数理解析研究所講究録
第45巻 1968年 31-67

非線形計画と最適制御

阪大 基工 永久洋治
阪大 基工 坂和愛幸

§1 序

最適制御の問題はある種の最大または最小問題と考えられる。今までに最適制御に関して Pontryagin[1] の最大原理, R. Bellman[2] の Dynamic Programming をはじめ R.V. Gamkrelidze[3], L.W. Neustadt[4],[5] などが興味ある論文を発表している。

ここでは最適制御の問題に非線形計画を適用した。非線形計画は今までにいろいろな分野で研究されてきた。[6],[7] しかし従来研究された非線形計画に関する結果をそのまま最適制御問題に適用するならば，仮定が最適制御問題に合致したものが少ないため，適用範囲が狭くなる。最近 P. Varaiya が2種類の拘束条件がついたもとでの非線形計画について発表した。[8],[9],[10] たゞ拘束条件に対する仮定が複雑な上に多いため

彼の結果をそのまま最適制御問題に適用するのは好ましくないと思う．P. Varaiya 自身その論文において疑問点を残している．そこで P. Varaiya の論文をもとにして，最適制御問題へ応用することを目的とした非線形計画を考える．そしてその結果を最適制御問題に適用しよう．

§2において，最適制御問題に応用するという目的で非線形計画を考え，その結果を導く．§3では§2で得た結果を最適制御に適用する．この場合いわゆる状態制限について考える．§4では考察や結論を述べる．

§2. 非線形計画について．

本節では最適制御問題に応用するという目的で非線形計画について考える．先ず用語の定義及びその性質について述べる．$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ を実バナッハ空間とする．今後「$\mathcal{X}$（または $\mathcal{Y}$）における cone」というとき，その vertex は原点とする．さて P. Varaiya に従って次の定義をする．

【定義2－1】 $\bar{x} \in A \subset \mathcal{X}$ とするとき，$A-\bar{x}=\{a-\bar{x} \mid a \in A\}$ なる集合を含む最小の closed cone を「closed cone of A at $\bar{x}$」といい $C(A,\bar{x})$ と記す．

【定義2－2】
$$LC(A,\bar{x}) \triangleq \bigcap_{N \in \mathcal{N}(\bar{x})} C(A \cap N, \bar{x})$$

で定められる集合を「local closed cone of A at $\bar{x}$」という．但し $\mathfrak{N}(\bar{x})$ は $\bar{x}\in A$ の近傍のすべてから成る集合族である．

このLC$(A,\bar{x})$ は次の性質をもっている．[10]

【補題2－1】（P. Varaiya）．$z\in LC(A,\bar{x})$, $z\neq 0$ であるためには次の性質を有する点列 $\{x_n\in A\mid n=1,2,\cdots\}$, $\{\lambda_n>0\mid n=1,2,\cdots\}$ が存在することが必要かつ十分である．

$$x_n\to\bar{x}\ ,\quad \lambda_n(x_n-\bar{x})\longrightarrow z\ ,\ (n\to\infty)$$

（証明は附録1参照）

定義から，A が convex であれば $C(A,\bar{x})$ は closed convex cone であり，$C(A,\bar{x})=LC(A,\bar{x})$ が成立することは明らかである．補題2－1を用いて次の補題2－2が示せる．

【補題2－2】 $\bar{x}\in A_1\cap A_2$, A_2 は内点を有する．このとき，$z\in LC(A_1,\bar{x})$ ，$z\in\{LC(A_2,\bar{x})\}^{\circ}$ が成立すれば，$z\in LC(A_1\cap A_2,\bar{x})$ が成立する．但し，E° は E の内点だけから成る集合とする．

（証明）実数と $\mathfrak{X}$ の元から成る集合族 $\mathfrak{M}$ を次のように定める．$\{(y_n,\lambda_n)\mid n=1,2,\cdots\}$

$$\Leftrightarrow\ z=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(y_n-\bar{x}),\ \lim_{n\to\infty}y_n=\bar{x},\ y_n\in A_1\ ,\lambda_n>0.$$

このとき，$z \notin LC(A_1 \cap A_2, \bar{x})$ と仮定する．補題2－1によつて各々の $\{(y_n, \lambda_n)\} \in \mathfrak{M}$ に対して，$y_n \in A_2$ となるのは $\{(y_n, \lambda_n)\}$ の元の中で有限個でなければならない．すなわち次の①が成立するような N が各 $\{(y_n, \lambda_n)\}$ に対して存在する．

① $\quad n \geqq N \quad \Longrightarrow \quad y_n \notin A_2.$

一方 $z \in \{LC(A_2, \bar{x})\}^{\circ}$ であるので，任意の $\theta > 0$ に対し

$$\{U(\theta z, \theta \varepsilon_0) \mid \theta > 0\} \subset \{LC(A_2, \bar{x})\}^{\circ}$$

を満足するような $\varepsilon_0 > 0$ が存在する．但し $U(z;\varepsilon) = \{x \in \mathfrak{X} \mid \|x - z\| < \varepsilon\}$．従って次の②を満足する $\varepsilon_1 > 0$ が存在する．

② $\{U(\theta z; \theta\varepsilon_0) \mid \theta \geqq 0\} \cap U(0;\varepsilon_1) \subset \{A_2 - \bar{x}\}.$

$\varepsilon_2 \triangleq min(\|y_N - \bar{x}\|, \varepsilon_1)$ と定めれば ① ② より

$$\|y_n - \bar{x}\| < \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_n(y_n - \bar{x}) \notin \{U(\theta z; \theta\varepsilon_0) \mid \theta \geqq 0\}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \lambda_n(y_n - \bar{x}) \neq z$$

これは $\mathfrak{M}$ の定義に反する．■

$\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{Y}$ への写像に着目しよう．$z \in \mathfrak{X}$ の近傍で連続な $\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{Y}$ への写像を L とする．このとき L が

$$(2.1) \quad \frac{L(z + \varepsilon y) - L(z)}{\varepsilon} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ y \to x}]{} l_z(x), \ {}^{\forall}x \in \mathfrak{X}.$$

を満足するものとする．但し l_z は $\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{Y}$ への連続な線形作用素とする．このとき次の補題を示そう．

【補題2－3】 A_y を $\mathcal{Y}$ の closed convex cone とする．$\{\varepsilon_n > 0 \mid \varepsilon_n \to 0, (n\to\infty), n=1,2,\cdots\}$, $\{y_n \in \mathcal{X} \mid y_n \to x, (n\to\infty), n=1,2,\cdots\}$ に対して

$$n \geqq N \Rightarrow L(z+\varepsilon_n y_n) - L(z) \in A_y .$$

を満足するような N（自然数）が存在するとする．このとき

$$l_z(x) \in A_y$$

（証明） A_y は cone であるので，$\varepsilon_n > 0$ であることより

$$\frac{L(z+\varepsilon_n y_n) - L(z)}{\varepsilon_n} \in A_y \quad , \forall n \geqq N.$$

A_y は閉集合であるので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(z+\varepsilon_n y_n) - L(z)}{\varepsilon_n} = l_z(x) \in A_y \blacksquare$$

更に，(2.1)式で示した写像 L 及び l_z については次の補題も成立する．

【補題2－4】 A_y は $\mathcal{Y}$ の内点を有する closed convex cone である．とする．このとき，(2.1)式で与えた写像 $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ において，

$$l_z(x) + L(z) \in A_y^{\circ} , \; L(z) \in A_y .$$

であるならば， $\{\varepsilon_n > 0 \mid \varepsilon_n \to 0, (n\to\infty), n=1,2,\cdots\}$ なる数列に対して

$$n \geqq N \Rightarrow L(z+\varepsilon_n x) \in A_y^{\circ}$$

を満足する N が存在する．

（証明）① $y_1 \in A_y^0$, $y_2 \in A_y \Rightarrow y_1 + y_2 \in A_y^0$

∵ $U(y_1; \varepsilon) \subset A_y^0 \subset A_y$ を満足する $\varepsilon > 0$ が存在する. A_y は convex cone であるので任意の $y \in U(y_1; \varepsilon)$ に対して $y + y_2 \in A_y$ が成立する.

$\therefore U(y_1 + y_2; \varepsilon) = \{U(y_1; \varepsilon) + y_2\} \subset A_y$

$\therefore \quad y_1 + y_2 \in A_y^0$

すべての $n = 1, 2, \cdots\cdots$ に対して $L(z + \varepsilon_n x) \notin A_y^0$ と仮定する. $L(z) \in A_y$ であるから任意の $0 < \varepsilon_n \leqq 1$ に対して

$$(\varepsilon_n^{-1} - 1) L(z) \in A_y$$

一方すべての ε_n に対して

$$\varepsilon_n^{-1} L(z + \varepsilon_n x) \notin A_y^0$$

$$\therefore \quad \varepsilon_n^{-1} L(z + \varepsilon_n x) - (\varepsilon_n^{-1} - 1) L(z) \notin A_y^0, \quad 0 < \varepsilon_n \leqq 1.$$

∵ $\varepsilon_n^{-1} L(z + \varepsilon_n x) - (\varepsilon_n^{-1} - 1) L(z) \in A_y^0$ とすると ① によって

$$\varepsilon_n^{-1} L(z + \varepsilon_n x) - (\varepsilon_n^{-1} - 1) L(z) + (\varepsilon_n^{-1} - 1) L(z) \in A_y^0$$

すなわち $\varepsilon_n^{-1} L(z + \varepsilon_n x) \in A_y^0$

これは矛盾である.

すなわち $\varepsilon_n^{-1}\{L(z + \varepsilon_n x) - L(z)\} + L(z) \in \{A_y^0\}^c$, $0 < \varepsilon_n \leqq 1$.

$\{A_y^0\}^c$ は閉集合であり, (2.1) 式のことを考えると

$$l_z(x) + L(z) \in \{A_y^0\}^c.$$ これは補題の仮定に反す. ∎

【補題2－5】 A を $\mathcal{X}$ の任意の集合，A_y を $\mathcal{Y}$ の内点を有する closed convex cone とする．L は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への連続な写像であり，Aを含むある開集合 O_A の任意の点 $z \in O_A$ において (2.1) 式が成立するものとする．

$$A_x \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid L(x) \in A_y\}.$$

なる集合 A_x を定める．$\bar{z} \in A_x \cap A$ とするとき，

$$l_{\bar{z}}(x) + L(\bar{z}) \in A_y^{\circ},\ x \in LC(A, \bar{z}),\ \bar{z} \neq 0.$$

を満足する $x \in \mathcal{X}$ に対して

$$x \in LC(A_x \cap A,\ \bar{z})$$

が成立する．

（証明） 仮定によって，

$$l_{\bar{z}}(x) + L(\bar{z}) \in A_y^{\circ},\ L(\bar{z}) \in A_y.$$

従って補題2－4によって，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad L(\bar{z} + \frac{1}{n}x) \in A_y^{\circ},\ (n;\text{自然数})$$

を満足する自然数 N が存在する．L は連続であるので

$$n \geqq N \Rightarrow \bar{z} + \frac{1}{n}x \in A_x^{\circ} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{n}x \in \{A_x - \bar{z}\}^{\circ}$$

$$\therefore \quad x \in \{LC(A_x;\bar{z})\}^{\circ}$$

仮定より $x \in LC(A, \bar{z})$ である．故に補題2－2によって

$$x \in LC(A_x \cap A,\ \bar{z}) \ \blacksquare$$

次に非線形計画について考える．以後この節では次のように定める．Aは$\mathcal{X}$の任意の集合，A_yは$\mathcal{Y}$の内点を有するclosed convex coneとする．ϕを$\mathcal{X}$上の連続な汎関数とし，Aを含むある開集合O_Aのすべての点zにおいて

$$(2.2)\quad \frac{\phi(z+\varepsilon y)-\phi(z)}{\varepsilon}\xrightarrow[y\to x]{\varepsilon\to 0}\phi'_z(x)\ ,\qquad \forall x\in\mathcal{X}.$$

を満足する$\phi'_z\in\mathcal{X}^*$（$\mathcal{X}$の共役空間）が存在するものとする．Gを$\mathcal{X}$から$\mathcal{Y}$への連続な写像とし，Aを含むある開集合O'_Aのすべての点zにおいて

$$(2.3)\quad \frac{G(z+\varepsilon y)-G(z)}{\varepsilon}\xrightarrow[y\to x]{\varepsilon\to 0}G'_z(x)\ ,\quad \forall x\in\mathcal{X}.$$

を満足する線形連続作用素$G'_z:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$が存在するとする．

非線形計画の問題として次の4種類を考えよう．

【問題2-1】　$\min\{\phi(z)\mid G(z)\in A_y,\ z\in A\}$

【問題2-2】　$\min\{\phi(z)\mid G(z)=0,\ z\in A\}$

【問題2-3】　$\min\{\phi(z)\mid G(z)\in A_y\}$

【問題2-4】　$\min\{\phi(z)\mid z\in A\}$

これらの諸問題に着目する．先ず最も簡単と思われる問題2-4について次の定理が成り立つ．

【定理2-1】（P. Varaiya (10)）．$\bar{x}\in A$が問題2-4の解であるならば次の式を満足する．

$$\phi'_{\bar{x}}(z) \geqq 0 \quad , \qquad \forall z \in LC(A, \bar{x})$$

（証明はP. Varaiya[10]とほとんど同様にできるが附録2に一応示しておいた．）

次に，問題2−1を考えよう．この問題は $G(x) \in A_y$, $x \in A$ というように2種類の拘束条件が付いている．最適制御問題を考える場合，状態方程式の解であることと，境界条件を満足することに対応して便利である．更にここでの仮定は実際問題に即したものである．

【定理2−2】 $\bar{x} \in \mathcal{X}$ が問題2−1の解であるとする．このとき次の3条件を満足する $\bar{\tau} \in R^1$, $\bar{y}^* \in \mathcal{Y}^*$（$\mathcal{Y}$ の共役空間）で，少なくとも一方が零元でないものが存在する．

(2.4) $\bar{\tau}\,\phi'_{\bar{x}}(z) + \bar{y}^* G'_{\bar{x}}(z) \geqq 0, \qquad \forall z \in K.$

(2.5) $\bar{y}^* G(\bar{x}) = 0$

(2.6) $\bar{\tau} \geqq 0 \quad , \quad \bar{y}^*(y) \leqq 0, (\forall y \in A_y).$

但し K は $LC(A, \bar{x})$ に含まれ，$0 \in K$ を満足するような凸集合で任意に与えられたものである．

（証明）．(a) $A_y = \mathcal{Y}$ の場合は，問題2−1は問題2−4と一致する．$\bar{\tau} = 1$, $\bar{y}^* = 0$ と選べばこの定理は成立する．

(b) $A_y \neq \mathcal{Y}$ の場合．$\mathcal{W} \triangleq R^1 \times \mathcal{Y}$, $\|w\| = \max(|\alpha|, \|y\|)$, $(\forall (\alpha, y) \in \mathcal{W})$ と定めれば $\mathcal{W}$ はバナッハ空間である．

$B(z) \triangleq \{(\alpha, y) \mid \alpha \geq \phi'_{\bar{x}}(z),\ y - [G'_{\bar{x}}(z) + G(\bar{x})] \in -A_y\}$

$B \triangleq \bigcup_{z \in K} B(z)$ と定める. $0 \in K$, K は $\mathcal{X}$ の凸集合であるので $G(\bar{x}) \in A_y$ であることから明らかに

$$0 = (0, 0) \in B \quad , \quad B \subset \mathcal{W} \ ; \ 凸集合.$$

① 任意の $\beta < 0$, $y \in A_y^0$ に対して $(\beta, y) \notin B$.

∵ そうでないとする. ある $\beta_0 < 0$, $y_0 \in A_y^0$ に対して

$\beta_0 \geq \phi'_{\bar{x}}(z_0)$, $y_0 - [G'_{\bar{x}}(z_0) + G(\bar{x})] \in -A_y$

を満足する $z_0 \in K$ が存在する. $y_0 \in A_y^0$ であるので補題2-4の証明 ① で示したように

$$G'_{\bar{x}}(z_0) + G(\bar{x}) \in A_y^0$$

$\bar{x} \in \mathcal{X}$ は解であるので $G(\bar{x}) \in A_y$ である. また

$$A_x = \{x \in \mathcal{X} \mid G(x) \in A_y\}$$

と定めれば, $\bar{x} \in A_x \cap A$. 更に $z_0 \in K \subset LC(A, \bar{x})$. であるので補題2-5によって $z_0 \in LC(A_x \cap A, \bar{x})$.

従って定理2-1によって $\phi'_{\bar{x}}(z_0) \geq 0$ でなければならない. しかし. $\phi'_{\bar{x}}(z_0) \leq \beta_0 < 0$. これは矛盾である.

①により $C(B, 0) \neq \mathcal{W}$ であることが直ちに分る. B は凸集合であるので $C(B, 0)$ も凸集合となる. 従って, 点 $0 = (0, 0) \in B$ における B の接平面が存在する.(11) 即ち,

$$\bar{w}^*(w) \geq 0 \quad , \quad {}^\forall w \in B.$$

を満足する $\mathcal{W}$ 上の連続な線形汎関数 $\bar{w}^* \neq 0$ が存在する.

$\bar{w}^* = (\bar{\tau}, \bar{y}^*)$, $(\bar{\tau} \in R^1,\ \bar{y}^* \in \mathcal{Y}^*)$ とおくと

② $\qquad \bar{\tau}\alpha + \bar{y}^* y \geqq 0, \qquad {}^\forall(\alpha, y) \in B.$

を満足する．任意の $y \in -A_y$ に対して $(0, y) \in B$．故に

②によって，任意の $y \in -A_y$ に対して $\bar{y}^*(y) \geqq 0$．即ち，

任意の $y \in A_y$ に対して $\bar{y}^*(y) \leqq 0$． また任意の $\alpha \geqq 0$

に対し $(\alpha, 0) \in B$． 故に任意の $\alpha \geqq 0$ に対して $\bar{\tau}\alpha \geqq 0$．

すなわち，$\bar{\tau} \geqq 0$．以上で(2.6) が証明された．

任意の $x \in K$ に対して

$$(\phi'_{\bar{x}}(x),\ [G'_{\bar{x}}(x) + G(\bar{x})]) \in B.$$

$0 \in K$ であるので ② より

③ $\qquad \bar{y}^*(G(\bar{x})) \geqq 0.$

しかし $G(\bar{x}) \in A_y$ であるので(2.6)によって $\bar{y}^*(G(\bar{x})) \leqq 0$.

故に $\bar{y}^* G(\bar{x}) = 0$．従って(2.5)式が成立する．更に，

$$\bar{\tau}\phi'_{\bar{x}}(x) + \bar{y}^* G'_{\bar{x}}(x) + \bar{y}^* G(\bar{x}) \geqq 0, \quad {}^\forall x \in K.$$

(2.5) により

$$\bar{\tau}\phi'_{\bar{x}}(x) + \bar{y}^* G'_{\bar{x}}(x) \geqq 0, \qquad {}^\forall x \in K.$$

これで(2.4) が成立することが分った． $\bar{w}^* \neq 0$ であること

から，$\bar{\tau} \in R^1$，$\bar{y}^* \in \mathcal{Y}^*$ のうち少なくとも一方は零元でない．

これで本定理は完全に証明された．■

問題 2-3 は問題2-1において $A = \mathcal{X}$ の場合である．

従って次の系 2-2-1 は直ちに成立する．

【系 2-2-1】 $\bar{x} \in \mathcal{X}$ が問題2-3の解であるとする。集合, $A_x \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid G(x) \in A_y\}$ を含むある開集合 O のすべての点で (2.2), (2.3) が成立するとする. このとき次の 3 条件を満足する $\bar{z} \in R^1$, $\bar{y}^* \in \mathcal{Y}^*$ で少なくとも一方が零元でないようなものが存在する.

$$(2.4)' \quad \bar{z}\,\phi'_{\bar{x}}(z) + \bar{y}^* G'_{\bar{x}}(z) = 0, \quad {}^{\forall}z \in \mathcal{X}.$$

$$(2.5) \quad \bar{y}^* G(\bar{x}) = 0.$$

$$(2.6) \quad \bar{z} \geqq 0, \quad \bar{y}^*(y) \leqq 0, \ ({}^{\forall}y \in A_y).$$

最後に問題 2-2 を考えよう. この場合特に空間 $\mathcal{Y}$ を有限次元ユークリッド空間とする. このとき次の定理が成立する.

【定理2-3】 $\bar{x} \in \mathcal{X}$ が問題2-2 の解であるとする. このとき次の(2.7) 式が成立するような少なくとも一方が零元でない $\bar{z} \geqq 0$, $\bar{y} \in R^N$ が存在する.

$$(2.7) \quad \bar{z}\,\phi'_{\bar{x}}(z) + \bar{y}\,G'_{\bar{x}}(z) \geqq 0, \quad {}^{\forall}z \in K.$$

但し $\mathcal{Y} = R^N$ であり, Kは, $K \subset LC(A, \bar{x})$, $0 \in K$ であるような任意に与えられたバナッハ空間 $\mathcal{X}$ の凸集合.
($\mathcal{Y} = R^N$ であるから明らかに成立するが, 一応附録3に証明を与えておく.).

§3. 最適制御問題への応用.

前節で得た非線形計画に対する必要条件を本節では最適制御の問題に適用してみよう. ここでは特に状態制限に主眼をおくことにする.

【3-1】 離散系への応用.

先ず離散系に着目する. 制御系の方程式が

$$(3.1)\qquad x(k+1)-x(k)=f_k(x(k),u(k)),\quad k=0,1,\cdots,N-1.$$

によって表わされているとする. 但し各 $k=0,1,\cdots,N$ に対し, $x(k)\in R^n$, 各 $k=0,1,\cdots,N-1.$ に対し, $u(k)\in R^r$ とする。また f_k $(k=0,1,\cdots,N-1)$ は $R^n\times R^r$ から R^n への写像で, $(\xi,\zeta)\in R^n\times R^r$ に関して C^1 クラスとする。習慣に従って $x(k),(k=0,1,\cdots,N)$, $u(k),(k=0,1,\cdots,N-1)$ をそれぞれ状態, 制御と呼ぶことにする.

制御 $u(k),(k=0,1,\cdots,N-1.)$ は各々の k に対し R^r の凸部分集合 $\omega(k),(k=0,1,\cdots,N-1)$ に属さなければならないとする. そこで R^{Nr} の集合 Ω を次のように定める.

$$\Omega\triangleq\{U=(u(0),\cdots,u(N-1))\mid u(k)\in\omega(k),k=0,1,\cdots,N-1\}$$

定義より明らかなように集合 $\Omega\subset R^{Nr}$ は凸集合である. 更に状態に対して, $x(0)\in A_I$, $x(N)\in A_T$, 及び $x(k)\in X(k)$,

$(k=1,2,\cdots,N-1)$, を満足しなければならないとする. 但し $A_I, A_T, \alpha(k), (k=1,2,\cdots,N-1)$ はそれぞれ R^n の凸部分集合とする. そこで $R^{(N+1)n}$ の部分集合Aを次のように定める.

$$A \triangleq \{X=(x(0),\cdots\cdots,x(N)) \mid x(0)\in A_I,\ x(N)\in A_T,\ x(k)\in\alpha(k),\ k=1,2,\cdots,N-1\}$$

A は $R^{(N+1)n}$ の凸部分集合である.

(3.1) 式を満足する $U\in\Omega$, $X\in A$ の中で評価関数

$$(3.2)\quad \phi(x(0),\cdots,x(N);u(0),\cdots,u(N-1))=\phi(X,U)$$

を最小にするような制御 $\bar{U}\in\Omega$ (最適制御), 及びそれに対応する状態 $\bar{X}\in A$ (最適軌道) を見い出すという最適制御問題を考える. ここに ϕ はその成分に関して C^1 クラスであるとする.

定理2-3を適用すべくこの問題を変更する.

$$K \triangleq A\times\Omega\quad (\subset R^{(N+1)n}\times R^{Nr})$$

と定める. 明らかに K は凸集合である. また,

$$(3.3)\quad h(X,U)=h(x(0),\cdots\cdots,x(N);u(0),\cdots\cdots,u(N-1)) \triangleq \begin{bmatrix} x(0)+f_0(x(0),u(0))-x(1) \\ x(1)+f_1(x(1),u(0))-x(2) \\ \text{-------------------} \\ \text{-------------------} \\ x(N-1)+f_{N-1}(x(N-1),u(N-1))-x(N) \end{bmatrix}$$

と定める. h は $R^{(N+1)n}\times R^{Nr}$ から R^{Nn} への写像である.

f_k, $(k=0,1,\cdots\cdots,N-1)$ に対する仮定より h はその成分に関して C^1 クラスである。

以上の記号を用いると最適制御問題は次のようになる。

【最適制御問題】

$$(3.4)\quad \begin{array}{ll} h(X,U)=0 \ , \ (X,U)\in K & \text{のもとに} \\ \Phi(X,U) & \text{を最小にせよ.} \end{array}$$

$\Phi(X,U)$, $h(X,U)$ はその成分に関して C^1 クラスであるので $R^{(N+1)n}\times R^{Nr}$ の全域で Φ, h はそれぞれ (2.2), (2.3) を満足する。従って定理2-3 の仮定はすべて満足する。定理2-3より次の定理が成立することは明らかである。

【定理 3-1】 この離散系の最適制御問題において最適制御 $\bar{U}\in\Omega$ が存在するならば，その対応する最適軌道を $\bar{X}\in A$ とする。このとき次の 4 条件を満足する $\bar{\tau}\geqq 0$, $\bar{p}(k)\in R^n$, $(k=1,2,\cdots,N)$, $(\bar{\tau},\bar{p}(1),\cdots\cdots,\bar{p}(N))\neq 0$ が存在する。

$$(3.5)\ \left\langle \bar{\tau}\frac{\partial\Phi(\bar{X},\bar{U})}{\partial u}+\bar{p}(k+1)\frac{\partial f_k(\bar{x}(k),\bar{u}(k))}{\partial u}, u_k\right\rangle\geqq 0,$$
$$\forall u_k\in C(\omega(k),\bar{u}(k)),\ k=0,1,\cdots,N-1.$$

$$(3.6)\ \left\langle \bar{\tau}\frac{\partial\Phi(\bar{X},\bar{U})}{\partial x}+\bar{p}(1)+\bar{p}(1)\frac{\partial f_0(\bar{x}(0),\bar{u}(0))}{\partial x}, x_0\right\rangle\geqq 0,$$
$$\forall x_0\in C(A_I,\bar{x}(0)).$$

$$(3.7)\ \left\langle \bar{\tau}\frac{\partial\Phi(\bar{X},\bar{U})}{\partial x}-\bar{p}(N),\ x_N\right\rangle\geqq 0,$$
$$\forall x_N\in C(A_T,\bar{x}(N)).$$

(3.8) $\left\langle \bar{\eta}\dfrac{\partial\phi(\bar{X},\bar{U})}{\partial x} + p(k+1) + p(k+1)\dfrac{\partial f_k(\bar{x}(k),\bar{u}(k))}{\partial x} - \bar{p}(k),\ x_k \right\rangle \geqq 0,\ {}^{\forall}x_k \in C(\alpha(k),\bar{x}(k)),\ k=1,\cdots,N-1.$

但し $\langle\xi,\zeta\rangle$ はユークリッドの内積とする.

定理3−1において $A(1)=\cdots\cdots=A(N-1)=R^n$ の場合，すなわち軌道の途中に拘束条件がない場合は(3.8)式はすべての $x\in R^n$ について成立しなければならない．従って次の系が成立する.

【系3−1−1】 定理3−1において，$A(1)=\cdots\cdots=A(N-1)=R^n$ の場合，(3.5)，(3.6)，(3.7)及び次の(3.9)が成立するような $\bar{\eta}\geqq 0$，$\bar{p}(k)\in R^n$，$(k=1,2,\cdots,N)$，$(\bar{\eta},\bar{p}(1),\cdots,\bar{p}(N))\neq 0$ が存在する.

(3.9) $\bar{\eta}\dfrac{\partial\phi(\bar{X},\bar{U})}{\partial x} + \bar{p}(k+1) + \bar{p}(k+1)\dfrac{\partial f_k(\bar{x}(k),\bar{u}(k))}{\partial x} - \bar{p}(k) = 0$

$k=1,2,\cdots\cdots,N-1.$

【3−2】 連続系への応用.

制御系が次の微分方程式(3.10)で与えられる場合を考がえる.

(3.10) $\dfrac{dx(t)}{dt}=f(x(t),u(t),t)$, for almost all $t\in I$.

但し G は R^n の開集合，U は R^r のある定まった集合，I は有界な開区間とする．f は $G\times U\times I$ 上で定義された n ベクトル関数で，$x\in G$ に関して C^1 クラス，$(u,t)\in U\times I$

に関して可測な関数とする．更に制御系の状態変数 $x(t)$ は $t\in I$ 上の絶対連続 n ベクトル関数で(3.10)を満足するものとする．

$U\subset R^r$ を固定し，制御変数 $u(t)$ に対する制限として，各 $t\in I$ に関し，$u(t)\in U$ を満足し，可測で *essentially bounded* な関数とする．そこでこのような関数族を Ω で表わそう．$u\in\Omega$ のとき u は *admissible control* であると呼ぶことにする．

$G\times U\times I$ 上の n ベクトル関数 f に着目する．

(3.11) $\quad H\triangleq\{h(x,t)\,|\,h(x,t)\triangleq f(x,u(t),t),\ u\in\Omega\}$

と定める．このとき次の条件を満足すると仮定する．すべての $h\in H$ 及び G のコンパクト集合 X に対して次の(3.12)を満足する I 上で積分可能な関数 $m(t)$,（X, u に依存することは許される）が存在する．

(3.12) $|h(x,t)|\leqq m(t),\ |h_x(x,t)|\leqq m(t),\ {}^\forall x\in X,\ {}^\forall t\in I.$

但し $|\xi|$ は ξ のユークリッドノルムとする．以後この記号を用いる．

以上の仮定のもとに R.V. Gamkrelidze は集合 H が *quasiconvex* であることを示した．（(3)参照，また *quasiconvex* の定義は附録4. 参照）．

そこで最適制御問題を次のように考える．

【最適制御問題】 (3.10) 式を満足する $u(t)$, $x(t)$, $t\in I$ において，ある時刻 $t_0, t_1 \in I$, ($t_0 < t_1$) で初期状態 $x(t_0)$, 及び最終状態 $x(t_1)$ が境界条件

(3.13) $\quad \phi_l(x) \triangleq \theta_l(x(t_0), x(t_1)) \leqq 0, \quad l = 1, 2, \cdots, m, \; t_0, t_1 \in I.$

を満足し，各 $t\in[t_0, t_1]$ に対する状態 $x(t)$ が状態制限

(3.14) $\quad g_s(x(t)) \leqq 0, \quad s = 1, 2, \cdots, k, \; \forall t \in [t_0, t_1].$

を満足するとする．このとき，評価関数

(3.15) $\quad \phi_0(x) = \theta_0(x(t_0), x(t_1))$

を最小にするような制御とそれに対応する軌道を見い出せ．但し，θ_l, ($l=1,\cdots,m$) 及び θ_0 は $G\times G$ 上の実数値関数であって，$(\xi_0, \xi_1)\in G\times G$ に関して C^1 クラスとする．また g_s, ($s=1,2,\cdots,k$) は $\xi\in G$ に関して C^1 クラスとする．

この最適制御問題の解である制御を $\bar{u}\in\Omega$，及びそれに対応する軌道を $\bar{x}(t)$ とする．故にある時刻 $\hat{t}_0, \hat{t}_1 \in I$ に対して (3.13) を満足し，$\hat{t}_0 \leqq t \leqq \hat{t}_1$ に対して (3.10), (3.14) を満足している．任意の $t_0, t_1\in I$ に対して (3.10), (3.13), (3.14) を満足する $u\in\Omega$ 及び x の中で

$$\hat{\phi}_0(\bar{x}) = \theta_0(\bar{x}(\hat{t}_0), \bar{x}(\hat{t}_1)) \leqq \theta_0(x(t_0), x(t_1)) = \phi_0(x)$$

が成立するのはもちろんである．更に $\hat{t}_0, \hat{t}_1 \in I$ に対して (3.10), (3.13), (3.14) を満足するすべての $u\in\Omega$, x に対して

$$\hat{\phi}_0(\bar{x}) = \theta_0(\bar{x}(\hat{t}_0), \bar{x}(\hat{t}_1)) \leqq \theta_0(x(\hat{t}_0), x(\hat{t}_1)) = \hat{\phi}_0(x)$$

が成立しなければならない．今閉区間 $I_1=[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ に着目する．I_1上で定義されたベクトル値連続関数 $x(t)$ に対し，

(3.16) $\quad \|x\| = \sup_{t\in I_1} |x(t)|$

によつてノルム付けすると，この空間はバナッハ空間となる．そこで，I_1上の n ベクトル連続関数のつくる集合に対して，(3.16) のようにノルムを定めたものを $\mathcal{X}$ とし，I_1 上の k ベクトル連続関数のつくる集合に対しても(3.16) のようにノルムを定めたものを $\mathcal{Y}$ とする．

定理2-2 を適用すべくこの最適制御問題を変換しよう．

$G_X \triangleq \{x\in\mathcal{X} \mid x(t)\in G,\ {}^{\forall}t\in I_1\}$

なる集合を定める．このとき

(3.17) $\quad \hat{\phi}_l(x) = \theta_l(x(\hat{t}_0), x(\hat{t}_1)) \quad , \quad l=0,1,\cdots,m.$

は G_X 上の連続汎関数である．また，

(3.18) $\quad g(x) \doteqdot (g_1(x(t)), \cdots\cdots, g_k(x(t))), \quad {}^{\forall}x\in G_X \quad \hat{t}_0\leqq t\leqq \hat{t}_1.$

と定めれば，g は G_X から $\mathcal{Y}$ への連続な写像である．更に

(3.19) $\quad \tilde{g}(x) \triangleq (\phi_1(x), \cdots, \phi_m, g(x))^T \quad , \quad {}^{\forall}x\in G_X.$

（ T は転置を意味する）

と定めると $\tilde{g}$ は G_X から $R^m \times \mathcal{Y}$ への連続な写像である．

集合 $A_y\subset\mathcal{Y}$，及び $A_R\subset R^m$ を次のように定める．

$A_y \triangleq \{y\in\mathcal{Y} \mid y(t)=(y_1(t), \cdots\cdots, y_k(t)),\ y_i(t)\leqq 0, (t\in I_1),$
$\qquad i=1,2,\cdots,k\}$

$$A_R \triangleq \{ r \in R^m \mid r = (r_1, \cdots, r_m),\ r_j \leq 0,\ j = 1, 2, \cdots, m \}$$

A_y, A_R はそれぞれ $\mathcal{Y}$, R^m の closed convex cone であり共に内点を有する．更に

$$\tilde{\mathcal{Y}} = R^m \times \mathcal{Y},\ \|\tilde{y}\| = \max(|r|, \|y\|),\ \tilde{y} = (r, y) \in \tilde{\mathcal{Y}}$$

と定めれば $\tilde{\mathcal{Y}}$ はバナッハ空間となる．また $\tilde{\mathcal{Y}}$ の集合 $\tilde{A}_y$ を

$$\tilde{A}_y \triangleq \{ (r, y) \in \tilde{\mathcal{Y}} \mid r \in A_R,\ y \in A_y \}$$

と定めれば $\tilde{A}_y$ は $\tilde{\mathcal{Y}}$ の closed convex cone であり，内点を有する．

集合 A を次のように定義する．

$$A \triangleq \{ x \in \mathcal{X} \mid \dot{x} = h(x, t),\ h \in H,\ t \in I_1 \}$$
$$= \{ x \in \mathcal{X} \mid \dot{x} = f(x, u, t),\ u \in \Omega,\ t \in I_1 \}$$

以上のように定めれば前述の最適制御問題の解である制御 $\bar{u}(t)$，及びそれに対応する軌道 $\bar{x}(t)$，($t \in I_1$) は次の変換された最適制御問題の解であり，かつ変換された最適制御問題の解は前述の最適制御問題のすべての条件も満足している．

【変換された最適制御問題】

$$\min \{ \varphi_0(x) \mid \tilde{g}(x) \in \tilde{A}_y,\ x \in A \}$$

この変換された最適制御問題における φ_0, $\tilde{g}$ がそれぞれ §2 の (2.2)，(2.3) を満足していることを示す．

θ_ℓ, $(\ell=0,1,\cdots,m)$ の仮定により任意の $x\in G_x$ に対して,

(3.20) $$\hat{\varphi}'_{\ell x}(z)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\theta_\ell(x(\hat{t}_0),x(\hat{t}_1))}{\partial\xi_0^i}z^i(\hat{t}_0)+\frac{\partial\theta_\ell(x(\hat{t}_0),x(\hat{t}_1))}{\partial\xi_1^i}z^i(\hat{t}_1)\right]$$

$\ell=0,1,\cdots\cdots,m$, $\xi_j=(\xi_j^1,\cdots\cdots,\xi_j^n)^T$, $(j=0,1)$, $\theta_\ell(\xi_0,\xi_1)$.

のように定めれば明らかに次の(3.21)が成立する.

(3.21) $$\frac{\hat{\varphi}_\ell(x+\varepsilon y)-\hat{\varphi}_\ell(x)}{\varepsilon}\xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ y\to z}]{}\hat{\varphi}'_{\ell x}(z),\ \ell=0,1,\cdots,m.$$

また g_s, $(s=1,2,\cdots,k)$ に対する仮定により

(3.22) $$g'_{sx}(z)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_s(x(t))}{\partial\xi^i}z^i(t),\ s=1,\cdots,k,\ t\in I_1.$$

のように定めれば明らかに次の(3.23)が成立する.

(3.23) $$\frac{g_s(x+\varepsilon y)-g_s(x)}{\varepsilon}\xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ y\to z}]{}g'_{sx}(z),\ s=1,2,\cdots k.$$

更に, 次の(3.24)のように定めれば(3.25)が成立する.

(3.24) $$g'_x(z)\triangleq(g'_{1x}(z),\cdots\cdots,g'_{kx}(z))$$

(3.25) $$\frac{g(x+\varepsilon y)-g(x)}{\varepsilon}\xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ y\to z}]{}g'_x(z)$$

また(3.21), (3.25)によって

(3.26) $$\tilde{g}'_x(z)\triangleq(\hat{\varphi}'_{1x}(z),\cdots\cdots,\hat{\varphi}'_m(z),g'_x(z))$$

とおけば明らかに次の(3.27)が成立する.

(3.27) $$\frac{\tilde{g}(x+\varepsilon y)-\tilde{g}(x)}{\varepsilon}\xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ y\to z}]{}\tilde{g}'_x(z).\quad\forall z\in\mathcal{X}$$

《注意》(3.21), (3.23)及び(3.25)において, これらの式は任意の $z\in\mathcal{X}$ について成立する. 従って(3.27)に示したように任意の $z\in\mathcal{X}$ について成立する.

以上で変換された最適制御問題に定理2-2が適用できることが分かった。そこで定理2-2に示した $0 \in K$, $K \subset LC(A, \bar{x})$ を満足する凸集合を考えよう。

$$\bar{h}(\bar{x}(t), t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \quad t \in I_1$$

とおく。$\bar{x} \in \mathcal{X}$ は次の微分方程式(3.28)を満足する。

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{h}(\bar{x}(t), t), \qquad t \in I_1. \tag{3.28}$$

(3.28)の $\bar{x}(t)$, $(t \in I_1)$ に対する線形変分方程式を考える。[3]

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(\bar{x}(t), t)\Delta x(t) + \Delta\bar{h}(\bar{x}, t) \tag{3.29}$$

$$t \in I_1, \quad \Delta\bar{h} \in \{[H] - \bar{h}\}, \quad \Delta x(t_0) = \xi \in R^n.$$

但し $[H]$ は H の *convex hull* である。

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(\bar{x}(t), t)\Phi(t), \quad \text{for almost all } t \in I_1 \tag{3.30}$$

$$\Phi(\hat{t}_0) = E \ (n \times n \text{ 単位行列})$$

なる方程式の解 $\Phi(t)$ ($n \times n$ 正則行列関数)を用いれば(3.29)の解は次の(3.31)のように表わされる。

$$\Delta x(t) = \Phi(t)\left\{\xi + \int_{\hat{t}_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\Delta\bar{h}(\bar{x}(\tau), \tau)\, d\tau\right\} \tag{3.31}$$

集合 $K \subset \mathcal{X}$ を次のように定める。

$$K \triangleq \left\{\Delta x(t) \in \mathcal{X} \,\middle|\, \Delta x(t) = \Phi(t)\left\{\xi + \int_{\hat{t}_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\Delta\bar{h}(\bar{x}(\tau), \tau)\, d\tau,\right.\right. \tag{3.32}$$

$$\left.\xi \in R^n, \ \Delta h \in [H] - \bar{h}, \ t \in I_1\right\}$$

この集合 K に対して *P. Varaiya* が次の補題を証明した。[8]

【補題3-1】(P. Varaiya[8]) Hはquasiconvex であるので，

$$0 \in K,\ K は凸集合,\ K \subset LC(A, \bar{x})$$

を満足する.

(証明はP. Varaiya (8) が示したが一応附録4に挙げておく)

定理2-2 より次のことが成立する.

「前述の最適制御問題において最適制御 $\bar{u} \in \Omega$ が存在するならば，$\bar{u} \in \Omega$ に対応する軌道を $\bar{x} \in \mathcal{X}$ とするとき，次の3条件を満足する少なくとも一方が零元でない $\nu_0^0 \in R^1$, $\tilde{y}_0^* \in \tilde{\mathcal{Y}}^*$ ($\tilde{\mathcal{Y}}$の共役空間)が存在する.

(3.33) $\nu_0^0 \hat{\phi}'_{0\bar{x}}(z) + \tilde{y}_0^* \tilde{g}'_{\bar{x}}(z) \geq 0, \qquad \forall z \in K.$

(3.34) $\tilde{y}^* \tilde{g}(\bar{x}) = 0$

(3.35) $\nu_0^0 \geq 0, \qquad \tilde{y}_0^*(\tilde{y}) \leq 0, (\forall \tilde{y} \in \tilde{A}_y).$

ただし K は (3.32) で定めた集合である。」

このことから次の定理が導びける.

【定理3-2】 前述の最適制御問題において，最適制御 $\bar{u} \in \Omega$ が存在するとする. $\bar{u} \in \Omega$ に対応する軌道を $\bar{x}(t)$, $(t \in I_1)$ とする. このとき次の諸条件を満足する n ベクトル値関数 $\psi(t)$, $\bar{\psi}(t)$, $k \times n$ 行列関数 $\gamma_1(\tau, t)$, 実数 $\nu_0^l \geq 0$, $(l = 0, 1, \cdots, m)$, 及び $\lambda(t) = (\lambda^1(t), \cdots, \lambda^k(t))^T$, $t \in I_1$

($\lambda^s(t)$, $s=1,2,\cdots,k$, $t\in I_1$, は $\lambda^s(\hat{t}_0)=0$ を満足し, I_1 の内部にあるすべての $\lambda^s(t)$ の連続点で非減少有界変動関数, $(\nu_0^0, \nu_0^1, \cdots, \nu_0^m, \lambda(t)^T) \neq 0$, $t\in I_1$) が存在する。

(3.36) $$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t)\frac{\partial f(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t)}{\partial x},$$

for almost all $t\in I_1$.

(3.37) $$\frac{\partial \psi_1(\tau,t)}{\partial \tau} = -\psi_1(\tau,t)\frac{\partial f(\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau),\tau)}{\partial x},$$

for almost all $\tau \in I_1$ and every $t\in I_1$.

(3.38) $$\psi(\hat{t}_1) = \sum_{l=0}^{m} \nu_0^l \left(\frac{\partial \theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0),\bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial \xi_1}\right)^T,$$

($\theta_l(\xi_0,\xi_1)$, $\xi_0,\xi_1 \in R^n$.)

(3.39) $$\psi_1(t,t) = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial g_1(\bar{x}(t))}{\partial \zeta}\right)^T \\ \text{------------} \\ \text{------------} \\ \left(\dfrac{\partial g_k(\bar{x}(t))}{\partial \zeta}\right)^T \end{bmatrix}, \quad \zeta \in R^n, \text{ for all } t\in I_1.$$

(3.40) $$\bar{\psi}(\tau) = \psi(\tau) + \int_{\tau}^{\hat{t}_1} \psi_1(\tau,t)^T d\lambda(t), \quad \text{for } \tau\in I_1.$$

(3.41) $$\bar{\psi}(\hat{t}_0) = -\sum_{l=0}^{m} \nu_0^l \left(\frac{\partial \theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0),\bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial \xi_0}\right)^T.$$
$$\bar{\psi}(\hat{t}_1) = \sum_{l=0}^{m} \nu_0^l \left(\frac{\partial \theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0),\bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial \xi_1}\right)^T.$$

(3.42) $$\sum_{l=1}^{m} \nu_0^l \hat{\varphi}_l(\bar{x}) + \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} g(\bar{x}(t))\,d\lambda(t) = 0.$$

(3.43) $$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \bar{\psi}(t) f(\bar{x}(t),u(t),t)\,dt \geq \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \bar{\psi}(t) f(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t)\,dt.$$

（証明） $\tilde{y}_0^* \in \tilde{\mathcal{Y}}^*$ は

$$\tilde{y}_0^* = (\nu_0^1, \cdots\cdots, \nu_0^m, y_0^{1*}, \cdots\cdots, y_0^{k*})$$

のように表わされる．このとき（3.33）により

$$(3.44) \quad \sum_{l=0}^{m} \nu_0^l \hat{\varphi}_{l\bar{x}}'(z) + \sum_{s=1}^{k} y_0^{s*} g_{s\bar{x}}'(z) \geqq 0, \qquad {}^\forall z \in K.$$

が成立する．ここで次のように置く．

$$(3.45) \quad \Theta_l' = \left(\frac{\partial \theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0), \bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial \xi_0}\right)^T, \quad \Theta'' = \left(\frac{\partial \theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0), \bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial \xi_1}\right)^T$$

ここに $\theta_l(\xi_0, \xi_1)$, $\xi_0, \xi_1 \in R^n$, $l = 0, 1, \cdots\cdots, m$.

$$(3.46) \quad \Gamma_s(t) = \left(\frac{\partial g_s(\bar{x}(t))}{\partial \zeta}\right)^T, \ \zeta \in R^n, \ s = 1, 2, \cdots, k, \ t \in I_1.$$

（$\Gamma_s(t)$ は n 次行ベクトル関数）

このとき $z \in K$ であるので，（3.32），（3.44）によって，

$$(3.47) \quad \left\{\sum_{l=0}^{m} \nu_0^l [\Theta_l' + \Theta_l'' \Phi(\hat{t}_1)] + \sum_{s=1}^{k} y_0^{s*} [\Gamma_s(t) \Phi(t)]\right\} \xi$$
$$+ \sum_{l=0}^{m} \nu_0^l \Theta_l'' \Phi(\hat{t}_1) \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \Phi^{-1}(\tau) \Delta \bar{h}(\bar{x}(\tau), \tau) d\tau$$
$$+ \sum_{s=1}^{k} y_0^{s*} \left[\Gamma_s(t) \Phi(t) \int_{\hat{t}_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) \Delta \bar{h}(\bar{x}(\tau), \tau) d\tau\right] \geqq 0$$
$${}^\forall \xi \in R^n, \quad {}^\forall \Delta \bar{h} \in [H] - \bar{h}, \quad {}^\forall t \in I_1$$

$\mathcal{Y}$ のノルムの定義により，y_0^{s*}，$(s = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ は次の（3.48）式のように表わされる[12]．

$$(3.48) \qquad y_0^{s*}(y) = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} y_s(t)\, d\lambda_0^s(t), \qquad s = 1, 2, \cdots\cdots, k.$$

ここに $\lambda_0^s(t)$ は I_1 上の有界変動関数で，$\lambda_0^s(\hat{t}_0) = 0$，$(s = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ を満足する．（（3.48）はスティルチェス積分である）

更に $0\in[H]-\bar{h}$，$\xi\in R^n$ は任意である．従って次の(3.49)，(3.50)が成立する．

$$(3.49)\quad \sum_{l=0}^{m}\nu_0^l[\Theta_l'+\Theta_l''\Phi(t_1)]+\sum_{s=1}^{k}\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}[\Gamma_s(t)\Phi(t)]d\lambda^s(t)=0.$$

$$(3.50)\quad \sum_{l=0}^{m}\nu_0^l\Theta_l''\Phi(\hat{t}_1)\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\Phi^{-1}(\tau)\Delta\bar{h}(\bar{x}(\tau),\tau)d\tau$$
$$+\sum_{s=1}^{k}\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}[\Gamma_s(t)\Phi(t)\int_{\hat{t}_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\Delta\bar{h}(\bar{x}(\tau),\tau)d\tau]d\lambda_0^s(t)\geqq 0,$$
$$\forall\Delta\bar{h}\in[H]-\bar{h}.$$

そこで

$$(3.51)\quad \psi(\tau)=\sum_{l=0}^{m}\nu_0^l\Theta_l''\Phi(\hat{t}_1)\Phi^{-1}(\tau),\quad \tau\in I_1$$

$$(3.52)\quad \psi_1^s(\tau,t)=\Gamma_s(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau),\quad s=1,2,\cdots,k.\ \ t\in I_1,\ \tau\in I_1.$$

とおくと(3.30)によって次の(3.53)，(3.54)が示せる．

$$(3.53)\quad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=-\psi(\tau)\frac{\partial\bar{h}(\bar{x}(\tau),\tau)}{\partial x},\ \text{for almost all } \tau\in I_1$$

$$(3.54)'\quad \frac{\partial\psi_1^s(\tau,t)}{\partial\tau}=-\psi_1^s(\tau,t)\frac{\partial\bar{h}(\bar{x}(\tau),\tau)}{\partial x},$$

$s=1,2,\cdots,k$, for almost all $\tau\in I_1$, every $t\in I_1$

従って

$$\psi_1(\tau,t)=\begin{bmatrix}\psi_1^1(\tau,t)\\ \vdots\\ \psi_1^k(\tau,t)\end{bmatrix},\quad \tau\in I_1,\ t\in I_1$$

とおけば(3.54)′より次の(3.54)が成立する．

$$(3.54)\quad \frac{\partial\psi_1(\tau,t)}{\partial\tau}=-\psi_1(\tau,t)\frac{\partial\bar{h}(\bar{x}(\tau),\tau)}{\partial x}$$

for almost all $\tau\in I$, every $t\in I_1$

故に(3.36), (3.37) が成立する. また(3.45), (3.46)及び(3.51), (3.52)によって

$$(3.55)\qquad \psi(\hat{t}_1) = \sum_{\ell=0}^{m} \nu_0^{\ell} \left(\frac{\partial \theta_\ell(\bar{x}(\hat{t}_0), x(\hat{t}_1))}{\partial \xi_1} \right)^T$$

$$(3.56)\qquad \psi_1(t,t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1(\bar{x}(t))}{\partial \xi} \right)^T \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial g_k(\bar{x}(t))}{\partial \xi} \right)^T \end{bmatrix}, \xi \in R^n, \text{ for all } t \in I_1.$$

故に(3.38), (3.39) が成立する.

(3.50), (3.51), (3.52)によって次の(3.57)が成立する.

$$(3.57)\qquad \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \psi(\tau) \Delta h(\bar{x}(\tau), \tau) d\tau + \sum_{s=1}^{k} \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \int_{\hat{t}_0}^{t} \psi_1^s(\tau, t) \Delta \bar{h}(\bar{x}(\tau), \tau) d\tau d\lambda^s(t) \geqq 0$$

そこで積分順序を交換するために

$$(3.58)\qquad \theta^s(\tau) = \int_{\tau}^{\hat{t}_1} \psi_1^s(\tau, t) d\lambda^s(t), \quad s = 1, \cdots, k, \quad \tau \in I_1.$$

とおくと(3.57)式は

$$(3.59)\qquad \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \left(\psi(\tau) + \sum_{s=1}^{k} \theta^s(\tau) \right) \Delta \bar{h}(\bar{x}(\tau), \tau) d\tau \geqq 0, \ \forall \Delta h \in [H] - \bar{h}.$$

となる.[5] そこで

$$\sum_{s=1}^{k} \theta^s(\tau) + \psi(\tau) = \bar{\psi}(\tau)$$

とおくと(3.58)により

$$\bar{\psi}(\tau) = \psi(\tau) + \sum_{s=1}^{k} \int_{\tau}^{\hat{t}_1} \psi_1^s(\tau, t) d\lambda^s(t), \quad \tau \in I_1$$

すなわち (3.40) が成立する. また (3.58), (3.49), (3.51), (3.52) より

$$\bar{\psi}(\hat{t}_0) = -\sum_{l=0}^{m} \nu_0^l \left(\frac{\partial\theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0), \bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial \xi_0}\right)^T$$

$$\bar{\psi}(\hat{t}_1) = \sum_{l=0}^{m} \nu_0^l \left(\frac{\partial\theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0), \bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial \xi_1}\right)^T$$

故に (3.41), (3.42) が成立する.

(3.42) は (3.34) を成分でもって表わしたものであるから成立する.

(3.43) は, $\forall u \in \Omega$ に対して

$$\Delta \bar{h} = f(\bar{x}(t), u(t), t) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \in [H] - \bar{h}$$

であるので (3.59) により成立する.

(3.35) によって, $\nu_0^0 \geqq 0$, また $\tilde{A}_y$ の定義により $\nu_0^l \geqq 0$, $(l=1, 2, \cdots, m)$. $(\nu_0^0, y^*) \neq 0$ であるから, $(\nu_0^0, \cdots \nu_0^m, \lambda(t)) \neq 0$. (3.35) 式の第2式, 及び $\tilde{A}_y$ の定義により

$$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} y_s(t)\, d\lambda^s(t) \leqq 0, \ \forall y_s(t) \leqq 0 \ (t \in I_1),\ s = 1, 2, \cdots, k$$

ただし $y_s(t)$ $(s = 1, \cdots, k,\ t \in I_1)$ は連続なスカラー値関数, $\lambda^s(t)$ $(s = 1, \cdots, k)$ は I_1 の内部にあるすべての $\lambda^s(t)$ の連続な点で非減少な関数である。証明終。∎

《注意》 f が $(x, u, t) \in G \times U \times I$ に関して連続であるならば, $u(t)$ は I 上で t の可測関数であるので (3.43)

の積分形式は次の (3.60) のように変形できる.

$$(3.60)\quad \bar{\Psi}(t)f(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t)=\inf_{v\in U}\bar{\Psi}(t)f(\bar{x}(t),v,t)$$

$$\text{for almost all}\quad t\in I_1$$

この (3.61) 式の導き方は R.V. Gamkrelidze が示した方法と全く同様に導けるのでここでは省く.(参考文献(3) 参照)

《注意》 状態制限のない場合は定理3-2において, (3.36), (3.38) 及び次の (3.61), (3.62) が成立する.

$$(3.61)\quad \psi(t_0)=-\sum_{l=0}^{m}\nu_0^l\left(\frac{\partial\theta_l(\bar{x}(\hat{t}_0),\bar{x}(\hat{t}_1))}{\partial\xi_0}\right)^T$$

$$(3.62)\quad \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\psi(\tau)f(\bar{x}(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \geq \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\psi(\tau)f(\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau),\tau)d\tau,\ {}^{\forall}u\in\Omega.$$

この場合もし f が $(x,u,t)\in G\times U\times I$ に関して連続ならば次の (3.63) が成立する.

$$(3.63)\quad \psi(t)f(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t)=\inf_{v\in U}\psi(t)f(\bar{x}(t),v,t)$$

$$\text{for almost all}\quad t\in I_1.$$

この結果は定理3-2を導いた方法と同様に導くことができる. L.W. Neustadt は異った方法でこれを導いた.[13]

§4 結言.

非線形計画は多くの場合 §2 の問題2-3の形で表現されて

いる[6),(7)]（但し他に簡単な条件が付いている場合もある.）．しかし最適制御問題においては，状態方程式と制御の目的（境界条件）がある．これは異った種類の拘束条件である．この意味で最適制御の問題に非線形計画を適用する場合，問題2-1，もしくは問題2-2のような2種類の条件つき最小問題に対する非線形計画の方が便利である．更に評価関数や拘束条件に対する仮定は制御問題に適当であるようなものにしなければいけない．この意味において，§2 では A_y に対して少々強いと思われる closed convex cone という仮定をおいたが，他には (2.2)，(2.3) に対する仮定だけである．ただ A_y が内点をもつかもたないかは最適制御問題をどのような空間で取り扱うかにかゝっている．

§3，[3-1] では離散系を取り扱った．この場合サンプル回数が有限である限り，等号条件を与えるために表われる写像の値域は有限次元で十分である．定理 3-1 及び系 3-1-1 にその結果を示した．[3-2] では連続系を扱った．[3-2] で示した状態制限の付いた最適制御問題の結果は，状態制限のために用いた写像の形は異るが，L.S. Pontryagin[1] や L.W. Neustadt[5] が先に示したものとよく似ている．しかし (3.42) 式はそれらには見られない．

【参考文献】

(1) L.S.Pontryagin et al : The Mathematical Theory of Optimal Control, Interscience, New York, 1962.

(2) R. Bellman : Dynamic Programming, Princetion Univ. Press, Princeton, 1957.

(3) R.V. Gamkrelidze : On some Extremal Problems in the Theory of Differential Equations with Applications to the Theory of Optimal Control, J.SIAM, Control, 3, 1965.

(4) L.W. Neustadt : An Abstract Variational Theory with Applications to a broad class of Optimization Problems. I, General Theory, J.SIAM, control, 4, 1966.

(5) ———— : An Abstract Variational Theory with Applications to a broad class of Optimization Problems. II. Applications, J.SIAM, control, 5, 1967.

(6) H.W. Kuhn and A.W. Tucker : Nonlinear Programming, Proc. 2nd Berkeley Symposium on Mathematical

Statistics and Probability, 5, Univ. of California Press, Berkeley, 1952.

(7) K. Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa : Studies in Linear and Nonlinear Programming, Stanford Univ. Press, Stanford, 1958.

(8) P.P. Varaiya : Nonlinear Programming and Optimal Control, ERL Tech. Memo. M-129, Univ. of California, Berkeley, 1965.

(9) ———— : An Extremal Problem in Banach Space with Applications to Optimal Control, ERL. Tech. Memo. M-180, Univ. of California, Berkeley, 1966.

(10) ———— : Nonlinear Programming in Banach Space, J. SIAM, Appl. Math., 15, 1967.

(11) N. Dunford and J.T. Schwartz : Linear Operators, Part I, Interscience, New York, 1964.

(12) F. Riesz and Sz-Nagy : Functional Analysis, Unger, New York, 1955.

(13) L.W. Neustadt : Optimal Control Problems as Extremal Problems in a Banach Space, Proc. of Polytechnic Institute of Brooklyn Symposium on System Theory, 1965.

【附録1】 補題2-1 の証明.

(必要性) $z \in LC(A, \bar{x})$ とする. $\Rightarrow z \in C(A \cap N, \bar{x}),\ {}^{\forall}N \in \mathcal{N}(\bar{x})$

$$N_k = \{x \in \mathcal{X} \mid \|x - \bar{x}\| < 1/k\}, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

$$K_{N_k} = \{\lambda(x - \bar{x}) \mid x \in A \cap N_k,\ \lambda \geqq 0\}$$

と定めると z の任意の ε- 近傍に対して

$$U(z; \varepsilon) \cap K_{N_k} \neq \phi, \quad {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ k = 1, 2, \cdots\cdots.$$

故に各kに対して, $z \neq 0$ であることを考えると

$$\lambda_{N_k n}(x_{N_k n} - \bar{x}) \longrightarrow z, \quad n \to \infty.$$

を満足する $\{x_{N_k n}\} \subset A \cap N_k$, $\{\lambda_{N_k n} \mid \lambda_{N_k n} > 0,\ n = 1, 2, \cdots\}$ が存在する. 一方 $x_{N_k} \to \bar{x}, (k \to \infty)$ はNkの定め方から明らかに従って $\lambda_{N_n n}(x_{N_n n} - \bar{x}) \to z, (n \to \infty)$ となる. そこで $\lambda_{N_n n} = \lambda_n$, $x_{N_n n} = x_n$ とおけば $\lambda_n > 0,\ x_n \in A$ は明らかである.

(十分性) 点列 $\{x_n\}$ の中から各 $k = 1, 2, \cdots\cdots$ に対して

$$\|x_n - \bar{x}\| < \frac{1}{k}$$

を満足しているものを1つずつ選び出し, この部分点列を $\{x_{n_k}\}$ とする.

$$\lambda_{n_k}(x_{n_k} - \bar{x}) \in C(A \cap N_k, \bar{x}), \quad k = 1, 2, \cdots\cdots.$$

また $\{C(A \cap N_k, \bar{x})\}$ は単調減少であるので

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_{n_k}(x_{n_k} - \bar{x}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C(A \cap N_k, \bar{x})$$

$$\therefore\ z \in LC(A, \bar{x}) \quad \blacksquare$$

【附録2】 定理2-1 の証明.

$z=0$ の場合は明らかに成立する. そこで $z\neq 0$ と仮定する. 任意の $z\in LC(A,\bar{x})$ に対して, $x_n\to\bar{x}$, $\lambda_n(x_n-\bar{x})\to z$, $(n\to\infty)$ を満足する $\{x_n\in A\}$, $\{\lambda_n>0\}$ が存在する. (補題2-1より). $y_n=\lambda_n(x_n-\bar{x})$, $\varepsilon_n=\lambda_n^{-1}$, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ と定めれば $y_n\to z$, $\varepsilon_n\to 0$, $\varepsilon_n>0$ である.

$\bar{x}\in A$ が解であることから, $n=1,2,\cdots\cdots$ に対して,

$$0\leqq\phi(x_n)-\phi(\bar{x})=\phi(\bar{x}+(x_n-\bar{x}))-\phi(\bar{x}).$$

$$\therefore\ \phi(\bar{x}+\varepsilon_n y_n)-\phi(\bar{x})\geqq 0\ ,\quad n=1,2,\cdots\cdots.$$

$\varepsilon_n>0$ であるので

$$\varepsilon_n^{-1}\{\phi(\bar{x}+\varepsilon_n y_n)-\phi(\bar{x})\}\geqq 0\ ,\quad n=1,2,\cdots\cdots.$$

従って (2.2) により $\phi'_{\bar{x}}(z)\geqq 0$ ■

【附録3】 定理2-3 の証明.

この場合 $\mathcal{Y}=R^N$ である.

$B(z)=\{(\alpha,y)\,|\,\alpha\geqq\phi'_{\bar{x}}(z),\ y=G'_{\bar{x}}(z)\}$, $B=\bigcup_{z\in K}B(z)$.

と定める. $0\in K$, K は $\mathcal{X}$ の凸集合である. 故に

$$0=(0,0)\in B\ ,\quad B\,(\subset R^{N+1})\ は凸集合である.$$

任意の $\beta<0$ に対し $(\beta,0)\notin B$ が示せる. B は R^{N+1} の凸集合であるから, 点 $0=(0,0)\in B$ において B の接超平面が存在する. すなわち,

$$\langle (\bar{\eta}, \bar{y}), (\alpha, y) \rangle \geqq 0 \quad , \forall (\alpha, y) \in B.$$

を満足する$\bar{\eta} \in R^1$, $\bar{y} \in R^N$, $(\bar{\eta}, \bar{y}) \neq 0$ が存在する．故に

$$\bar{\eta}\alpha + \langle \bar{y}, y \rangle \geqq 0, \qquad \forall (\alpha, y) \in B.$$

任意の $\alpha > 0$ に対して $(\alpha, 0) \in B$.

$$\therefore \quad \bar{\eta}\alpha \geqq 0 \quad , \qquad \forall \alpha > 0$$

$$\therefore \quad \bar{\eta} \geqq 0.$$

また任意の $z \in K$ に対して $(\varphi'_{\hat{x}}(z), G'_{\hat{x}}(z)) \in B$.

$$\therefore \quad \bar{\eta}\varphi'_{\hat{x}}(z) + \bar{y}G'_{\hat{x}}(z) \geqq 0, \qquad \forall z \in K.$$

これで定理2-3は完全に証明された．■

【附録4】 *quasiconvex* の定義及び補題3-1の証明.

[定義] (R.V. Gamkrelidze).

(1) $P^r = \{\alpha = (\alpha^1, \cdots\cdots, \alpha^r) \in R^r \mid \alpha^r \geqq 0, \sum_{i=1}^{r} \alpha^i = 1 \}$

(2) $[H] = \{h(x,t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i h_i(x,t) \mid (\alpha^1, \cdots\cdots, \alpha^r) \in P^r, h_i \in H,$
$(i = 1, 2, \cdots\cdots, r), \ r > 0$ (任意) $\}$

但し H は (3.11) で定めた集合である．(2)の [H] は H の *convex hull* である．

Hの元が(3.12)を満すとする．すべてのコンパクト集合 $X \subset G$, すべての有限集合 $\{h_1, \cdots\cdots, h_r\} \subset H$, 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$k(x,t;\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i h_i(x,t) - h_\alpha(x,t)$$

とするとき，次の３条件を満す，各$\alpha\in P^r$に対して定義された（X, f_i, εに依存するであろう）関数$h_\alpha\in H$が存在する場合，集合Hはquasiconvexであるという．

1°
(3.) $$|k(x,t;\alpha)| < \bar{m}(t)\ ,\ |k_x(x,t;\alpha)| < \bar{m}(t)$$
$$\forall x\in X,\ \forall t\in I,\ \forall\alpha\in P^r.$$

ここに$\bar{m}(t)$はX, f_iに依存することは許されるがεに依存しないI上で積分可能な関数である．

2°
(4) $$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} k(x,t;\alpha)dt\right| < \varepsilon,\ \text{for every } x\in X, \alpha\in P^r,$$
$$\tau_1, \tau_2\in I.$$

3° $\{\alpha_i\in P^r \mid \alpha_i\to\bar{\alpha}\in P^r, (i\to\infty),\ i=1,2,\cdots\cdots\}$

のような点列に対して，$k(x,t;\alpha_i)$は各$x\in X$に対して（I上のtの関数として）測度の意味で$k(x,t;\bar{\alpha})$に収束する．

[補題3-1の証明]

(a) $\Delta h=0$，$\xi=0$と選べば(3.31)より$\Delta x(t)\equiv 0$, $t\in I_1$

$\therefore\ 0\in K$

(b) $\theta\xi_1+(1-\theta)\xi_2\in R^n$，$(\forall\xi_1,\xi_2\in R^n)$.

$\theta\Delta\bar{h}_1+(1-\theta)\Delta\bar{h}_2\in[H]-\bar{h}$，$(\forall\Delta h_1,\Delta h_2\in[H]-\bar{h}.)$

$\therefore\ \theta\Delta x_1+(1-\theta)\Delta x_2\in K$，$(\forall\Delta x_1,\Delta x_2\in K)$

(c) $\Delta x\in K$, $\xi\in R^n$, $\Delta h\in[H]-\bar{h}$，$\Delta x(t_0)=\xi\in R^n$とする．

(5) $\Delta\dot{x}(t)=\bar{h}_x(\bar{x}(t),t)\Delta x(t)+\Delta\bar{h}(\bar{x}(t),t)$，$t\in I_1$

$u\in\Omega$ならば$h(x,t)=f(x,u,t)\in H$，故に$h\in H$に対し

(3.10) は $\dot{x}(t) = h(x,t)$, for almost all $t \in I_1$.
となる. この微分方程式の摂動方程式を考える.

(6) $\dot{x}(t) = h(x(t),t) + \varepsilon\Delta h(x,t) + k_\varepsilon(x,t;\alpha)$, $h \in H$.

$\bar{x}(t)$ が I_1 内のすべての t に対して内点となるようなコンパクト集合を $X \subset R^n$ とする. いかなる $\varepsilon > 0$ に対しても任意の閉区間 $[\tau_0, \tau_1] \subset I_1$, 及び, $\bar{x}(t)$ に十分近い (6) の解で $x(t_0) = \bar{x}(t_0) + \varepsilon\xi$ を初期値とするものに対して,

(7)
$$(\bar{h} + \varepsilon\Delta\bar{h} + k_\varepsilon) \in H$$
$$|k_\varepsilon(x,t;\alpha)| < \bar{m}(t),\ |k_{\varepsilon x}(x,t;\alpha)| < \bar{m}(t),\ t \in I_1, x \in X.$$
$$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} k_\varepsilon(x(t),t;\alpha)dt\right| < \varepsilon^2$$

を満足するような $k_\varepsilon(x,t;\alpha)$ が存在する(3). 故に (6) の解は

$$x_\varepsilon(t) = \bar{x}(t) + \varepsilon\Delta x(t) + o(\varepsilon), \quad t \in I_1$$

ここに $o(\varepsilon)/\varepsilon$ は $t \in I_1$ に対して $\varepsilon \to 0$ に対し一様に 0 に収束する. (7) より $x_\varepsilon \in A$, 更に $x_\varepsilon(t) \to \bar{x}(t)$, $(\varepsilon \to 0)$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\{x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t)\} = \Delta x(t), \quad t \in I_1.$$

($\because$ $o(\varepsilon)/\varepsilon$ は 0 に一様に収束する).

従って補題2-1により $\Delta x(t) \in LC(A, \bar{x})$ ■