数理解析研究所講究録
第45巻1968年117-143

確率的系における最適制御過程について
── 最終時刻が指定されない場合の最大原理 ──

九州大学理学部　南　正義

§1. 序

最適制御問題の解析法としては、通常、L.S. Pontryagin [1]の最大原理による方法と R. Bellman [2] のダイナミック・プログラミングによる方法とがよく知られている。

最近、確率的系における最適制御過程の研究が盛んになりつつあるが、そこでは、決定論的系において成立している結果が確率的系においてもやはり成立するかということが問題意識の一つになっていると思われる。それでは、確率微分方程式系で記述される場合の最適制御過程に対して、最大原理がはたして成立するかどうか？　これは一つの興味ある問題である。ところが、昨年2月の動的計画法研究会 [3] で報告したように、固定時間をもつ場合に、最大原理が成立することは H.J. Kushner [4] によって立証済みである。一方、最終時刻が指定されない場合にもやはり最大原理が成立するこ

とを、H. J. Kushnerは[5]で述べているが、その主要定理(最大原理)の証明方法に大きな誤りがあることを報告者自身発見した。

本報告の目的は、この誤りの部分を指摘訂正しながら、[4]およびL. I. Rozonoér[6]の解析法を類似することによって、[5]で述べられた主要定理(最大原理)の完全な証明を与えることである。

§2. 最適制御問題の定式化

つぎのような確率微分方程式系によって記号的に記述される制御過程を考えることにする。

$$dx(\omega,t) = f(x(\omega,t), u(\omega,t))dt + dZ(\omega,t) \qquad (1)$$

ここに、$x(\omega,t) = (x_1(\omega,t), x_2(\omega,t), \cdots, x_n(\omega,t))$,

$$f(x,u) = (f_1(x,u), f_2(x,u), \cdots, f_n(x,u))$$

はともにn次元のベクトル函数とし、

$$Z(\cdot,\cdot) = (Z_1(\cdot,\cdot), Z_2(\cdot,\cdot), \cdots, Z_n(\cdot,\cdot))$$

はn次元ベクトルの外乱過程とする。また、

$$u(\cdot,\cdot) = (u_1(\cdot,\cdot), u_2(\cdot,\cdot), \cdots, u_r(\cdot,\cdot))$$

は制御と呼ばれるr次元のベクトル函数とする。

記号

Ω : 抽象空间(標本空间と呼ぶ)。

$\omega \in \Omega$: 標本点。

$[0,T] \equiv \{t : 0 \leqq t \leqq T\}$, 但し、$0 < T < +\infty$: 任意に固定する.

$Z(\omega, t)$ は直積空間 $\Omega \times [0,T]$ から n 次元ユークリッド空間 E^n の中への写像として、つぎのように定義された確率過程とする。すなわち、

$\Sigma(t)$: $Z(\cdot, \tau)$, $0 \leqq \tau \leqq t$ が可測となる Ω 上の最小の σ-field（しからば、$s \leqq t \Rightarrow \Sigma(s) \subset \Sigma(t)$ ）。

$\mathcal{T}(T)$: 閉区間 $[0,T]$ 上の Borel field.

$\tilde{\Sigma}(T) \equiv \mathcal{B}(\Sigma(T) \times \mathcal{T}(T))$: $\Sigma(T) \times \mathcal{T}(T)$ に属する直積集合によって生成される直積空間 $\Omega \times [0,T]$ 上の最小の σ-field.

$\mu(d\omega)$: Ω 上の σ-field $\Sigma(T)$ についての確率測度（ただし、$\mu(\Omega) = 1$ ）。

$l(dt)$: 閉区間 $[0,T]$ 上の Borel field $\mathcal{T}(T)$ についての Lebesgue 測度.

$m(d\omega \times dt) \equiv \mu(d\omega) \otimes l(dt)$: $\tilde{\Sigma}(T)$ 上の直積測度.

このようにして、確率空間 $(\Omega, \Sigma(t), \mu(d\omega))$, $0 \leqq t \leqq T$, および 可測空間 $(\Omega \times [0,T], \tilde{\Sigma}(T), m(d\omega \times dt))$ を考えることにする。

$v_{ix_j} \equiv \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$, $f_x(x,u) \equiv (f_{ix_j}(x,u))$: 函数行列.

$\|v\| \equiv \sum_i |v_i|$, 但し、v_i : ベクトル v の i 成分.

$\|M\| \equiv \sum_{i,j} |m_{ij}|$ ，但し．m_{ij} ：行列 M の (i,j)-成分．

記号を簡略化するためにときどき確率径数 ω を省略する。

たとえば．$x(\omega,\cdot) = x(\cdot)$ ，$x(\omega,t) = x(t)$ 。

プライム（$'$）は転置行列を表わすものとする．

定義 1.（確率微分方程式の解）

与えられた制御 $u(\cdot,\cdot)$ に対して．確率過程 $\{x(\omega,t),\ t\in[0,T]\}$ が $\Sigma(0)$-可測な $x(\omega,0)$ の初期分布として E^n 上の確率測度 μ_0 をもつ (1) の解であるとは．

a) 各 $t\in[0,T]$ に対して．

$$\{\omega : x(\omega,t)\in A\} \in \Sigma(t) \quad (A\in\mathcal{B}^n)$$

が成立ち．

b) $$x(\omega,t) = x(\omega,0) + \int_0^t f(x(\omega,\tau), u(\omega,\tau))d\tau + Z(\omega,t) - Z(\omega,0) \quad (2)$$

が高々 μ 測度零の ω-集合を除いて（i.e. 確率 1 で）満足されて．

c) 初期条件 $\mu\{\omega : x(\omega,0)\in A\} = \mu_0(A) \quad (A\in\mathcal{B}^n)$

が成立つことである。但し．$\mathcal{B}^n$ は n 次元ユークリッド空間 E^n 上の Borel field とする。

一般に．制御 $u(\omega,t)$ は直積空間 $\Omega\times[0,T]$ 上で定義された確率過程である．許容制御は常微分方程式系の場合には．区分的連続（*piecewise continuous*），あるいは区分的定数

(*piecewise constant*)，更には一般化して *Lebesgue* 可測函数として定義したのであるが、その場合に、最適制御はしばしば、フィード・バック式制御として決定された。確率的な系の場合には、前もって特に、過去および現在の情報の函数、あるいは汎函数として最適制御を決定したいことを強調しておく。

いま、$\Sigma_c(t)$ は $\Sigma(t)$ の *sub* σ-*field* として与えられたものとし、$\widetilde{\Sigma}_c(T) \equiv \mathcal{B}(\bigcup_{0\leq t\leq T}(\Sigma_c(T)\times \mathfrak{I}(T)))$ は $\bigcup_{0\leq t\leq T}(\Sigma_c(t)\times \mathfrak{I}(T))$ を含む最小の σ-*field* とする。

定義2（$\Sigma_c(t)$-許容制御）

$u(\cdot,\cdot)$ が $\Sigma_c(t)$-許容制御であるとは、

1) 各 $\omega\in\Omega$ に対して、$u(\omega,\cdot)$ が $[0,T]$ 上で *Lebesgue* 可測で、かつ、

2) 各 $t\in[0,T]$ に対して、$u(\cdot,t)$ は Ω 上で $\Sigma_c(t)$-可測，

3) $u(\cdot,\cdot)$ は $\Omega\times[0,T]$ 上で $\widetilde{\Sigma}_c(T)$-可測で、かつ、

$$\int_0^T E\|u(\omega,t)\|dt < +\infty \tag{3}$$

4) 各 $(\omega,t)\in\Omega\times[0,T]$ に対して、$u(\omega,t)\in U(\omega,t)$

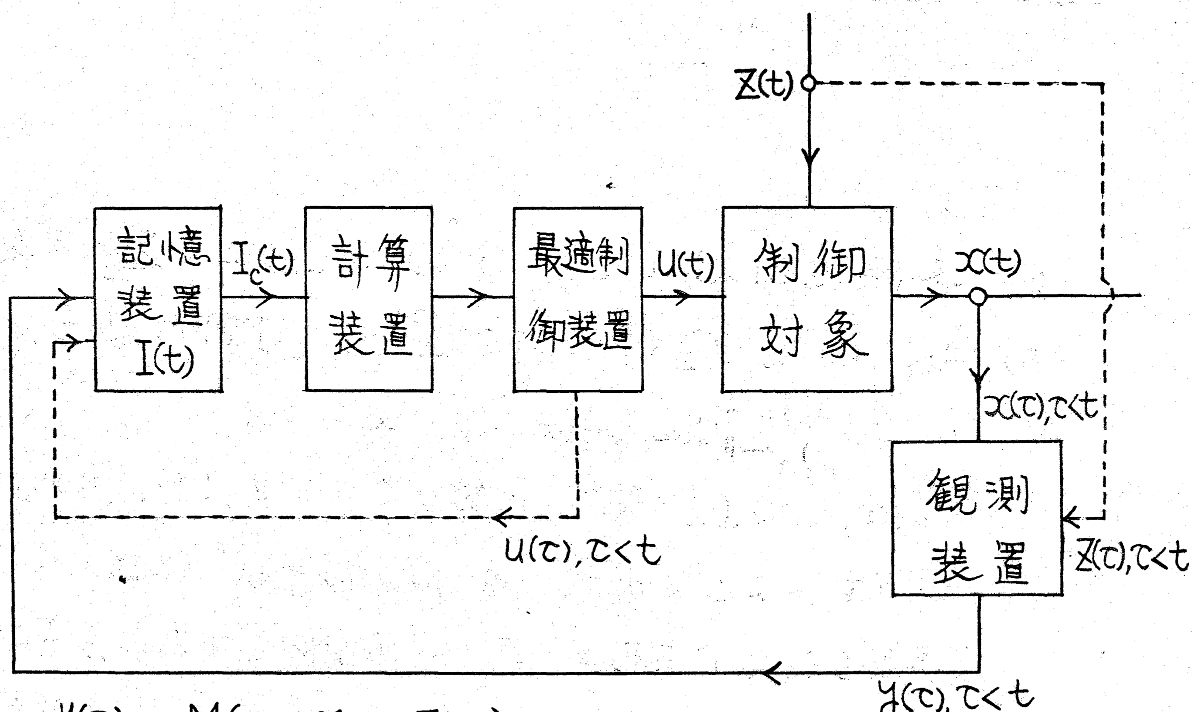
が成り立つことである。ここに、制御域 $U(\omega,t)$ は任意に与えられた r 次元ユークリッド空間 E^r 内の集合とする。

注意1. 上の定義2の条件2）はつぎのように解釈され得る。

状態 $x(t)$ の観測値を $y(t)=M(t,x(t),Z(t))$ とおくと、現時点 t において記憶されている情報は

$$I(t)=\{\,y(\tau),\tau<t\ ;\ u(\tau),\tau<t\,\} \qquad (4)$$

として書き表わされ得る。それゆえ、現時点 t において制御装置に役立ち得る情報は $I(t)$ の適当な部分集合 $I_c(t)$ であると考えられ、したがって、各瞬間における制御 $u(t)$ はもちろんこの情報 $I_c(t)$ の函数として構成可能であることを意味している。i.e. $u(t)=u(t,I_c(t))$。このことから、$\Sigma_c(t)$ は現時点 t において役立ち得る情報 $I_c(t)$ が可測となる最小の σ-*field* として解釈され得る。



$$y(\tau)=M(\tau,x(\tau),Z(\tau))$$
$$I(t)=\{\,y(\tau),\tau<t\,,\ u(\tau),\tau<t\,\}\supset I_c(t)$$
$$u(t)=u(t,I_c(t))=u(t,E[x(t)\,|\,I_c(t)])$$

— 図.1. —

さて，$\underbrace{\Sigma_c(t)\text{-}}$許容制御函数 $\overbrace{U(\omega,t)}^{0\leqslant t\leqslant T}$ の全体を $\mathcal{A}$ とすると，各 $u\in\mathcal{A}$ に対して(1)の解 $x(\omega,t)$, $t\geqslant 0$ が確率 1 で一意に存在することが，以下で述べる補題1によって示される。

G は E^n 内に与えられた閉凸集合とする。このとき，制御 $u\in\mathcal{A}$ に対応する(1)の一意解 $x(\omega,t)=x(\omega,t\,;u)$ に対して，

$$E\,x(\omega,T)\in G \tag{5}$$

を満足する *non-random, free terminal time* $T=T(u)$ を考え，さらに *admissible pair* (u,T) のクラスとして

$$\mathfrak{F}\equiv\{(u,T):\ u\in\mathcal{A},\ E\,x(\omega,T)\in G,\ 0\leqslant T<\infty\} \tag{6}$$

を考える。各 $(u,T)\in\mathfrak{F}$ に対して，Risk (危険函数) と呼ばれる汎函数をつぎのように定義する。

$$R(u,T)\equiv E\,C'x(\omega,T)=E\Big[\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(\omega,T)\Big] \tag{7}$$

ここに，$C\equiv(C_1,\cdots,C_n)$ は任意に与えられた n 次元の定数ベクトルとする。

問題(P) $$R(u^*,T^*)=\min_{(u,T)\in\mathfrak{F}}R(u,T) \tag{8}$$ を満足する $(u^*,T^*)\in\mathfrak{F}$ を求めよ。

定義3．(8)を満足する $(u^*,T^*)\in\mathfrak{F}$ が存在するとき，$u^*\in\mathcal{A}$ を最適制御と呼び，これに対応する $T^*=T(u^*)$ を

最適時间と呼ぶ。

§3. 確率的な最大原理

最大原理を導くために、つぎの仮定をおく。

仮定

つぎの3条件(A1),(A2),(A4)を満足するようなn次元ベクトルx, δxおよびr次元ベクトルu, δuに無関係な有限の非確率的定数$K>0$が存在するものとし，さらに，(A3)および(A5)〜(A7)を仮定する．

(A1) $|f_i(x,u)| \leqq K(1+\|x\|+\|u\|)$, $i=1,2,\cdots,n$,

ここに、$\|x\| \equiv \sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $\|u\| \equiv \sum_{i=1}^{n}|u_i|$.

(A2) $|f_i(x+\delta x, u+\delta u) - f_i(x,u)| \leqq K(\|\delta x\|+\|\delta u\|)$, $i=1,2,\cdots,n$.

(A3) 各正数Tに対して $Z(\cdot,\cdot)$ は $\Omega \times [0,T]$ 上で $\Sigma(T)$-可測とし、かつ、

$E\|Z(\omega,t)\| < +\infty$ $(0 \leqq t \leqq T)$, $\int_0^T E\|Z(\omega,t)\|dt < +\infty$.

(A4) $|f_{ix_j}(x+\delta x, u+\delta u) - f_{ix_j}(x,u)| \leqq K(\|\delta x\|+\|\delta u\|)$,

$i=1,2,\cdots,n$: $j=1,2,\cdots,n$.

(A5) $f_i(x,u)$, $i=1,2,\cdots,n$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して2回偏微分可能とする。

(A6) GはE^n内に与えられた閉凸集合とする。

(A7) 问題(P)の最適解(u^*,T^*)が存在するものと仮定して、最適制御$u^*(\omega,t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ に対応する最適軌道を

$x^*(\omega, t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ とする。すなわち、

$$R(u^*, T^*) = C'\beta^* = \underset{(u,T)\in\mathfrak{F}}{Min} R(u,T)$$

但し、$\beta^* \equiv E\,x^*(\omega, T^*) \in G$ とする。さらに、

$$G^- \equiv \{ \beta : C'\beta \leqq C'\beta^*, \ \beta \in G \},$$

$$G^+ \equiv \{ \beta : C'\beta \geqq C'\beta^*, \ \beta \in G \}$$

とおくとき、G^- は空でない内部をとつものと仮定する。

<u>注意2.</u> Gは閉凸集合であるから、G^+ と G^- はともに閉凸集合である。また、(G^+の内部)$\cap$(G^- の内部) $= \phi$ 。したがって、G^+ の内部とG^- の内部とをたがいに分離する超平面 $C'(\beta - \beta^*) = 0$ が存在する。

<u>補題1.(解の存在性と一意性)</u>

(A1),(A2),(A3) を仮定する。しからば、任意の正数Tに対して、$\Sigma(0)$- 可測な $x(\omega, 0)$ の初期分布としてE^n 上の確率測度 μ_0 をもつ $u(\cdot, \cdot) \in \mathcal{A}$ に対応する(1)の *Lebesgue* 積分可能な解 $x(\omega, \cdot)$ が閉区間 $0 \leqq t \leqq T$ において確率 1 で存在して、しかも高々μ測度零の ω-集合を除いて一意に決まる。さらに、この一意解 $x(\cdot, t)$ ($0 \leqq t \leqq T$) は$\Sigma(t)$-可測であり、かつ、$E\|x(t)\| < +\infty$ ($0 \leqq t \leqq T$),

$$\int_0^T E\|x(t)\|\,dt < +\infty \qquad (9)$$

注意3. 補題1は通常のPicardの反復法によって導かれる。
証明は[4]の*Appendix*, PP. 91 〜 92 を参照されたい。

補題2.（変分方程式の解）

(A1), (A2), (A3) を仮定する. $x^*(\omega, 0)$ の初期分布として E^n 上の確率測度 μ_0 をもち、かつ高々 μ 測度零の ω-集合 N^* を除いて定義された $u^*(\cdot,\cdot) \in \mathcal{A}$ に対応する (1) の解を $x^*(\omega, t)$, $0 \leqslant t \leqslant T^*$ とする。 $u^*(\cdot) + \delta u(\cdot) \in \mathcal{A}$ を $u^*(\cdot)$ の摂動制御とする. しからば、高々 μ 測度零の ω-集合 N ($N \supset N^*$) を除いて、つぎのことが成立する。

1) 摂動制御 $u(t) \equiv u^*(t) + \delta u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T^*$ に対応し、かつ初期条件 $x(\omega, 0) = x^*(\omega, 0)$ $(\forall\omega \in \Omega - N)$ を満足する (1) の *Lebesgue* 積分可能な解 $x(\omega, t) \equiv x^*(\omega, t) + \delta x(\omega, t)$ が閉区間 $0 \leqslant t \leqslant T^*$ において存在して、しかも確率1で一意に決まる。

2) $\delta x(\cdot)$ は方程式

$$\delta x(t) = \int_0^t \left[f(x^*(\tau) + \delta x(\tau), u^*(\tau) + \delta u(\tau)) - f(x^*(\tau), u^*(\tau)) \right] d\tau \quad (10)$$

を満足する。ここに、$\delta x(0) = 0$ とする。

3) 更に、$\delta x(t)$ は一様有界である。 i.e.

$$\|\delta x(t)\| \leqslant Kn\, e^{KnT^*} \int_0^{T^*} \|\delta u(t)\| dt \quad (11)$$

注意4. 各 $t \in [0, T^*]$ に対して、$x^*(\cdot, t)$ および $x^*(\cdot, t) + \delta x(\cdot, t)$

は$\sum(t)$-可測であるから、$\delta x(\cdot, t)$もまた$\sum(t)$-可測である。

注意5. 補題2の1),2)の証明は補題1によって導かれ、3)の証明はつぎの基本補題を適用することによって導かれる。

(必ずしも連続とは限らないLebesgue可積分函数)

基本補題1. $P(t)$, $Q(t) \geqq 0$, $C > 0$は定数とする。

a) $$P(t) \leqq C + \int_{t_0}^{t} P(\tau)Q(\tau)d\tau \quad (t \geqq t_0) \tag{12}$$

$$\Longrightarrow P(t) \leqq C \exp\left[\int_{t_0}^{t} Q(\tau)d\tau\right] \quad (t \geqq t_0) \tag{13}$$

b) $$P(t) \leqq C + \int_{t}^{t_1} P(\tau)Q(\tau)d\tau \quad (t \leqq t_1) \tag{14}$$

$$\Longrightarrow P(t) \leqq C \exp\left[\int_{t}^{t_1} Q(\tau)d\tau\right] \quad (t \leqq t_1) \tag{15}$$

注意6. この基本補題の証明はR. Bellman & K. Cooke [7]のP.31, Lemma 2.1を参照されたい。

補題3.(補助方程式の解)

(A1)〜(A4)を仮定する。問題(P)の最適解(u^*, T^*)が存在するものと仮定し、かつ最適制御$u^*(\omega, t), 0 \leqq t \leqq T^*$に対応する(1)の解$x^*(\omega, t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$が高々μ測度零のω-集合N^*を除いて定義されているものと仮定する。さらに、$p(\cdot) \equiv (p_1(\cdot), \cdots, p_n(\cdot))$はつぎの線形微分方程式系の解として定義される補助函数とする。

$$dp_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_i} p_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{16}$$

すなわち、ベクトル形式で表わすと、

$$dp(t) = -f'_x(x^*(t), u^*(t))p(t)dt \tag{17}$$

ここに、境界条件は

$$p(T^*) = d \tag{18}$$

但し、$d = (d_1, \cdots, d_n)$ は任意に与えられた定数ベクトルとする。

1) しからば、各 $\omega \in \Omega - N^*$ に対して、(17), (18) の解は存在して一意的であり、しかも ω とともに関して一様有界である。i.e. $\|p(\omega, t)\| \leqq \|d\| e^{K_n T^*}$ (19)

また、$p(\cdot, t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ は $\sum(T^*)$-可測函数である。

2) いま、任意の $u(\cdot) \in \mathcal{A}$ に対して、スカラーの函数

$$\begin{aligned} H(p(t), x^*(t), u(t)) &\equiv p'(t)f(x^*(t), u(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(x^*(t), u(t)) \end{aligned} \tag{20}$$

を定義すると、H は高々 μ 測度零の ω- 集合 N ($N \supset N^*$) を除いて十分に定義されて、かつ *Lebesgue* 積分可能であり、しかも各 $t \in [0, T^*]$ に対して $\sum(T^*)$-可測である。さらに、

$$\int_0^{T^*} E|H(p(t), x^*(t), u(t))| dt < +\infty \tag{21}$$

となる。

<u>注意7.</u> 不等式 (19) は仮定 (A2) と (A4)、および基本補題の b) を適用することによって導かれる。

<u>主要定理(確率的な最大原理)</u>

(A1)〜(A7) を仮定する。$(u^*, T^*) \in \mathcal{F}$ を問題 (P) の最適解とし、$x^*(t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ を $u^*(t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ に対応

する最適軌道とする。このとき、$u^*(t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ が最適制御であるためには、つぎの3条件が成立することが必要である。すなわち、

1) ある適当な n 次元の定数ベクトル d に対して、境界条件 (18) を満足する (17) の解 $p(t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ が存在し、

2) かつ、任意の摂動制御 $u(t) \equiv u^*(t) + \delta u(t)$, $0 \leqq t \leqq T^*$ に対して、高々 μ 測度零の ω- 集合 N が存在して、

3) 各 $\omega \in \Omega - N$ に対して、不等式

$$E[H(p(t), x^*(t), u^*(t)) | \Sigma_c(t)] \leqq E[H(p(t), x^*(t), u(t)) | \Sigma_c(t)] \quad (22)$$

が高々 *Lebesgue* 測度零の t- 集合 S_ω を除いて閉区間 $0 \leqq t \leqq T^*$ 上で成立する。

注意8. (22) における条件付期待値は任意の $B \in \Sigma_c(t)$ に対して、

$$\int_B E[H(p(t), x^*(t), u(t)) | \Sigma_c(t)] \mu(d\omega) = \int_B H(p(t), x^*(t), u(t)) \mu(d\omega) \quad (23)$$

なる性質をもつ $\Sigma_c(t)$- 可測函数として、*Radon-Nikodym* の定理によって定義された条件付期待値である（E. B. Dynkin [8] の pp. 11 を参照されたい）。

注意9. (22) の最小値は t においてのみ役立ち得る情報の函数として最適制御 $u^*(\cdot)$ を決定し得ることを意味している。直観的には、

$$E[H(p(t), x^*(t), u(t)) \mid t \text{ において役立ち得る情報}] \quad (24)$$

の最小化によって、置き換えても差し支えない。

注意10. $x^*(\cdot, t)$, および $u(\cdot, t)$ が特に $\Sigma_c(t)$-可測であるときには、

$$E[H(p(t), x^*(t), u(t)) \mid \Sigma_c(t)] = E[p'(t) f(x^*(t), u(t)) \mid \Sigma_c(t)]$$
$$= E[p'(t) \mid \Sigma_c(t)] f(x^*(t), u(t)) \quad (25)$$

であるから、不等式(22)の代りに、つぎの不等式を適用すればよい。

$$E[p'(t) \mid \Sigma_c(t)] f(x^*(t), u^*(t)) \leq E[p'(t) \mid \Sigma_c(t)] f(x^*(t), u(t)) \quad (26)$$

特に、$\Sigma_c(t) \equiv \Sigma(t)$ なる場合には、$x^*(\cdot, t)$ は $\Sigma_c(t)$-可測となるから、(26)が成り立つ。

§4. 主要定理の証明

主要定理を証明するために、つぎの補題を準備しておく。

補題4.(ベクトル積分の値域)

$\Phi(T^*, t)$ は殆んどすべての $\omega \in \Omega$ に対して定義された $\tilde{\Sigma}(T^*)$-可測な $n \times n$ 行列の実函数とし、かつ、

$$\|\Phi(T^*, t)\| \leq K_1, \quad 0 \leq {}^\forall t \leq T^*, \quad (27)$$

ここに、$K_1 > 0$ は与えられた有限の非確率的定数とする。

$\Sigma_c(t)$-許容制御 $u^*(t)$, $0 \leq t \leq T^*$ に対応する(1)の解を $x^*(t)$, $0 \leq t \leq T^*$ とする。更に、$u^*(t)$ に関する2つの摂動制御と

して，$u^i(t) \equiv u^*(t) + \delta u^i(t)$，$0 \leqq t \leqq T^*$，$i=1,2$ が任意に与えられているものと仮定する。

1）このとき，つぎのベクトル(28)と(29)は有限となる。

$$h(t, u^i) \equiv E\left[\Phi(T^*, t)\left[f(x^*(t), u^i(t)) - f(x^*(t), u^*(t))\right]\right], \ i=1,2 \quad (28)$$

$$v(u^i) \equiv \int_0^{T^*} h(t, u^i)\, dt \ , \quad i=1,2 \quad (29)$$

2）また，任意の $u^1(\cdot)$，$u^2(\cdot) \in \mathcal{A}$ および任意の $\alpha\,(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ に対して，

$$v(u^\alpha) = \int_0^{T^*} h(t, u^\alpha)\, dt = \alpha\, v(u^1) + (1-\alpha)\, v(u^2) \quad (30)$$

となるようなある $u^\alpha(\cdot) \equiv u^*(\cdot) + \delta u^\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ が存在する。

3）すなわち，ベクトル積分 $v(\cdot)$ に関する値域

$$\Pi \equiv \left\{ E x^*(\omega, T^*) + v(u) \ : \ u(\cdot) = u^*(\cdot) + \delta u(\cdot) \in \mathcal{A} \right\} \quad (31)$$

は凸集合である。

注意11．補題4の2)の証明はつぎの基本補題2を適用することによって導かれる（後述の補足欄 pp. 24～25 参照）。

基本補題2．（Blackwell）

$g_1(t), \cdots, g_n(t)$ を任意の *Lebesgue* 積分可能な実数値函数とし，かつ $\int_0^{T^*} g_i(t)\, dt < +\infty$，$i=1, \cdots, n$ とする。しからば，つぎの2条件を満足するような閉区間 $[0, T^*]$ 上のある *Borel field* $\mathcal{B}\,(\subset \mathcal{J}(T^*))$ が存在する。すなわち，

1）$\mathcal{J}(T^*)$ 上の測度 $l(dt)$ が $\mathcal{B}$ 上で *non-atomic*

2）かつ任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\int_A g_i(t)dt = \frac{l(A)}{l[0,T^*]}\int_{[0,T^*]} g_i(t)\,dt \quad , \quad i=1,\cdots,n \tag{32}$$

が成立する。ここに、$l(A)$ は集合 A の Lebesgue 測度を表わすものとする。

注意12. この基本補題の証明は D. Blackwell [9] の pp. 392～393 を参照されたい。

主要定理の証明

まず、所要のベクトル $d=(d_1,\cdots,d_n)$ の存在性を示そう。

1° 摂動制御にともなう軌道の変分：摂動制御 $u(t)=u^*(t)+\delta u(t)$, $0\leqslant t\leqslant T^*$ に対応する(1)の解を $x(t)=x^*(t)+\delta x(t,u)$, $0\leqslant t\leqslant T^*$ として、$E\,\delta x(T^*,u)$ を補題4の記号 $v(u)$ を用いて評価する。(A5)に注意して、補題2の(10)の左辺を Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}\delta x(t,u) &= \int_0^t [f(x^*(\tau)+\delta x(\tau,u),u(\tau))-f(x^*(\tau),u^*(\tau))]d\tau \\ &= \int_0^t f_x(x^*(\tau),u^*(\tau))\delta x(\tau,u)d\tau+\int_0^t[f(x^*(\tau),u(\tau))-f(x^*(\tau),u^*(\tau))]d\tau \\ &\quad + \int_0^t \rho(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{33}$$

ここに、

$$\begin{aligned}\rho(t) \equiv {} & [f_x(x^*(t),u(t))-f_x(x^*(t),u^*(t))]\delta x(t,u) \\ & +\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} f_{x_j x_k}(x^*(t)+\varepsilon\delta x(t,u),u(t))\,\delta x_j(t,u)\delta x_k(t,u)\end{aligned} \tag{34}$$

但し、$\varepsilon \equiv \varepsilon(x^*(t),\delta x(t,u))$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$.

いま、線形系

$$d\,\delta x(t) = f_x(x^*(t),u^*(t))\delta x(t) \tag{35}$$

に対応する基本行列解を $\Phi(T^*,t)$ とする。但し、$\Phi(T^*,T^*)=I$

（I は $n\times n$ 単位行列）．補題1によると、殆んどすべての $\omega\in\Omega$ に対して、$\Phi(T^*,t)$ が閉区間 $0\leqq t\leqq T^*$ において定義されて、かつ $\widetilde{\Sigma}(T^*)$-可測となる．更に、

$$\|\Phi(T^*,t)\|\leqq K_1\equiv n e^{KnT^*}<+\infty \qquad (36)$$

この $\Phi(T^*,t)$ を用いると、(33) より次の式が導かれる。

$$\delta x(T^*,u)=\int_0^{T^*}\Phi(T^*,t)[f(x^*(t),u(t))-f(x^*(t),u^*(t))]dt+R(u) \qquad (37)$$

ここに、$R(u)\equiv\int_0^{T^*}\Phi(T^*,t)\rho(t)dt$ ．したがって、補題4の記号 $v(u)$ を用いると、

$$E\,\delta x(T^*,u)=v(u)+E\,R(u) \qquad (38)$$

が得られる。然るに、(A2)，(A4) および補題2の (11) を用いると、

$$\|R(u)\|\leqq\int_0^{T^*}\|\Phi(T^*,t)\|\cdot\|\rho(t)\|dt$$

$$\leqq K_2\left[\int_0^{T^*}\|\delta u(t)\|dt\right]^2 \qquad (39)$$

但し、$K_2\equiv K^2n^3e^{KnT^*}(e^{KnT^*}+\frac{1}{2}KnT^*e^{2KnT^*})$：定数．

一方、補題4の 3) によると、ベクトル積分 $v(u)$ に関する値域 Π は凸集合である。

2° <u>G^- と Π とは共通の内点を全く含まない</u>。この事実は G^- と Π がともに凸集合であることから立証され得る（この証明は後述の補足欄 (pp. 25〜27) 参照）。したがって、<u>G^- の内部と Π の内部とを互に分離するある支持超平面 L：$d'(\beta-\beta^*)=0$ が存在する</u>。ここに、$d=(d_1,\cdots,d_n)$ は支持超平面 L の方

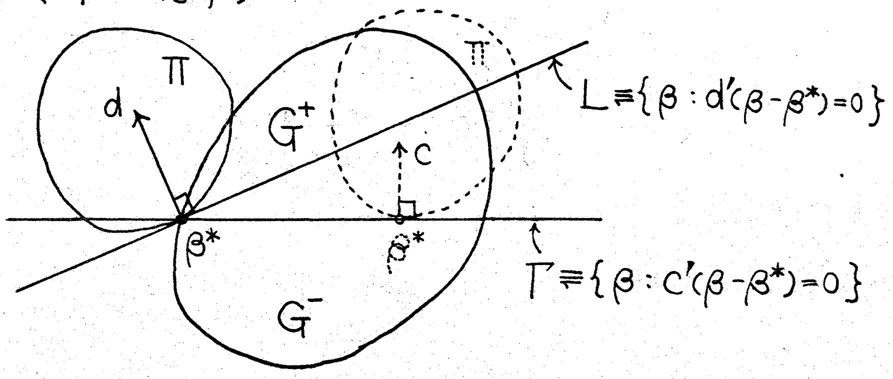
向ベクトルとし，$\beta^* \equiv E x^*(\omega, T^*) \in G^+ \cap G^- \cap \Pi$ とする。それゆえすべての摂動制御 $u(\cdot) = u^*(\cdot) + \delta u(\cdot) \in \mathcal{A}$ に対して

$$d' v(u) \geqq 0 \qquad (40)$$

が成立する。

<u>注意13.</u> $\beta^* \in$（G の内部）$\Rightarrow$ $d = c$

$\beta^* \in$（G の境界）$\Rightarrow$ 必ずしも $d = c$ とは限らない。



— 図.2. —

<u>注意14.</u> H.J. Kushner [5] は (40) から

$$d' E \delta x(T^*, u) \geqq 0 \;, \quad \forall u \in \mathcal{A} \qquad (41)$$

が成立すると早合点して以下[4]と全く同じ方法で最大原理が導かれると述べているが，(41) が一般的に成立しないことは明白である。そこで，報告者は [4] の証明法を少し改良するだけで最大原理の証明が完成されることを以下で紹介する。その場合に，(40) が最大原理の証明の中で本質的な役割を演じることに注意されたい。

3° <u>摂動制御にともなう $d'v(u)$ の評価</u>： $d'v(u)$ を評価するために、スカラー量 $Ed'\delta x(T^*,u)$ を(20)で定義されたハミルトン函数Hを用いて評価しておこう。定義(20)によると

$$0=-\int_0^{T^*}p'(t)\left[f(x^*(t)+\delta x(t,u),u(t))-f(x^*(t),u^*(t))\right]dt$$
$$+\int_0^{T^*}\left[H(p(t),x^*(t)+\delta x(t,u),u(t))-H(p(t),x^*(t),u^*(t))\right]dt \quad (42)$$

ここで、補題2および補題3の結果を用いると、$\frac{d\delta x(t,u)}{dt}$ および $\frac{dp(t)}{dt}$ は各 $\omega\in\Omega-N$ に対して Lebesgue 積分可能であるから、(42)の最初の積分は部分積分可能である。したがって、

$$-\int_0^{T^*}p'(t)\frac{d\delta x(t,u)}{dt}=-p'(t)\delta x(t,u)\Big|_{t=0}^{T^*}+\int_0^{T^*}\delta x'(t,u)\frac{dp(t)}{dt}dt \quad (43)$$

一方、(A4)によると、$H(p,x,u)$ は $x_1,\cdots,x_n$ に関して2回偏微分可能であるから、Taylor の展開公式によって、つぎの式を得る。

$$H(p(t),x^*(t)+\delta x(t,u),u(t))$$
$$=H(p(t),x^*(t),u(t))+p'(t)f_x(x^*(t),u^*(t))\delta x(t,u)+p'(t)\rho(t) \quad (44)$$

ここに、$\rho(t)$ は(34)で定義されたものとする。然るに、

$$\frac{dp(t)}{dt}=-f'_x(x^*(t),u^*(t))p(t)\quad,\quad p(T^*)=d\ ,\ \delta x(0,u)=0$$

であるから、(42), (43), (44)によって、

$$d'\delta x(T^*,u)=\int_0^{T^*}\delta H dt+\int_0^{T^*}p'(t)\rho(t)\,dt \quad (45)$$

ここに、$\delta H\equiv H(p(t),x^*(t),u(t))-H(p(t),x^*(t),u^*(t)) \quad (46)$

更に、(A2), (A4) および補題3の(19)によると、

$$|p'(t)\rho(t)|\leqq B_1\|\delta x(t,u)\|^2+B_2\|\delta u(t)\|\cdot\|\delta x(t,u)\| \quad (47)$$

ここに．$B_1 \equiv \frac{1}{2}MK$，$B_2 \equiv MK$，$M \equiv \|d\| e^{Kn T} > 0$（有限定数）．

したがって，補題2の(11)を用いると，

$$\int_0^{T^*} |p'(t)\rho(t)|dt \leqq B_3\left[\int_0^{T^*}\|\delta u(t)\|dt\right]^2 \tag{48}$$

ここに．$B_3 \equiv (B_1 n+1)B_2^2 Kn > 0$（有限定数）。

さて，1°の計算の結果による(38)と(45)とを適用することによって $Ed'\delta x(T^*, u)$ の項を消去すると，つぎの式が得られる。

$$d'v(u) = E\int_0^{T^*}\delta H\,dt + E\tilde{R}(u) \tag{49}$$

ここに．$\tilde{R}(u) \equiv \int_0^{T^*} p'(t)\rho(t)\,dt - d'R(u)$ (50)

更に．1°の計算の結果による(39)と(48)とを適用すると．

$$\begin{aligned}|\tilde{R}(u)| &\leqq \int_0^{T^*}|p'(t)\rho(t)|dt + \|d\|\cdot\|R(u)\| \\ &\leqq B\left[\int_0^{T^*}\|\delta u(t)\|dt\right]^2\end{aligned} \tag{51}$$

ここに．$B \equiv B_3 + \|d\|\cdot K_2 > 0$（有限定数）。

4° <u>最大原理の証明</u>：　最大原理が成り立たない $\tilde{\Sigma}(T^*)$ 上の (ω, t)-集合を $\mathcal{S}$ とおく。$m(\mathcal{S}) > 0$ と仮定すると，矛盾することを示そう。このとき，

$$^{\exists}\delta u(\cdot) \in \mathcal{A} : E[\delta H|\Sigma_c(t)] < 0 \;\;\&\;\; \delta u(\cdot) \neq 0 \quad \text{for all } (\omega, t) \in \mathcal{S} \tag{52}$$

したがって，十分小さいある正の数 r が存在して，この r に対して，

$$^{\exists}\mathcal{S}(r) \subset \mathcal{S} : E[\delta H|\Sigma_c(t)] < -r < 0 \;\;\&\;\; \delta u(\cdot) \neq 0 \quad \text{for all } (\omega, t) \in \mathcal{S}(r) \tag{53}$$

ここに．$\mathcal{S}(r) \in \tilde{\Sigma}_c(T^*)$ は $m(\mathcal{S}(r)) > 0$ となるように適当

に選ぶことができる。いま、$u^*(\cdot)$ の摂動制御として、

$$\begin{aligned} u(\cdot) &= u^*(\cdot)+\delta u(\cdot) & (\omega,t)\in S(r) \\ &= u^*(\cdot) & (\omega,t)\notin S(r), \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \text{i.e.}\quad \delta u(\cdot) &\neq 0 & (\omega,t)\in S(r) \\ \delta u(\cdot) &= 0 & (\omega,t)\notin S(r) \end{aligned} \tag{55}$$

を考えることにする。

$S_t(r)\equiv\{\omega:(\omega,t)\in S(r)\}$: $S(r)$ の Ω 上への射影,

$S_\omega(r)\equiv\{t:(\omega,t)\in S(r)\}$: $S(r)$ の $[0,T]$ 上への射影

とおくと、$S_t(r)\in\Sigma_c(t)$, $S_\omega(r)\in\mathcal{T}(T)$ となる。

$\tau(\omega)\equiv l(S_\omega(r))$: $S_\omega(r)$ の *Lebesgue* 測度とする。

然るに、
$$\sup_{(\omega,t)\in S(r)}\|\delta u(\omega,t)\|\equiv b<+\infty \tag{56}$$
と仮定しても制限されないことに注意しておこう。

さて、補題3の結果によると、$\int_0^{T^*}E|\delta H|\,dt<+\infty$ であるから、*Fubini* の定理によって、積分の順序交換が可能となり、

$$\begin{aligned} E\int_0^{T^*}\delta H\,dt &= \int_0^{T^*}dt\int_{S_t(r)}\delta H\,\mu(d\omega) = \int_0^{T^*}dt\int_{S_t(r)}E[\delta H|\Sigma_c(t)]\,\mu(d\omega) \\ &< -r\int_0^{T^*}dt\int_{S_t(r)}\mu(d\omega) = -r\,m(S(r))<0 \end{aligned} \tag{57}$$

一方、評価式(51)と(56)によって、

$$\begin{aligned} E|\tilde{R}(u)| &\leqq b^2 B\left[\int_0^{T^*}dt\int_{S_t(r)}\mu(d\omega)\right]\sup_\omega \tau(\omega) \\ &= B_0\, m(S(r))\sup_\omega \tau(\omega) \end{aligned} \tag{58}$$

ここに、$B_0\equiv b^2B>0$ (有限定数)

したがって，(49)と(57)，(58)を結合すると，

$$d'v(u) < [-r + B_0 \sup_{\omega} \tau(\omega)]\, m(S(r)) \tag{59}$$

ところで，$B_0>0$は有限定数であるから，$-r+B_0\sup_{\omega}\tau(\omega)<0$と同時に，$m(S(r))>0$となるような十分小さい$\sup_{\omega}\tau(\omega)$，したがって，$S(r)$を取ることができる。この$S(r)$を適用してつくった摂動制御$u(\cdot)\in\mathcal{A}$（(54)，(55)参照）に対しては，(59)によって，

$$d'v(u) < 0 \tag{60}$$

となる。しかしながら，(60)は最適性のための必要条件(40)：$d'v(u)\geqq 0$（$\forall u\in\mathcal{A}$）に矛盾して不合理である。したがって，$m(S')=0$を得る。このことは最大原理(17)が成立つことを示している。　　　　（主要定理の証明了）

参考文献

[1] Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F., & Pontryagin, L.S., "The Mathematical Theory of Optimal Processes," Gosudarst, Moscow, 1961 ; English transl., Interscience, New York (1962).

[2] Bellman, R.E., "Dynamic Programming," Princeton univer. press (1957).

[3] 南 正義；確率的系における最適制御過程について，動的計画法研究会報告集，数理解析研究所講究録28，pp.15～47 (1967).

[4] Kushner, H.J., On the stochastic maximum principle, fixed time of controls, J. Math. Anal. Appl., Vol. 11, PP. 78 ~ 92 (1965).

[5] Kushner, H.J., On the stochastic maximum principle with "average" constraints, J. Math. Anal. Appl., Vol. 12, PP. 13 ~ 26 (1965).

[6] Rozonoér, L.I., The L.S. Pontryagin maximum principle in the theory of optimal systems, I, II, III, Automatic and Remote Control, Vol. 20, PP. 1288 ~ 1302, PP. 1405 ~ 1421, PP. 1517 ~ 1532 (1960), <英訳>.

[7] Bellman, R., & Cooke, K., "Differential-Difference Equations," Academic Press (1963).

[8] Dynkin, E.B., "Foundations of the Theory of Markov Processes", Springer, Berlin (1961), <英訳>.

[9] Blackwell, D., The range of certain vector integrals, Proc. Amer. Math. Soci., Vol. 2, pp. 390 ~ 395 (1951).

[10] Kushner, H.J., On the existence of optimal stochastic controls, J. Soc. Ind. Appl. Math., Control, Vol. 3, pp. 463 ~ 474 (1965).

[11] Kushner, H.J., Optimal discounted stochastic control for diffusion processes, J. Soc. Ind. Appl. Math. Control, Vol. 5, No. 4, PP. 520 ~ 531 (1967).

[12] Fleming, W.H., & Nisio, Makiko, On the existence of optimal stochastic controls, J. Math. Mech., Vol. 15, No. 5, PP. 777 ~ 794 (1966).

[13] Fleming, W.H., Duality and 'a priori' estimates in Markovian optimization problems, J. Math. Anal. Appl., Vol. 16, PP. 254 ~ 279 (1966).

[14] Kushner, H.J., *Sufficient conditions for the optimality of a stochastic control*, J. Soc. Ind. Appl. Math. Control, Vol.3, PP. 499〜508 (1966).

[15] Kushner, H.J., "*Stochastic Stability and Control*", Academic Press, New York (1967).

補足

[補題4の証明]

基本補題2によると，つぎの２条件を満足するような閉区間$[0,T^*]$上のある Borel field $\mathcal{B}(\subset \mathcal{J}(T^*))$が存在する。i.e.

1) $l(dt)$ が$\mathcal{B}$上で non-atomic .

2) 任意のスカラー値α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ に対して，

$$^{\exists}A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{J}(T^*) \ : \quad \frac{l(A)}{l[0,T^*]} = \alpha \tag{61}$$

$$\text{および} \quad \int_A h_j(t,u^i)dt = \alpha \int_{[0,T^*]} h_j(t,u^i)dt \tag{62}$$

$$i=1,2 \ ; \quad j=1,2,\cdots,n \ .$$

もちろん，(62) により．

$$\int_{[0,T^*]-A} h_j(t,u^i)dt = (1-\alpha)\int_{[0,T^*]} h_j(t,u^i)dt \tag{63}$$

$$i=1,2 \ ; \quad j=1,2,\cdots,n \ .$$

いま．$D_i \equiv \{(\omega,t) : \delta u^i(\omega,t) \neq 0\} \in \tilde{\sum}_c(T^*)$, $i=1,2$,

$D_1' \equiv (\Omega \times A) \cap D_1 \in \tilde{\sum}_c(T^*)$,

$D_2' \equiv (\Omega \times ([0,T^*]-A)) \cap D_2 \in \tilde{\sum}_c(T^*)$

とおくと、 $D_1' \cap D_2' = \phi$ 。

さらに、摂動 $\delta u^{\alpha}(\cdot)$ をつぎのように定義する。

$$\left.\begin{aligned} \delta u^{\alpha}(t) &= \delta u^{1}(t) && \text{on } D_1' \\ &= \delta u^{2}(t) && \text{on } D_2' \\ &= 0 && \text{on } \Omega\times[0,T^*]-(D_1'\cup D_2') \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

こうすると、 $u^{\alpha}(\cdot) \equiv u^*(\cdot) + \delta u^{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{A}$ となる。

然るに、任意の $(\omega, t) \in \Omega\times A$ に対して $u^1(t) = u^{\alpha}(t)$ が成立し、また任意の $(\omega, t) \in \Omega\times([0,T^*]-A)$ に対して $u^2(t) = u^{\alpha}(t)$ が成立する。従って、(62) および (63) を考慮すると、

$$\begin{aligned} v(u^{\alpha}) &= \int_{[0,T^*]} h(t, u^{\alpha})\,dt \\ &= \int_{A} h(t, u^1)\,dt + \int_{[0,T^*]-A} h(t, u^2)\,dt \\ &= \alpha\, v(u^1) + (1-\alpha)\, v(u^2) \end{aligned}$$

すなわち、(30) が成立する。 (補題4の証明了)

[主要定理の証明中における2°の証明]

G^- と Π とが共通の内点を含まないことを示そう。そのためには、(G^-の内部)$\cap$(Πの内部)$\neq\phi$ とすると、矛盾することを示せばよい。実際、

$$\beta^* + v(u) \in (G^-\text{の内部}) \cap (\Pi\text{の内部}) \qquad (65)$$

となるような $u(\cdot) \equiv u^*(\cdot) + \delta u(\cdot) \in \mathcal{A}$ が存在する。

然るに、G^- と Π は凸集合であり、かつ $\beta^* \in G^- \cap \Pi$ であ

るから、任意のスカラー値α（0＜α＜1）に対して、

$$\beta^* + v(u^\alpha) = \beta^* + \alpha v(u) \in (G^- \text{の内部}) \cap (\Pi \text{の内部}) \tag{66}$$

となるような $u^\alpha(\cdot) = u^*(\cdot) + \delta u(\cdot) \in \mathcal{A}$ が存在する。

いま、$A(u) \equiv \{ t : \delta u(\omega, t) \neq 0$（ある$\omega$に対して）$\}$，

$$\tau(u) \equiv l(A(u))$$

とおく。補題4によれば、任意のα（0＜α＜1）に対して

$$\left.\begin{array}{llll} {}^{\exists}A_\alpha \in \mathcal{J}(T^*)\ (A_\alpha \subset A(u)) : & \dfrac{l(A_\alpha)}{l(A(u))} = \alpha & & \\ & \& \quad \alpha v(u) = v(u^\alpha) & & \\ \text{ここに、}\quad \delta u^\alpha(t) = \delta u(t) & , \ t \in A_\alpha \, , & \omega \in \Omega & \\ \qquad\qquad = 0 & , \ t \notin A_\alpha \, , & \omega \in \Omega & \end{array}\right\} \tag{67}$$

しかるに、(38) および u^α の定義によって、

$$\begin{aligned} E\,\delta x(T, u^\alpha) &= v(u^\alpha) + ER(u^\alpha) \\ &= \alpha v(u) + ER(u^\alpha) \end{aligned} \tag{68}$$

ここに、(39) によって、

$$E\|R(u^\alpha)\| \leqq K_3 \tau^2(u^\alpha) = K_3 \alpha^2 \tau^2(u) = K_4 \alpha^2 \tag{69}$$

但し、K_3 および $K_4 = K_3\tau^2(u)$ はある正の有限定数である。

したがって、$\alpha > 0$ を十分小さく取ると、

$$\begin{aligned} \beta^* + E\,\delta x(T^*, u^\alpha) &= \beta^* + v(u^\alpha) + ER(u^\alpha) \\ &= \beta^* + \alpha v(u) + o(\alpha) \in (G^- \text{の内部}) \end{aligned} \tag{70}$$

すなわち、$EC'\delta x(T^*, u^\alpha) < 0$ とすることができる。

これは $u^*(\cdot)$ が最適制御であることに矛盾している。

したがって、G^- と Π とは共通の内点を全く含まない。

——————————————————(証明了)

あとがき

結びとして、次のような問題点を列挙しておこう.

[I] 最適制御の存在性

(1) 到達可能性の問題?

(2) 最適制御の存在性の問題?

主要定理(最大原理)は最適制御が存在するものと仮定して導いたものであるが、ここではたして最適制御が存在するかどうかということが問題提起される。問題点(2)に関する文献については、例えば、[10], [11], [12], [13], [14]を参照されるとよい。

[II] 最適制御の構成法

(3) 最大原理によって最適制御が構成できるかどうか?

この問題点はまだ未解決といえよう.

(4) 最大原理によらない構成法は考えられないか?

この問題点に関しては、一つには、D.P.法による解析法が考えられる。例えば、[11], [12], [13], [14], [15]では、D.P.法による解析法が検討されているが、十分に解決されたとはいえず、今後もっと開発すべき問題点が残されているように思われる。