる。したがって、前節で述べたような最適化の方法に依存しているだけでは、このずれを補償することができないから

$$(3.15) \qquad J_s=\int_{t_0}^{t_1}L[x(t),u(t),t]\,dt+\int_{t_0}^{t_1}G[q_0,q_1,\cdots,q_r]\,dt$$

のように修正された評価関数に対する最適問題を考えることによって、パラメータの変動に対しても insensitive な最適解を求めようというものである。ただし（3.15）式において、$q_i=\partial x/\partial c_i$ によって定義される感度係数[12.13]である。しかしこの方面の研究は、漸くその緒についたばかりで、上述のようなパラメータベクトルの基準状態からの変化のみならずプロセス数学モデルの構造の変化というような場合をも含めて、どのような修正評価関数をつくればよいかという問題に始まり、多くの未開拓の分野を含んでいる。

3.4 安定理論：Bode線図あるいはNyquist線図を用いて、周波数領域において制御系の安定性を論じた時代から、今日ではLiapunovの方法によって、時間領域で制御系の安定性を論ずるようになった。それならば時間領域において、

安定性をどのように定義するのであろうか．［16］　いま制御系が，つぎのような非線形ベクトル微分方程式であらわされるものとする．

（3．16）　$\dot{x} = f(x, t)$　，　$x(t_0) = x_0$　，

$$0 \leq t_0 \leq t < \infty$$

ただし，ここで f は状態空間で，x および t について連続な偏微係数をもつ n 次元ベクトル値関数であり，すべての t に対し，$f(0, t) = 0$　とする。いま $x = x_e$ に平衡点があるものとする。

［定義－1］　微分方程式（3．16）式でその動特性が定められる制御系の平衡点 x_e は，もし任意の正数 ϵ に対して，$\| x_0 - x_e \| \leq \delta$　のときすべての $t \geq t_0$ に対して，$\| \phi(t; x_0, t_0) - x_e \| < \epsilon$　となるような正数　$\delta(\epsilon, t_0) > 0$　が存在するならば，平衡点 x_e は安定であるという。ただし $\phi(t; x_0, t_0)$　は（3．16）式の解をあらわし，$\phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$　であり，また $\| \cdot \|$ は“・”の状態空間におけるノルムをあらわす。

［定義－2］　定義－1のもとに $\lim_{t \to \infty} \| \phi(t; x_0, t_0) - x_e \| = 0$　であるとき，平衡点 x_e は漸近安定であるという。

これらの定義にもとずいた安定判別の実際的方法は、つぎに述べる $Liapunov$ の定理に従う。[16〜19]

[定理−3] 状態空間において、x および t の関数で、しかも連続な1階の偏微係数をもつスカラ関数 $V(x, t)$ が存在するものとする。いますべての t に対し、$x_e = 0$ として

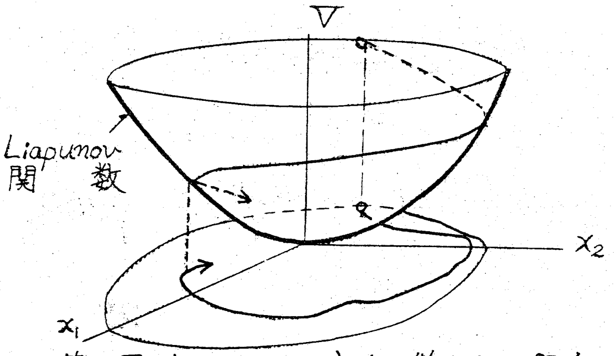
(I) $V(x, t) > 0 \ (x \neq 0)$, $V(0, t) = 0$; $V(x, t) = \alpha(\|x\|) > 0$, $\alpha(\|x\|) > 0 \ (\|x\| \to \infty)$

(II) $\dot{V}(x, t) < 0 \ (x \neq 0)$, $\dot{V}(0, t) = 0$

であるならば、原点 $x_e = 0$ は漸近安定である。これを幾何学的に解釈するために

(3.17) $$\dot{V}(x, t) = \langle \mathrm{grad}\, V, f(x, t) \rangle$$

とする。ただし $\langle , \rangle$ はベクトルの内積をあらわす。いま、(3.17) 式において、x が (3.16) 式の解であれば $\dot{V}(x, t) = dV/dt$ となって、V 関数は解軌道にそって、時間に関する微係数をもつことがわかる。したがって第4図にも示したように、$\dot{V}$ の正負は、時間の経過に従って、解軌道が原点から



第4図 Liapunovの方法の幾何学的解釈

遠ざかるか、あるいは原点に接近するかを調べる目安になる。

このように Liapunov の方法は、線形制御系はもちろんのこと非線形制御系にも適用でき、しかも非線形微分方程式の解を求めることなく、直接安定判別を実行しうるという利点をもっている。

しかしその反面 Liapunov 関数とよばれる上記のV関数を見出すことが非常に困難であり、[20～22]、また適当なV関数を見出したとしても、これはその制御系にとって一義的なものではなく、したがって安定判別条件も十分条件であるから、多くの問題がまだ残されている。しかしながら、Liapunov の方法から発展して、Luré, Popov など[23～27]によって制御系の絶対安定など多くの問題が論じられているのは注目に値するものといえよう。

3.5 確率制御過程論：本節において、いよいよ制御系の複雑さに加えて、信号の不規則さをも同時に考察しよう。このような最も実際的な見地に立った制御理論の展開にあたっては、確率過程の基礎概念[28.29]を導入せねばならないのは当然であるが、最近確率制御過程を考察するに当って、その思考過程の基礎を確率微分方程式[28.30]に求める傾向が強くなってきた。たとえば(2.3)式において $\xi(t)$ が正規性白色雑音である場合には、(2.3)式は厳

密な意味では成立しないから：（２．３）式に代って、伊藤型の確率微分方程式［２８．３０～３２］

$$(3.18)\quad dx(t,\omega)=F(t)x(t,\omega)dt+B_0(t)\varphi(t,\omega)dt+G_0(t)dw(t,\omega)$$

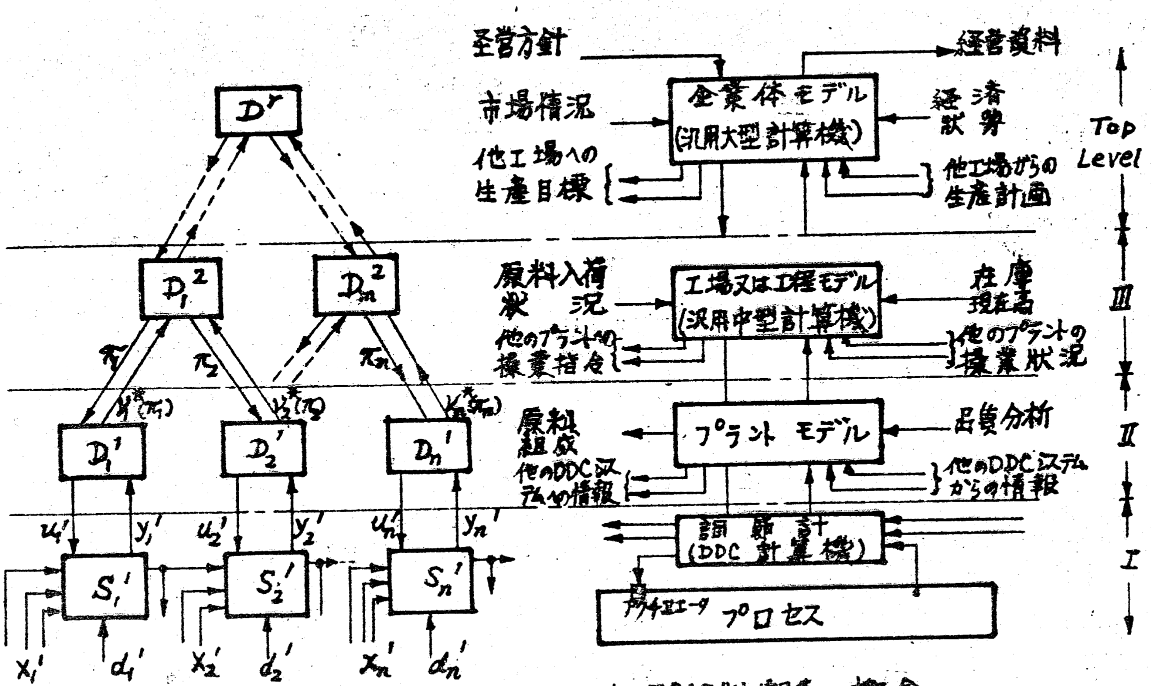
が用いられるようになった。ただし ω は確率空間 Ω に属する集合であり、$u(t)\in\varphi(t,\omega)$ また $w(t,\omega)$ は $\alpha(\leq n)$ 次元ベクトル Brown 運動過程であり、$\xi(t,\omega)$ という正規性白色雑音と $w(t,\omega)=\int^t\xi(s,\omega)ds$ によって関係づけられているものである。［３３］(3.18) 式のような確立微分方程式に対する基礎理論を中心に、現在では、線形制御系に対する状態変数の推定［３４．３５］最適制御理論［３６］可制御性［３７］などの問題またこれらの問題に対する非線形制御系における近似手法［３８～４１］など多彩な研究がようやく展開され始めたようである。

4. 計算機制御とシステム理論

これまで状態空間解析法を中心とする近代制御理論の姿を、数種の互いに関連のある話題を提出することによって説明してきたのであるが、これらを要約すると、最近の自動制御の動向は、システム理論の裏付をもつ計算機制御にあると言い得るであろう。すなわち化学工業、製鉄あるいは発電などのプ

ラントを、入力の集合ならびに入力と非常に複雑な対応関係をもっている出力の集合　そして両者の関係を数学的に表現する写像関数という三者によって記述し、これをシステム（厳密な定義は［４２．４３］参照）と称し、このようなシステムの最適化を考えようというのである。たとえば鉄鋼プラントにおける全工程の最適操業、化学工業などにおける全反応工程の最適化などは、システムの最適化問題を論ずる場合の好例である。このようなシステムの最適化に対して、前節で述べたような近代制御理論は、計算機の導入を前提として原理的には適用可能であるが、完全な実現という段階を達成するには未だ十分ではない。現状においては、システムの最適化に対して実用的な方法は Multi-level 制御系の概念である。［４４］これは第5図(a)に示したように、全システムのなかで適当な拘束条件のもとにわけられた互いに干渉のある Subsystem $S_1', S_2', \cdots$ を巧みに制御して、全システムの最適化を達成しようというのである。すなわち $S_1', S_2', \cdots$ という Subsystem はそれぞれに配属された $D_1', D_2', \cdots$ という装置によって最適化され、$D_1', D_2', \cdots$ という Subsystem 用の最適化装置自身は、$D_1^2, D_2^2, \cdots$ という監視センターで監視され、その出力 $\pi_1, \pi_2, \cdots$ を設定値とし

ている。もちろん D_1', D_2' ・・・ の制御結果は、$\nu_1^*(\pi)$, $\nu_2^*(\pi)$, ・・・ として、D_1^2, D_2^2, ・・・ にフィードバックされ、ここで検討されてよりふさわしい π_1, π_2, ・・・ が得られる。このような理念を実際問題と結びつけたのが、第5図（b）に示した階級制御方式である。［45］



(a) Multi-level 制御系の概念　　(b) 階級制御系の概念

第5図

従来のアナログ式制御装置に代る Direct Digital Control（DDC）の開発と共に、階級制御方式は、計算機と結びついた今後の自動制御の姿を示している。

本稿を草するに際して多大の努力をしていただいた本学砂原

助教授に深甚の謝意を表する。

参 考 文 献

(1) Kalman, R.E. and Bertram, J.E.: A unified approach to the theory of sampling systems; J. Franklin Inst., 267, 1959, 405

(2) Kalman, R.E.: Mathematical description of linear dynamical systems; J. SIAM, Ser.A, Control,1,1963,152

(3) Kalman, R.E.: On the general theory of control systems; Proc. 2nd IFAC Congress, Basle, 1963, 481

(4) Kalman, R.E., Ho, Y.H. and Narenda, A.: Controllability of linear dynamical systems; Contrib. Diff. Eq., 1, 1963

(5) Weiss, L.: Weighting patterns and the controllability and observability of linear systems; Proc. Nat. Academy of Sciences, 51, 1964, 1122

(6) Weiss, L.: On the controllability of delay-differential systems;Center for Dynamical Systems Tech. Reps., Div. of Appl. Math., Brown Univ., 67-3, March, 1967

(7) Tkhan'bang, N.: On the controllability of quasi-linear systems; PMM, 31, 1967, 160

(8) Pontryagin, L.S., et al.: The mathematical theory of optimal precesses; John-Wiley, N.Y., 1962

(9) Bellman, R.: Dynamic programming; Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1957

(10) Kelley, J.J.: Method of gradients; Optimization Technique, Chapter 6, Leitman, G.(ed.), Academic Press, N.Y., 1962

(11) Kopp, R.E. and Moyer, H.G.: Trajectory optimization technique; Advances in Control IV, Leondes, C.T.(ed.), Academic Press, N.Y., 1965

(12) Tomovic, R.: Sensitivity method in control theory; Pergamon Press, N.Y., 1966

(13) Tomovic, R.: Sensitivity analysis of dynamic systems; McGraw-Hill, N.Y., 1964

(14) Tuel, E.G.: Synthesis of optimal control systems with sensitivity constraints; Preprints of 3rd IFAC Congress, London, 1966

(15) 椹木，他 ：感度解析的考察による最適制御系の構成 I，II ；第10回自制連，No. 168 − 169、大阪，昭. 42

(16) Lefschetz, S: Stability of nonlinear control systems; Academic Press, N.Y., 1965

(17) LaSalle, J.P. and Lefschetz, S: Stability by Liapunov's direct method with applications; Academic Press, N.Y., 1961

(18) LaSalle, J.P.: Stability and control; J. SIAM, Series A Control, 1, 1963, 3

(19) Lefschetz, S.: Controls, an application to the direct method of Liapunov; Bol. Soc. Math. Mexicana 5, 1960, 139

(20) Luré, A.I. and Rosenvasser, M: On the methods of constructing Liapunov functions in the theory of non-linear control systems; Proc. 1st IFAC Congress, Moscow, 1960, Automatic and Remote Control, Butter-worths, LOndon, 1961, 928

(21) Lure, A.I.: On some nonlinear problems in the theory of automatic control; H. M. Stationary Office, London, 1951

(22) Gibson, J.E. and Rekazius, Z.V.: Application of Liapunov function method to control systems with nonlinear gain; Work Session in Liapunov's second method, Kazda, L.F. (ed.), Univ. of Michigan, Sept., 1960

(23) Szegö, G.P.: Method of constructing Liapunov functions for linear non-stationary systems; J. Elect. Cont., 13, 1962, 69

(24) Popov, V.M.: Absolute stability of nonlinear systems of automatic

control; Automt. i Telemeh., 22, 1961, 961

(25) Aizerman, M.A.: Theory of automatic regulation; Gostekhizdt, Moscow, 1952

(26) Aizerman, M.A. and Gantmacher, F.R.: Absolute stability of control systems; Holden-Day, San-Francisco, 1963

(27) Szegö, G.P.: On the application of the Zubov method for construction of Liapunov function for nonlinear control systems; IACC Preprints, Paper No. 2-2, 1962

(28) Doob, J.L.: Stochastic processes; John Wiley, N.Y., 1962

(29) Loeve, M.: Probability theory; D. van Nostrand, N.Y., 1955

(30) Ito, K.: On stochastic differential equations; Mem. Amer. Math. Soc., 4, 1951

(31) Dynkin, E.B.: Markov processes, I, II; Academic Press, N.Y., 1965

(32) Gikhman, R.V. and Skorokhod, A.V.: Theory of random processes; Addison-Wesley, Reading Mass., 1967

(33) Yaglom, A.M.: An introduction to the theory of stationary random functions; Prentice-Hall, N.J., 1962

(34) Kalman, R.E.: A new approach to linear filtering and prediction problems; Trans. ASME, J. Basic Eng., 82D, 1960

(35) Kalman, R.E. and Bucy, R.S.: New results in linear filtering and prediction theory; Trans. ASME, J. Basic Eng., 83D, 1961

(36) Johansen, D.E.: Optimal control of linear stochastic systems; Advances in Control Systems IV, Leondes, C.T.(ed.) Academic Press, N.Y., 1966

(37) Connors, M.M.: Controllability of discrete, linear random dynamic systems; J. SIAM, Series A, Control, 5, 2, 1967, 183

(38) Schwartz, L.: Approximate continuous nonlinear minimal-variance filtering; Huges Aerospace Tech. Rep., No. SSD-60472R, Dec., 1966

(39) Wonham, W.M.: Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering; J. SIAM, Series A, Control, 2, 1965, 347

(40) Kushner, H.J.: Approximations to optimal nonlinear filters; 1967 JACC Preprints of Papers, Phil., Pa., June, 1967

(41) Sunahara, Y.: An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems; Center for Dynamical Systems Tech. Reps., Div. of Appl. Math., Brown Univ., No.67-8,1967

(42) Zadeh, L.A. and Desoer, C.: Linear system theory; McGraw-Hill, N.Y., 1960

(43) Balakrishnan, A.V.: State space theory of continuous systems; J. Computer and System Sciences, 1, 1967, 91

(44) Lefkowitz, I.: Advances in multilevel control; Proc. IFAC Tokyo Symposium, Tokyo, 1965, 389

(45) Slotbow, H.W., et al.: Application of automatic control in the chemical and oil industry; Proc. 2nd IFAC Congress, Basle, 1963